# Deformações – Exercícios Propostos

1. Dado o campo de deslocamentos a seguir,

$$\mathbf{u} = [(20X_1^2X_2)\mathbf{e}_1 + 10(X_2^2 + X_3^2)\mathbf{e}_2 + (X_1 + 3X_3^3)\mathbf{e}_3] \times \alpha(cm)$$

   Determine:

   a) se $\alpha = 10^{-2}$, a matriz gradiente do campo de deslocamento $[\nabla \mathbf{u}_t]$;

   b)o tensor de Green $\mathbf{E}^*$, incluindo termos lineares e não-lineares $\nabla \mathbf{u}_t^T \nabla \mathbf{u}_t$, comparando a contribuição que os termos não-lineares trazem para os componentes do tensor;

   c) para $\alpha = 10^{-4}$, calcule o tensor de Green $\mathbf{E}^*$ com os termos não-lineares e faça a mesma comparação do item anterior;

   d) calcule, assumindo pequenas deformações, o tensor de Cauchy $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t^T + \nabla \mathbf{u}_t)$;

   e) calcule, o tensor de rotações infinitesimais $\mathbf{\Omega}$ e o vetor rotação $\omega$;

   f) calcule a dilatação cúbica para o tensor linear de Cauchy $\varepsilon_V$;

   g) escreva o tensor deviatórico $\mathbf{E}^D = \mathbf{E} - \dfrac{\varepsilon_V}{3}\mathbf{I}$;

   h) particularize os resultados acima para o ponto P(1,1,1);

   i) para $\alpha = 10^{-2}$, determine a componente do deslocamento na posição (2,0,1)(original) na direção $\hat{\mathbf{e}} = 0.6\mathbf{e}_1 + 0.8\mathbf{e}_2$.

2. Dado o seguinte campo de pequenos deslocamentos:

$$\mathbf{u} = [(3x^2 + y)\mathbf{e}_1 + 10(3y + z^2)\mathbf{e}_2 + (2z^2)\mathbf{e}_3] \times 10^{-3}(cm)$$

   a) Determine os tensores de deformação e rotação infinitesimal, bem como o vetor rotação. Particularize para o ponto P(2,1,3).

   b) Se um corpo sofre uma pequena rotação dada pelo vetor

$$\omega = 0.002\mathbf{e}_1 + 0.005\mathbf{e}_2 - 0.002\mathbf{e}_3(rad)$$

   Qual é o tensor de rotação infinitesimal $\Omega$ correspondente.

3. Dado o campo de pequenos deslocamentos

$$\mathbf{u} = [(6y + 5z)\mathbf{e}_1 + (-6x + 3z)\mathbf{e}_2 + (-5x - 3y)\mathbf{e}_3] \times 10^{-3}(cm)$$

   Mostre que este campo induz somente uma rotação de corpo rígido

   a) Determine o vetor de rotação $\omega$ do corpo,

   b) Calcule tensor de deformação $\mathbf{E}$ em dilatação cúbica $\varepsilon_v$.

4. Dado o campo de pequenos deslocamentos

$$\mathbf{u} = [(x^3 + 10)\mathbf{e}_1 + 3yz\mathbf{e}_2 + (z^2 - yx)\mathbf{e}_3] \times 10^{-3}(cm)$$

   Determine

   a) a translação de corpo rígido do corpo, tomando a origem com ponto de referência;

   b) o tensor de deformações **E;**

   c) o tensor de rotações infinitesimais $\mathbf{\Omega}$;

   d) a dilatação cúbica $\varepsilon_v$ e o tensor diviatórico $\mathbf{E}^D = \mathbf{E} - \dfrac{\varepsilon_V}{3}\mathbf{I}$;

   e) particularize os resultados acima para P(2,1,0).

**SOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 1**:

a) campo de deslocamentos:

$$\mathbf{u} = [(20X_1^2X_2)\mathbf{e}_1 + 10(X_2^2 + X_3^2)\mathbf{e}_2 + (X_1 + 3X_3^3)\mathbf{e}_3] \times \alpha (cm)$$

Matriz do gradiente do campo de deslocamentos

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix}$$

Considerando o ponto $P(1,1,1)$ tem-se que,

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = 10^{-2} \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 \\ 0 & 20 & 20 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

b) tensor de Green incluindo termos não-lineares

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^* &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T + \nabla \mathbf{u}_t^T \nabla \mathbf{u}_t) \rightarrow [\mathbf{E}^*] = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}_t] + [\nabla \mathbf{u}_t]^T + [\nabla \mathbf{u}_t]^T [\nabla \mathbf{u}_t]) \\
[\mathbf{E}^*] &= \frac{1}{2}\left( \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right. \\
&+ \left. \alpha^2 \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right) \\
[\mathbf{E}^*] &= \frac{1}{2}\left( \alpha \begin{bmatrix} 80X_1X_2 & 20X_1^2 & 1 \\ 20X_1^2 & 40X_2 & 20X_3 \\ 1 & 20X_3 & 18X_3^2 \end{bmatrix} + \alpha^2 \begin{bmatrix} 1600X_1^2X_2^2 + 1 & 800X_1^3X_2 & 9X_3^2 \\ 800X_1^3X_2 & 400(X_1^4 + X_2^2) & 400X_2X_3 \\ 9X_3^2 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Particularizando para o ponto $P(1,1,1)$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}^*] &= \frac{1}{2}\left( \alpha \begin{bmatrix} 80 & 20 & 1 \\ 20 & 40 & 20 \\ 1 & 20 & 18 \end{bmatrix} + \alpha^2 \begin{bmatrix} 1601 & 800 & 9 \\ 800 & 800 & 400 \\ 9 & 20 & 9 \end{bmatrix} \right) \\
[\mathbf{E}^*] &= \begin{bmatrix} 0,40 & 0,10 & 0,005 \\ 0,10 & 0,20 & 0,10 \\ 0,005 & 0,10 & 0,09 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,08005 & 0,0400 & 0,00045 \\ 0,0400 & 0,0400 & 0,0200 \\ 0,00045 & 0,001 & 0,00045 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo, para $\alpha = 10^{-2}$ as componentes não-lineares possuem uma ordem de grandeza próxima dos valores lineares, não podendo serem desprezadas. Por exemplo, para o termo $E_{11}^*$ observa-se que,

$$E_{11}^* = 0,40 + 0,08005 = 0,48005 \rightarrow \frac{0,08005}{0,40} \approx 20\%$$

c) considerando $\alpha = 10^{-4}$ e o ponto $P(1,1,1)$ vem que,

$$10^{-4}\begin{bmatrix} 40 & 10 & 0,5 \\ 10 & 20 & 10 \\ 0,5 & 20 & 9 \end{bmatrix} + 10^{-8}\begin{bmatrix} 800,5 & 400 & 4,5 \\ 400 & 400 & 200 \\ 4,5 & 10 & 4,5 \end{bmatrix}$$

Neste caso, a parte não-linear pode ser desprezada, pois a sua contribuição não é significativa. Por exemplo, tomando a componente $E^*_{11}$ novamente vem que,

$$E^*_{11} = 40 \times 10^{-4} + 8,005 \times 10^{-6} = 40,008 \times 10^{-4} \to \frac{8,005 \times 10^{-6}}{40 \times 10^{-4}} \approx 0,2\%$$

d) tensor de Cauchy para pequenas deformações

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T) \to [\mathbf{E}] = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}_t] + [\nabla \mathbf{u}_t]^T) \\
[\mathbf{E}] &= \frac{1}{2}\left(\alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix}\right) \\
[\mathbf{E}] &= \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 10X_1^2 & 0,5 \\ 10X_1^2 & 20X_2 & 10X_3 \\ 0,5 & 10X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para o ponto $P(1,1,1)$ e $\alpha = 10^{-4}$ verifica-se que,

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0,004 & 0,001 & 0,00005 \\ 0,001 & 0,002 & 0,001 \\ 0,00005 & 0,001 & 0,0009 \end{bmatrix}$$

e) tensor de rotações infinitesimais

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t - \nabla \mathbf{u}_t^T) \to [\mathbf{\Omega}] = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}_t] - [\nabla \mathbf{u}_t]^T) \\
[\mathbf{\Omega}] &= \frac{1}{2}\left(\alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix}\right) \\
[\mathbf{\Omega}] &= \alpha \begin{bmatrix} 0 & 10X_1^2 & -0,5 \\ -10X_1^2 & 0 & 10X_3 \\ 0,5 & -10X_3 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para o ponto $P(1,1,1)$ e $\alpha = 10^{-4}$ verifica-se que,

$$[\mathbf{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & 0,001 & -0,00005 \\ -0,001 & 0 & 0,001 \\ 0,00005 & -0,001 & 0 \end{bmatrix}$$

Vetor de rotação $\omega$ é o vetor axial associado ao tensor antissimétrico $\mathbf{\Omega}$. Logo,

$$\omega = \Omega_{32}\mathbf{e}_1 + \Omega_{13}\mathbf{e}_2 + \Omega_{12}\mathbf{e}_3 \to \omega = -10\alpha X_3 \mathbf{e}_1 + -0,5\alpha \mathbf{e}_2 + 10\alpha X_1^2 \mathbf{e}_3$$

Para o ponto $P(1,1,1)$ e $\alpha = 10^{-4}$,

$$\omega = -0,001\mathbf{e}_1 + -0,00005\mathbf{e}_2 + 0,001\mathbf{e}_3$$

f) Dilatação

$$\varepsilon_V = \operatorname{tr}\mathbf{E} = E_{ii} \rightarrow \varepsilon_V = (40X_1X_2 + 20X_2 + 9X_3^2)\alpha$$

Para o ponto $P(1,1,1)$ e $\alpha = 10^{-4}$,

$$\varepsilon_V = (40+20+9)\times 10^{-4} = 0,0069$$

g) Tensor deviatórico

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^D &= \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_V}{3}\mathbf{I} \rightarrow \left[\mathbf{E}^D\right] = [\mathbf{E}] - \frac{\varepsilon_V}{3}[\mathbf{I}] \\
\left[\mathbf{E}^D\right] &= \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 10X_1^2 & 0,5 \\ 10X_1^2 & 20X_2 & 10X_3 \\ 0,5 & 10X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} - \frac{\varepsilon_V}{3\alpha}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\left[\mathbf{E}^D\right] &= \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 - \frac{\varepsilon_V}{3\alpha} & 10X_1^2 & 0,5 \\ 10X_1^2 & 20X_2 - \frac{\varepsilon_V}{3\alpha} & 10X_3 \\ 0,5 & 10X_3 & 9X_3^2 - \frac{\varepsilon_V}{3\alpha} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tomando o ponto $P(1,1,1)$ e $\alpha = 10^{-4}$, tem-se que,

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{E}^D\right] &= \begin{bmatrix} 0,004 - 0,0023 & 0,001 & 0,00005 \\ 0,001 & 0,002 - 0,0023 & 0,001 \\ 0,00005 & 0,001 & 0,0009 - 0,0023 \end{bmatrix} \\
\left[\mathbf{E}^D\right] &= \begin{bmatrix} 0,0017 & 0,001 & 0,00005 \\ 0,001 & 0,0003 & 0,001 \\ 0,00005 & 0,001 & -0,0014 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

h) componente deslocamento do ponto $P(2,0,1)$ na direção $\hat{\mathbf{e}}$ =$0.6\mathbf{e}_1$+$0.8\mathbf{e}_2$ com $\alpha = 10^{-2}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \ \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_1 + 20\alpha X_1^2 X_2 \\ X_2 + 10\alpha(X_2^2 + X_3^2) \\ X_3 + \alpha(X_1 + 3X_3)^3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 0,1 \\ 1,05 \end{array} \right\}$$

Por sua vez,

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0,1 \\ 0,05 \end{array} \right\}$$

$$d = \mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{e}} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0,1 & 0,05 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{array} \right\} = 0,08$$