Capítulo 4

BARRA

4.1 Formulação Variacional

Barra é um elemento estrutural cuja principal característica geométrica é possuir o comprimento maior que as dimensões da seção transversal. Assim, considera-se a barra como um elemento unidimensional, analisando o seu comportamento ao longo da direção paralela à dimensão longitudinal, conforme mostrado na Figura 4.1. Neste capítulo, assume-se o caso de pequenas deformações e material elástico linear. Na abordagem variacional, a formulação do problema de barras segue as etapas apresentadas na seção 3.1.



Figura 4.1: Barra de comprimento L juntamente com sistema de coordenadas.

A seguir aplicam-se os 6 primeiros passos da formulação variacional apresentados na Seção 3.1. Posteriormente, define-se a equação constitutiva para um material elástico linear isotrópicop, dada pela Lei de Hooke.

4.1.1 Definição da Cinemática

O modelo cinemático consiste em supor que as ações de movimento possíveis são tais que a seção transversal permaneça plana e normal ao eixo x (alinhado com a direção longitudinal da barra), como mostrado na Figura 4.2. As ações de movimento são descritas por um campo escalar de deslocamentos u(x), ou seja, por uma função escalar contínua da variável x. Logo, todos os pontos de uma seção transversal xsofrem um mesmo deslocamento axial u(x) (ver Figura 4.2(b)). Desta forma, a cinemática do modelo de barra consiste de ações de movimento axiais u(x) provocando apenas estiramentos ou encurtamentos da barra. A denominação axial indica que o deslocamento é aplicado ao longo do comprimento da barra, ou seja, do eixo x do sistema de referência adotado.



Figura 4.2: Cinemática do modelo de barra: seções transversais perpendiculares ao eixo x antes e depois dadeformação.

A partir da cinemática adotada, pode-se definir formalmente o conjunto \mathcal{V} das ações de movimento possíveis para a barra como

$$\mathcal{V} = \{u(x), \ x \in (0, L), u(x) \text{ \'e contínua}\}.$$

$$(4.1)$$

Por esta notação entende-se que \mathcal{V} é o conjunto das funções contínuas da variável x ao longo do comprimento L da barra. Este conjunto pode ser denotado também como C(0, L), sendo que a letra C indica que as funções deste conjunto são contínuas.

O contorno da barra consiste dos pontos nas extremidades com coordenadas x = 0 e x = L. Em geral, a barra estará apoiada nestes pontos, fazendo surgir restrições cinemáticas de deslocamentos, ou seja, os valores de u(x) estarão prescritos em x = 0 e x = L (ver Figura ??). Esta restrições são indicadas no subconjunto $Kin_{\mathbf{v}}$ das ações de movimento cinematicamente admissíveis. Para os casos onde a barra está apoiada em x = 0 e em ambas extremidades (ver Figuras 4.20), os respectivos subespaços de ações cinematicamente admissíveis são dados por

$$Kin_{\mathbf{v}} = \{u(x), u(0) = 0, x \in (0, L), u(x) \text{ \'e contínua}\},$$

$$Kin_{\mathbf{v}} = \{u(x), u(0) = 0, u(L) = 0, x \in (0, L), u(x) \text{ \'e contínua}\}.$$
(4.2)

Para uma barra livre, todas as funções $v \in \mathcal{V}$ são também ações *admissíveis*, pois não há vínculos físicos (restrições cinemáticas). Quando alguma restrição está presente, as ações de movimento cinematicamente admissíveis são dadas por funções que respeitam estas restrições, constituindo o subconjunto $Kin_{\mathbf{v}}$ de \mathcal{V} .

4.1.2 Deformação

Considere a barra de comprimento L apoiada na extremidade x = 0 ilustrada na Figura 4.3. Seja Δx um elemento de barra que dista x da origem do sistema de referência adotado. Suponha que a barra sofra um estiramento u(x), como mostrado na Figura 4.3, fazendo com que o comprimento final do elemento seja $\Delta x' = \Delta x + \Delta u$. Define-se a deformação longitudinal ou normal do elemento de barra como a variação do comprimento dividido pelo comprimento inicial, ou seja,

$$\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x + \Delta u - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Tomando-se o limite da relação anterior para Δx tendendo a zero, isto é,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$



Figura 4.3: Estiramento na barra.

e empregando-se a definição de derivada, obtém-se a deformação específica longitudinal ε_{xx} na seção x da barra, ou seja,

$$\varepsilon_{xx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du(x)}{dx}.$$
(4.3)

A deformação é denominada específica pois é uma quantidade adimensional indicando a porcentagem de estiramento ou encurtamento da barra. Longitudinal indica que a deformação ocorre ao longo do comprimento da barra. Os dois índices $x \, \text{em} \, \varepsilon_{xx}$ representam, respectivamente, o plano e a direção nos quais a deformação ocorre. Logo, ε_{xx} é a deformação no plano x na direção do eixo x do sistema de referência adotado para o estudo da barra (ver Figura 4.1).

Neste caso, o operador D indicado na Figura 3.2 é simplesmente a derivada em relação a x, ou seja, $D = \frac{d}{dx}$. Da mesma maneira, o espaço \mathcal{W} é o conjunto de todas as funções escalares $\varepsilon_{xx}(x)$ denominadas deformações longitudinais e obtidas ao se derivar as ações de movimento $u(x) \in \mathcal{V}$. Observa-se que o operador $D: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ relaciona a cinemática com a deformação, ou seja,

$$D: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$$
$$u(x) \longrightarrow \varepsilon_{xx}(x) = Du(x) = \frac{du(x)}{dx}$$
(4.4)

4.1.3 Movimentos Rígidos

Como mencionado na Seção 3.3, a potência interna P_i é nula para o caso de um movimento de corpo rígido. No caso da barra, isto implica em dizer que a deformação $\varepsilon_{xx}(x)$ é nula para toda seção x ao longo do comprimento da barra, ou seja,

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{du(x)}{dx} = 0 \qquad x \in (0, L) \quad . \tag{4.5}$$

Para que a condição anterior seja satisfeita, o deslocamento axial deve ser constante para toda seção x, ou seja, u(x) = u =cte. Fisicamente, isto implica que a ação rígida só pode ser uma translação da barra ao longo do eixo x conforme ilustrado na Figura 4.4.

O conjunto de todas as ações rígidas em \mathcal{V} , ou seja, das ações $u \in \mathcal{V}$ tal que $\varepsilon_{xx} = Du = \frac{du}{dx} = 0$, define o subconjunto $\mathcal{N}(D)$ das ações rígida da barra. Estes subconjunto é definido formalmente como

$$\mathcal{N}(D) = \left\{ u(x) \in \mathcal{V} \mid u(x) = u = \text{cte}, Du = \frac{du}{dx} = 0 \right\},\tag{4.6}$$



Figura 4.4: Movimento de corpo rígido na barra: translação u ao longo do eixo x.

ou seja, $\mathcal{N}(D)$ é o subconjunto de todas as ações u(x) de \mathcal{V} , tais que u(x) é constante, implicando que a deformação ε_{xx} é nula. Assim, o movimento de corpo rígido é uma translação da barra ao longo do eixo x.

A relação entre os conjuntos $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \mathcal{N}(D)$ e o operador D é mostrada na Figura 4.5.



Figura 4.5: Relação entre os espaços de ações de movimento \mathcal{V} e das taxas de deformação \mathcal{W} .

4.1.4 Potência Interna

A partir da definição de potência interna P_i dada na Seção 3.3, observa-se que associada à deformação $\varepsilon_{xx}(x)$ deve existir uma função $\sigma_{xx}(x)$ representando o estado das forças internas na barra. Esta função escalar é denominada tensão normal atuante no plano x na direção do eixo x. A denominação normal indica que a tensão está presente na direção perpendicular a cada seção transversal x (ver Figura ??). A partir daí, a potência interna P_i é dada pela seguinte integral ao longo do volume V da barra

$$P_i = -\int_V \sigma_{xx}(x)\varepsilon_{xx}(x) \, dV. \tag{4.7}$$

Como ε_{xx} é constante em todos os pontos de uma seção transversal, pode-se decompor a integral de volume anterior em duas integrais ao longo do comprimento e da área da seção transversal da barra, ou

seja,

$$P_i = -\int_0^L \left(\int_A \sigma_{xx}(x) \, dy dz \right) \varepsilon_{xx} \, dx. \tag{4.8}$$

Como a tensão $\sigma_{xx}(x)$ está dada em unidades tais como N/m^2 e integra-se $\sigma_{xx}(x)$ ao longo da área, o resultado está em termos de força. Logo, denomina-se

$$N_x(x) = \int_A \sigma_{xx}(x) \, dy dz \tag{4.9}$$

como força normal na direção x. Novamente, como $\sigma_{xx}(x)$ pode variar apenas de seção para a seção e na expressão anterior tem-se uma integral ao longo da área, reescreve-se a expressão $N_x(x)$ como

$$N_x(x) = \sigma_{xx}(x) \int_A dy dz,$$

sendo que a integral representa a área na seção x, isto é, $A(x) = \int_A dy dz$. Portanto, a força normal para $N_x(x)$ é dada por

$$N_x(x) = \sigma_{xx}(x)A(x). \tag{4.10}$$

Observa-se que a tensão $\sigma_{xx}(x)$ é constante em cada seção x, como ilustrado na Figura 4.6. Um valor positivo indica uma tensão normal de tração. Um valor negativo indica uma tensão normal de compressão.



(a) Tensão de tração. (b) Tensão de compressão.

Figura 4.6: Distribuição de tensão na seção transversal da barra.

A partir da definição da força normal, pode-se escrever a potência interna Pi dada em (4.8) como

$$P_{i} = -\int_{0}^{L} N_{x}(x)\varepsilon_{xx}(x) \, dx = -\int_{0}^{L} N_{x}\frac{du(x)}{dx} \, dx.$$
(4.11)

4.1.5 Aplicação do PPV

Seja f o conjunto de esforços externos compatíveis com a cinemática definida para o modelo unidimensional de barra. Deseja-se caracterizar f. Para isso, aplica-se o PPV dado na Seção 3.4. Logo, a partir de (4.11) e do PPV expresso em (3.21), tem-se que para qualquer ação de movimento virtual $\hat{u}(x) \in \mathcal{V}$

$$P_e + P_i = 0 \Rightarrow \langle f, \hat{u} \rangle - \int_0^L N_x(x) \frac{d\hat{u}(x)}{dx} dx.$$
(4.12)

A expressão anterior, obtida a partir do PPV, envolve a derivada do deslocamento virtual $\hat{u}(x)$, ou seja, a deformação virtual $\hat{\varepsilon}_{xx}(x)$. Em geral, deseja-se obter uma expressão em função do deslocamento

 $\hat{u}(x)$ apenas e não de sua derivada. Para isso, aplica-se o procedimento de integração por partes. Lembrese que dadas duas funções contínuas $f(x) \in g(x)$ definidas no intervalo [a, b], a expressão $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ pode ser integrada por partes resultando em

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx$$

$$= [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx.$$
(4.13)

Portanto, a integração por partes resulta num termo no contorno do intervalo [a, b] (pontos x = ae x = b) e uma integral do longo do intervalo. Observe que na expressão à esquerda, f(x) não está derivado e após a integração por partes passa a estar derivado. De forma análoga, a função g(x) não aparece derivada à direita da expressão anterior. Diz-se então que aumentou-se a ordem de diferenciação de f(x) e diminuiu-se a ordem de diferenciação de g(x).

Tomando-se $f(x) = N_x(x)$ e $g'(x) = \frac{d\hat{u}(x)}{dx}$, tem-se, respectivamente, $f'(x) = \frac{dN_x(x)}{dx}$ e $g(x) = \hat{u}(x)$. Logo, a partir da regra de integração por partes dada em (4.13), a expressão (4.12) pode ser reescrita como

$$\langle f, \hat{u} \rangle = \int_{0}^{L} N_{x}(x) \frac{d\hat{u}(x)}{dx} dx = N_{x}(x)\hat{u}(x)|_{0}^{L} - \int_{0}^{L} \frac{dN_{x}(x)}{dx}\hat{u}(x) dx$$

$$= [N_{x}(L)\hat{u}(L) - N_{x}(0)\hat{u}(0)] - \int_{0}^{L} \frac{dN_{x}(x)}{dx}\hat{u}(x) dx.$$

$$(4.14)$$

Na expressão anterior, a força normal $N_x(x)$ está derivada, enquanto o deslocamento virtual axial $\hat{u}(x)$ aparece sem derivação. Assim, aplica-se sempre o procedimento de integração por parte quando se deseja diminuir a ordem de diferenciação de uma grandeza da equação.

A equação (4.14) representa o enunciado integral do equilíbrio da barra livre de restrições, fornecendo ainda uma representação das forças compatíveis com o modelo da barra.

4.1.6 Caracterização dos Esforços Externos

A expressão (4.14) foi obtida a partir da aplicação do PPV. Este princípio estabelece que se o corpo está em equilíbrio, as potências externa e interna são as mesmas para qualquer ação virtual de movimento, a partir da configuração deformada do corpo. O termo do lado direito da expressão (4.14) foi determinado integrando-se a potência interna (4.11) por partes. Este termo é importante pois possibilita caracterizar os esforços internos que estão presentes na barra. Neste caso, tem-se forças normais concentradas $N_x(L)$ e $N_x(0)$ nas extremidades da barra. Além disso, ao longo do comprimento L da barra, tem-se uma distribuição de força normal $N_x(x)$ por unidade de comprimento dada por $\frac{dN_x(x)}{dx}$.

Logo, como o PPV estabelece a igualdade das potências externa e interna para qualquer deslocamento virtual $\hat{u}(x)$ a partir da posição de equilíbrio, tem-se que as esforços externos compatíveis com a representação (4.14) são caracterizados por forças concentradas $P_0 \in P_L$, respectivamente, nas extremidades $x = 0 \in x = L$ da barra. Além disso, para equilibrar o termo $\frac{dN_x(x)}{dx}$, deve existir uma densidade de força externa axial distribuída, denotada por p(x), cuja potência $\int_0^L p(x)\hat{u}(x) dx$ associada a um deslocamento virtual arbitrário $\hat{u}(x)$, equilibra a potência interna $\int_0^L \frac{dN_x(x)}{dx}\hat{u}(x) dx$. Logo, o termo f em (4.14) é dado por

$$f: \begin{cases} P_0 \to \text{força axial aplicada em } x = 0 \\ P_L \to \text{força axial aplicada em } x = L \\ p \to \text{densidade de força axial por unidade de comprimento} \end{cases}$$
(4.15)

Estes carregamentos estão ilustrados na Figura 4.7(a).



(a) Convenção de sinais. (b) Esforços externos na barra.

Figura 4.7: Esforços externos e convenção de sinais na barra.

A partir de (4.15), obtém-se a expressão da potência externa das forças f para qualquer ação virtual $\hat{u}(x) \in \mathcal{V}$, ou seja,

$$P_e = \langle f, \hat{u} \rangle = P_0 \hat{u} (0) + P_L \hat{u} (L) + \int_0^L p(x) \hat{u}(x) \, dx.$$
(4.16)

Substituindo (4.16) no enunciado do PPV (4.14), obtém-se

$$P_0\hat{u}(0) + P_L\hat{u}(L) + \int_0^L p(x)\hat{u}(x) \, dx = \left[N_x(L)\hat{u}(L) - N_x(0)\hat{u}(0)\right] - \int_0^L \frac{dN_x(x)}{dx}\hat{u}(x) \, dx.$$

A expressão anterior pode ser rearranjada como

$$-\left[N_{x}(0)+P_{0}\right]\hat{u}(0)+\left[N_{x}(L)-P_{L}\right]\hat{u}(L)-\int_{0}^{L}\left[\frac{dN_{x}(x)}{dx}+p(x)\right]\hat{u}(x)\ dx=0.$$
(4.17)

Para que esta equação seja verdadeira para toda ação virtual $\hat{u}(x) \in \mathcal{V}$, os 3 termos entre colchetes devem ser simultaneamente nulos, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dN_x(x)}{dx} + p(x) = 0 & \text{em } x \in (0, L) \\ N_x(L) = P_L & \text{em } x = L \\ N_x(0) = -P_0 & \text{em } x = 0 \end{cases}$$
(4.18)

A expressão anterior define a forma local do problema de barra livre de restrições cinemáticas. Tem-se uma equação diferencial em termos da força normal e duas condições de contorno. Este conjunto (equação diferencial + condições de contorno) define o que se chama Problema de Valor de Contorno (PVC).

Resolvendo-se a equação diferencial, obtém-se o esforço normal $N_x(x)$ ao longo do eixo x da barra. Um valor positivo indica que a barra está sob tração, enquanto que um valor negativo representa uma força de compressão. A Figura ilustram, respectivamente, os esforços externos compatíveis com a cinemática da barra e a convenção de sinais. Pode-se traçar um diagrama da força normal $N_x(x)$, sendo este diagrama comumente conhecido como diagrama de esforço solicitante.

A partir da equação (4.18), define-se o operador de equilibrio D^* entre os esfoços externos e internos. Este operador pode ser escrito como

$$D^* N_x(x) = \begin{cases} -\frac{d}{dx} N_x(x) & \text{em } x \in (0, L) \\ -N_x(x)|_{x=0} & \text{em } x = L \\ N_x(x)|_{x=L} & \text{em } x = 0 \end{cases}$$
(4.19)

O operador D^* mapeia os espaços vetoriais dos esforços internos \mathcal{W} e externos \mathcal{V}' . Neste caso, o espaço vetorial dos esforços externos \mathcal{V}' é caracterizado por uma função escalar contínua p(x) indicando a carga axial distribuída sobre a barra e forças concentradas P_0 e P_L nas extremidades da barra e tratadas através como condições de contorno do problema. Portanto, denota-se \mathcal{D}^* como

$$D^*: \ \mathcal{W} \to \ \mathcal{V}'$$
$$N_x(x) \to \ D^*N_x(x) = \begin{cases} -\frac{d}{dx}N_x(x) = p(x) & \text{em } x \in (0,L) \\ -N_x(x)|_{x=0} = P_0 & \text{em } x = L \\ N_x(x)|_{x=L} = P_L & \text{em } x = 0 \end{cases}.$$

Se $\hat{u}(x)$ for uma ação de movimento virtual rígida, então a potência interna é nula. Neste caso, o PPV estabelece que para qualquer ação virtual rígida $\hat{u}(x) \in \mathcal{N}(D)$, a potência externa dada em (4.16) é nula para uma barra em equilíbrio, ou seja,

$$P_0\hat{u}(0) + P_L\hat{u}(L) + \int_0^L p(x)\hat{u}(x) \, dx = 0.$$
(4.20)

As ações rígidas para o caso de barra, são deslocamentos constantes, isto é, translações na direção x. Logo, tem-se $\hat{u}(x) = \hat{u}$ =cte e substituindo na expressão anterior vem que

$$\left(P_0 + P_L + \int_0^L p(x) \, dx\right)\hat{u} = 0$$

A partir daí, obtém-se a condição de equilíbrio da barra, estabelecendo que a resultante das forças externas deve ser nula, isto é,

$$P_0 + P_L + \int_0^L p(x)dx = 0.$$
(4.21)

A forma esquemática da formulação do problema de barra é mostrada na Figura 4.8.



Figura 4.8: Formulação variacional do problema de barra.

Antes de definir o comportamento do material, apresentam-se alguns exemplos para obter a força normal na barra através da integração da equação diferencial. Para resolver este tipo de problema e determinar os diagramas de esforços solicitantes, aplicam-se os seguintes passos

- 1. escrever a equação de carregamento,
- 2. indicar as condições de contorno,
- 3. integração da equação diferencial,
- 4. determinar as constantes de integração através da aplicação das condições de contorno,
- 5. escrever as equações finais,
- 6. traçar os diagramas,
- 7. determinar as reações de apoio.

O ponto importante a ser observado é que as reações de apoio são obtidas automaticamente a partir da solução do problema, pois a equação diferencial indica o equilíbrio de esforços externos e internos. Desta maneira, o mesmo procedimento anterior pode ser aplicado sem nenhuma modificação para o caso de problemas hiperestáticos.

Exemplo 4.1 Traçar o diagrama da força normal para a barra ilustrada na Figura 4.9 através da integração da equação diferencial.



Figura 4.9: Exemplo 4.1 (barra submetida a uma carga distribuída constante p_0).

Para resolver este exemplo, aplica-se o procedimento dado anterior.

- 1. Equação do carregamento: $p(x) = p_0$.
- 2. Condições de contorno: $x = 0 \rightarrow N_x(x = 0) = 0$.

3. Integração da equação diferencial: $\frac{dN_x(x)}{dx} = -p(x) = -p_0 \rightarrow N_x(x) = -p_0x + C_1.$

- 4. Determinação da constante de integração: $x = 0 \rightarrow N_x(x = 0) = -p_0(0) + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0.$
- 5. Equação final: $N_x(x) = -p_0 x$.
- 6. Diagrama da força normal: $N_x(x=0) = 0$ e $N_x(x=L) = -p_0L$.

O diagrama da força normal é mostrado abaixo para $L = 2m e p_0 = 10N/m$. Observa-se que a força normal varia linearmente.



7. Reação de apoio: neste caso, a reação de apoio R_{Ax} na extremidade x = L da barra é dada pela condição de contorno, ou seja, $R_{Ax} = N_x(x = L) = -p_0L = -20N$. Logo, o sentido positivo da reação é para cima e portanto contrário à direção positiva do eixo x, neste caso para baixo. Este valor também pode ser obtido pelo diagrama.

Exemplo 4.2 Traçar o diagrama da força normal para a barra ilustrada na Figura 4.10 através da integração da equação diferencial.



Figura 4.10: Exemplo 4.2 (barra submetida a uma carga distribuída constante p_0 .

- 1. Equação do carregamento: $p(x) = p_0$.
- 2. Condições de contorno: $x = L \rightarrow N_x(x = L) = 0$.
- 3. Integração da equação diferencial: $\frac{dN_x(x)}{dx} = -p(x) = p_0 \rightarrow N_x(x) = p_0x + C_1.$
- 4. Determinação da constante de integração: $x = L \rightarrow N_x(x = L) = p_0L + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -p_0L$.
- 5. Equação final: $N_x(x) = p_0(x L)$.
- 6. Diagrama da força normal: $N_x(x=0) = -p_0L \ e \ N_x(x=L) = 0.$

O diagrama da força normal é mostrado abaixo para $L = 2m e p_0 = 10N/m$. Observa-se que a força normal varia linearmente.



7. Reação de apoio: neste caso, a reação de apoio R_{Ax} na extremidade x = 0 da barra é dada pela condição de contorno, ou seja, $R_{Ax} = -N_x(x=0) = p_0L = 20N$. Este valor também pode ser obtido pelo diagrama.

Destes dois exemplos iniciais, verifica-se que a mesma solução é obtida independente da origem adotada para o sistema de referência.

Exemplo 4.3 Traçar o diagrama da força normal para a barra ilustrada na Figura 4.11 através da integração da equação diferencial.



Figura 4.11: Exemplo 4.3 (barra submetida a uma carga distribuída variando linearmente).

Neste caso, tem-se uma carga distribuída variando linearmente. Aplica-se o mesmo procedimento anterior.

- 1. Equação do carregamento: $p(x) = p_0 \frac{x}{L}$.
- 2. Condições de contorno: $x = 0 \rightarrow N_x(x = 0) = 500$.
- 3. Integração da equação diferencial: $\frac{dN_x(x)}{dx} = -p(x) = -p_0 \frac{x}{L} \rightarrow N_x(x) = -\frac{p_0}{2L}x^2 + C_1.$

4. Determinação da constante de integração $x = 0 \rightarrow N_x(x = 0) = \frac{p_0}{2L}(0)^2 + C_1 = 500 \rightarrow C_1 = 500.$

- 5. Equação final: $N_x(x) = -\frac{p_0}{2L}x^2 + 500.$
- 6. Diagrama da força normal: considerando $L = 1m \ e \ p_0 = 2000 N/m$, tem-se $N_x(x = 0) = 500N \ e \ N_x(x = L) = -500N$. O diagrama da força normal é ilustrada a seguir. Observe que devido ao carregamento distribuído linear, a força normal varia como uma parábola.



7. Reação de apoio: neste caso, a reação de apoio R_{Ax} na extremidade x = L da barra é dada pela condição de contorno, ou seja, $R_{Ax} = N_x(x = L) = -500N$. Logo, o sentido positivo da reação é para cima e portanto contrário à direção positiva do eixo x, neste caso, para baixo. Este valor também pode ser obtido pelo diagrama.

4.1.7 Diagramas de Ensaio de Tração e Compressão

Considere a barra de comprimento L e área da seção transversal constante A submetida a uma força axial de tração P na sua extremidade (ver Figura 4.12(a)). Devido a este carregamento P, a força normal em cada seção transversal x é constante com intensidade P, ou seja, $N_x(x) = P$. Da mesma maneira, a tensão $\sigma_{xx}(x) = \sigma_{xx}$ também será constante e a partir da expressão (4.10), tem-se que

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A}.\tag{4.22}$$

Além disso, a barra apresentará um alongamento δ dado pela diferença entre os comprimentos final L' e inicial L da barra, isto é,

$$\delta = L' - L. \tag{4.23}$$

Como a força normal e a tensão são constantes em todas as seções, a deformação específica $\varepsilon_{xx}(x) = \varepsilon_{xx}$ também é constante, sendo dada pelo alongamento δ dividido pelo comperimento inicial L. Portanto,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta}{L}.\tag{4.24}$$

Na Figura 4.12(b) tem-se a mesma barra submetida agora a uma força de compressão P. Pela convenção adotada, cargas de compressão são negativas. A força normal N_x , a tensão normal de compressão σ_{xx} , o encurtamento δ e a deformação longitudinal ε_{xx} são dados respectivamente por

$$N_x(x) = -P, \qquad \sigma_{xx} = -\frac{P}{A}, \qquad \delta = L' - L, \qquad \varepsilon_{xx} = \frac{\delta}{L}$$
 (4.25)



Figura 4.12: Barra submetida a uma força axial P na extremidade.

Observa-se que o encurtamento δ é negativo, pois o comprimento final L'é menor que o comprimento inicial L. Portanto, a deformação ε_{xx} , assim como a tensão σ_{xx} , será negativa.

Tomando-se a barra da Figura 4.12, sabe-se intuitivamente que se a mesma for feita de aço, os níveis de deformação e tensão serão inferiores quando comparado com uma barra de alumínio. Assim, cada material possui uma resistência mecânica distinta. Esta resistência é dada por algumas propriedades do material, as quais são determinadas experimentalmente. O tipo de ensaio a ser realizado é indicado pela equação constitutiva do material. Esta equação representa o comportamento de um material idealizado e estabelece, em geral, uma relação entre tensão e deformação. Um exemplo de equação constitutiva é a Lei de Hooke válida para materiais elásticos lineares isotrópicos. A denominação elástico significa que o material se deforma sob ação de forças, mas retorna a sua forma inicial quando se retiram as forças. Linear significa que há uma relação linear ou proporcional entre tensão e deformação. Isotrópico indica que as propriedades do material são as mesmas para qualquer direção que seja considerada. A Lei de Hooke é empregada para materiais metálicos à temperatura ambiente.

Os ensaios de tração e compressão são usados para caracterizar as propriedades de um material que seguem o comportamento dado pela Lei de Hooke. Para isso, toma-se um corpo de provas cilíndrico com dimensões padronizadas (ver Figura 4.13(a)). Submete-se o corpo de prova a uma máquina de testes ilustrada na Figura 4.13(b), a qual aplica paulatinamente cargas axiais concentradas P nas extremidades do corpo de prova . Para cada valor de P, mede-se a distância L' entre dois pontos originalmente à distância L, determinando-se o alongamento ou encurtamento $\delta = L' - L$. Com estas medições, calculam-se a tensão $\sigma_{xx} = \frac{P}{A}$ e a deformação $\varepsilon_{xx} = \frac{\delta}{L}$, levantando-se um gráfico do tipo $\sigma_{xx} \times \varepsilon_{xx}$, denominado diagrama tensão deformação. Pode-se medir também a variação $\Delta d = d' - d$ no diâmetro do corpo de prova, permitindo caracterizar a deformação na seção transversal como será visto adiante.

A forma do diagrama tensão-deformação varia sensivelmente para diferentes materiais. Para um mesmo material, verificam-se resultados diferentes para os ensaios tomando-se diferentes temperaturas do corpo de prova e a velocidade com que o carregamento é aplicado. As características comuns encontradas em diagramas de ensaio de tração e compressão permitem identificar duas importantes classes de materiais, ou seja, os materiais dúteis e frágeis.

A principal característica dos materiais dúteis, obtida a partir do diagrama tensão-deformação, é apresentar escoamento à temperatura ambiente. Materiais como aço, alumínio e cobre são classificados como dúteis. A Figura 4.14 ilustra diagramas típicos para o aço e alumínio.



Figura 4.13: Corpo de prova e máquina de teste para ensaio de tração/compressão.



Figura 4.14: Diagramas de ensaio de tração/compressão.

Observa-se que existe um trecho onde a relação tensão-deformação é linear, ou seja, ao se aplicar carregamentos P crescentes, o comprimento L' da barra aumenta proporcionalmente ao carregamento aplicado. Desta maneira, o trecho inicial do diagrama é uma reta com um grande coeficiente angular. Esta linearidade continua até se atingir o valor da tensão normal limite de proporcionalidade denotada como σ_{lim} . Valores de tensão no intervalo $0 \leq \sigma_{xx} \leq \sigma_{\text{lim}}$ caracterizam a fase elástica do material, ou seja, o material se comporta elasticamente. Isto siginifica que ao se deixar de aplicar a carga P, o corpo de prova volta a sua forma inicial. Em geral, deseja-se dimensionar os componentes mecânicos de tal forma que os mesmos permaneçam na fase elástica, ou seja, a tensão máxima σ_{xx}^{max} deve estar no intervalo $0 \leq \sigma_{xx} \leq \sigma_{\text{lim}}$.

Para valores acima de σ_{lim} , o corpo de prova começa a escoar, ou seja, apresenta uma grande deformação com um pequeno aumento da carga aplicada. Em materiais dúteis, esta deformação é causada por um deslizamento relativo de camadas de material segundo superfícies oblíquas. Nesta fase do diagrama, o corpo de prova apresenta uma deformação permanente, o seja, ao se retirar a carga P, o corpo de prova retorna a um estado de tensão nula por linha CD paralela a AB conforme ilustrado na Figura 4.15. A partir dos diagramas da Figura 4.14, observa-se que o alongamento do material na fase de escoamento é sensivelmente maior que o alongamento verificado na fase elástica. Este alongamento maior durante escoamento, permite identificar para alguns materiais um valor de tensão praticamente constante no diagrama (ver Figura 4.14(a)). Denomina-se este valor como tensão normal de escoamento do material e denota-se a mesma σ_{esc} .



Figura 4.15: Fases num diagrama de ensaio de tração e compressão.

A partir da tensão de escoamento, verifica-se uma fase de recuperação do material, a qual é caracterizada por um enrigecimento do material causado por um rearranjamento das partículas do material, fazendo com que a sua resistência aumente e consequentemente exigindo valores de carregamento maiores para se deformar o corpo de prova. A tensão máxima atingida nesta fase é denominada tensão normal última e denotada por σ_{ult} . Após alcançar este valor máximo, verifica-se uma estricção do material, ou seja, o diâmetro do corpo de prova começa a diminuir devido a perda de resistência. Assim, uma carga mais baixa é suficiente para manter o corpo de prova se deformando até atingir a sua ruptura. O valor de tensão onde a ruptura ocorre é denominada tensão normal de ruptura e indicado como σ_{rup} . A ruptura ocorre segundo uma superfície de aproximadamente 45 graus com a superfície inicial do corpo de prova. Este fato comprova que a ruptura dos materiais dúcteis ocorre devido ao efeito de atrito entre as seções transversais o que caracteriza as tensões de cisalhamento. Portanto, com a carga axial as maiores tensões de cisalhamento ocorrem em planos que forma um ângulo de 45 graus com a carga. Este fato será discutido em mais detalhes posteriormente.

Observando a Figura 4.14(b), verifica-se que para alguns materiais, torna-se difícil determinar a tensão σ_{lim} que caracteriza a fase elástica. Assim, por questões de segurança define-se a tensão normal admissível

do material $\bar{\sigma}$ dada a partir da tensão de escoamento $\sigma_{\rm esc}$ e de um coeficiente de segurança k pela seguinte equação

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\rm esc}}{k}.\tag{4.26}$$

Assim, a fase elástica passa a ser caracterizada por valores de tensão no intervalo $0 \le \sigma_{xx} \le \bar{\sigma}$.

Materiais como o ferro fundido, vidro e rocha são classificados como frágeis e caracterizam-se por uma ruptura do corpo de prova sem nenhuma mudança sensível no modo de deformação do material. Logo, não existe diferença entre as tensões última e de ruptura. Além disso, num ensaio de tração, não se observa a estricção do corpo de prova e a ruptura acontece numa superfície perpendicular a linha de ação do carregamento axial. A partir daí, conclui-se que a ruptura num material frágil se deve principalmente à presença de tensões normais. A Figura 4.16 ilustra o diagrama de ensaio de tração para um material frágil. Observa-se ainda que a magnitude da deformação é muito menor nos materiais frágeis que nos dúteis.



Figura 4.16: Diagrama de ensaio típico para material frágil.

A partir do coeficiente angular θ da reta da fase linear do diagrama de ensaio de um material dútil ou frágil, define-se uma propriedade do material denominada *Módulo de Elasticidade Longitudinal* ou *Módulo de Young*, o qual é denotado pela letra *E*. Logo, a equação da reta que define a fase elástica é dada por

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}.\tag{4.27}$$

Esta equação é denominada Lei de Hooke para o caso de tração e compressão.

Substituindo (4.22) em (4.24) na expressão anterior vem que

$$P = \frac{EA}{L}\delta.$$
(4.28)

O termo $\frac{EA}{L}$ é denominado rigidez do elemento de barra. Observe que uma barra de material elástico linear comporta-se como uma mola. Lembre-se que para uma mola de constante elástica k_e , a força F na mola e o alongamento x, estão relacionados por $F = k_e x$. No caso da barra, tem-se F = P, $k_e = \frac{EA}{L}$ e $x = \delta$.

O módulo de elasticidade da uma idéia da resistência do material na fase linear elástica, ou seja, da sua capacidade de resistir à deformações quando submetido a carregamentos. Como ε_{xx} é uma quantidade

adimensional, as unidades de E são as mesmas da tensão σ_{xx} tais como N/m^2 e Kgf/cm^2 . Denomina-se N/m^2 como Pascal (Pa). Lembre-se ainda a seguinte relação para conversão de unidades

$$1\frac{Kgf}{cm^2} = \frac{10}{10^{-4}}\frac{N}{m^2} = 10^5 \frac{N}{m^2} = 10^5 Pa = 0, 1MPa.$$
(4.29)

Valores típicos do módulo de elasticidade são dados por: aço $(E = 21 \times 10^5 Kgf/cm^2 = 21 \times 10^{10} N/m^2 = 210 GPa)$, alumínio $(E = 7 \times 10^5 Kgf/cm^2 = 7 \times 10^{10} N/m^2 = 70 GPa)$ e $(E = 11 \times 10^5 Kgf/cm^2 = 11 \times 10^{10} N/m^2 = 110 GPa)$.

Observa-se um mesmo comportamento no diagrama de ensaio para um material dútil submetido a uma força de tração ou compressão. Logo, as tensões admissíveis de tração ($\bar{\sigma}_t$) e compressão ($\bar{\sigma}_c$) são iguais. Para materiais frágeis, observa-se uma maior resistência à compressão do que a tração, implicando que $\bar{\sigma}_t < \bar{\sigma}_c$. Observa-se que os valores das tensões admissíveis ($\bar{\sigma}_t, \bar{\sigma}_c$), de escoamento σ_{esc} , de ruptura σ_{rup} e última σ_{ult} encontram-se tabeladas para vários materiais. Estes valores de tensão podem ser aumentados através da adição de ligas metálicas ao material, tratamento térmico e processo de material como ilustrado na Figura 4.17. No entanto, o módulo de elasticidade permanece o mesmo.



Figura 4.17: Comportamento do ensaio de tração para diferente aços.

4.1.8 Coeficiente de Poisson

A partir do diagrama de ensaio de tração, observa-se que devido ao alongamento δ da barra, ocorre uma diminuição da seção transversal. Analogamente, num ensaio de tração, tem-se um encurtamento δ da barra e um consequente aumento das dimensões da seção transversal. Deseja-se então caracterizar esta deformação transversal na barra.

Para isso, considere a barra de seção retangular da Figura 4.18 submetida a uma força de tração *P*. Devido a esta força, tem-se uma deformação específica transversal ε_{xx} dada por (4.24). Na seção transversal, tem-se também duas componentes de deformação específica ε_{yy} e ε_{zz} nas direções $y \in z$, devido às variações nas dimensões $a \in b$ para $a' \in b'$, respectivamente. Estas componentes de deformação transversal são obtidas de forma análoga a ε_{xx} em (4.24), ou seja, tomam-se as variações $\Delta a = a' - a \in \Delta a = b' - b$ divididas por pelas dimensões iniciais $a \in b$, ou seja,

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{a'-a}{a} \quad e \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b'-b}{b}.$$
(4.30)

Verifica-se experimentalmente que todas as dimensões da seção transversal sofrem a mesma deformação específica transversal ε_t , ou seja,

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_t.$$



Figura 4.18: Deformação transversal numa barra.

Além disso, verifica-se que ε_t é proporcional à deformação específica longitudinal ε_{xx} , ou seja,

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx},\tag{4.31}$$

sendo ν uma constante característica do material chamado *Coeficiente de Poisson*. O sinal – é introduzido apenas para representar o fenônemo físico. Quando a barra é tracionada, a deformação longitudinal ε_{xx} é positiva, enquanto ε_t é negativa pois as dimensões da seção diminuem. No caso de compressão, tem-se ε_{xx} negativo e ε_t positivo.

Supondo que a barra possui seção circular com diâmetro inicial d, as deformações ϵ_{yy} e ϵ_{zz} são iguais. Sendo Δd a variação no diâmetro após a deformação e empregando (4.31) vem que

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \frac{\Delta d}{d} = -\nu \varepsilon_{xx}.$$
(4.32)

Substituindo (4.24) e (4.28) na relação anterior, obtém-se

$$\Delta d = -\nu \frac{Pd}{AE}.$$

O coeficiente de Poisson é determinado a partir do ensaio de tração ou compressão medindo-se as dimensões da seção transversal. Um comportamento típico está ilustrado na Figura 4.19. Observa-se que na fase elástica, o coeficiente permanece constante. Posteriormente, durante o escoamento, o valor do coeficiente de Poisson aumenta até atingir um valor assintótico. Para os aços em geral, tem-se $\nu = 0, 3$ e para o alumínio $\nu = 0, 27$.

4.1.9 Lei de Hooke para Barras

Como mencinado anteriormente, a lei de Hooke é uma equação constitutiva válida para materiais elásticos lineares isotrópicos. No caso de barra em tração/compressão para um material segundo a lei de Hooke, tem-se uma componente de tensão normal σ_{xx} e 3 componentes de deformação de deformação longitudinal $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$, as quais estão relacionadas pelo módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν a partir das expressões (4.27) e (4.31), ou seja,

$$\sigma_{xx}(x) = E\epsilon_{xx}(x) \to \epsilon_{xx}(x) = \frac{\sigma_{xx}(x)}{E}, \qquad (4.33)$$

$$\varepsilon_{yy}(x) = -\nu \varepsilon_{xx}(x) \to \epsilon_{yy}(x) = -\nu \frac{\sigma_{xx}(x)}{E},$$
(4.34)

$$\varepsilon_{zz}(x) = -\nu \varepsilon_{xx}(x) \to \epsilon_{zz}(x) = -\nu \frac{\sigma_{xx}(x)}{E}.$$



Figura 4.19: Comportamento do coeficiente de Poisson no ensaio de tração.

Observa-se que na barra tem-se um estado uniaxial de tensão descrito pela tensão normal $\sigma_{xx}(x)$. Este estado é independente do comportamento do material. Ao se introduzir a hipótese de material elástico através da lei de Hooke, chega-se a um estado de deformação com 3 componentes longitudinais dadas por ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} .

4.1.10 Aplicação da Equação Constitutiva ao Problema de Barra

Como mencionado no final da Seção 4.1.6, considerou-se inicialmente apenas os 6 primeiros passos da formulação variacional dada na Seção 3.1, pois o comportamento do material ainda não havia sido definido. Após introduzir a lei de Hooke, pretrende-se aplicá-la para o problema de barra, efetuando o último passo da formulação.

Pode-se substituir $\sigma_{xx}(x)$ dado em (4.33) na expressão da força norma (4.10), obtendo-se

$$N_x(x) = E(x)A(x)\varepsilon_{xx}(x). \tag{4.35}$$

Lembrando a equação (4.35) para $\varepsilon_{xx}(x)$ vem que

$$N_x(x) = E(x)A(x)\frac{du(x)}{dx}$$
(4.36)

Procurando generalizar a formulação, assumiu-se também que o módulo de elasticidade pode variar em função de x, ou seja, E = E(x), como no caso de uma barra constituída de partes por materiais distintos.

Substituindo a relação (4.36) na equação diferencial de equilíbrio (4.18), tem-se a equação diferencial em termos do deslocamento axial u(x)

$$\frac{d}{dx}\left(E(x)A(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + p(x) = 0 \qquad \text{em } x \in (0,L) \ .$$

$$(4.37)$$

Para o caso onde o módulo de elasticidade e a área da seção são constantes, obtém-se

$$EA\frac{d^2u(x)}{dx^2} + p(x) = 0 \qquad \text{em } x \in (0, L)$$
 (4.38)

Logo, observa-se que para o caso de material elástico linear isotrópico, obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem, a qual deve ser integrada duas vezes para se obter o deslocamento axial u(x)na barra. A primeira integração fornece a força normal $N_x(x) = E(x)A(x)$. Observa-se que as condições de contorno agora podem ser dadas tanto em termos de forças axiais como pelos vinculações presentes nas extremidades da barra, como ilustrado na Figura 4.20. Por sua vez, estas restrições serão incluídas na definição do espaço de ações admissíveis $Kin_{\mathbf{v}}$.



Figura 4.20: Condições de contorno em termos de deslocamento numa barra.

4.1.11 Verificação e Dimensionamento de Barras

Em geral, deseja-se dimensionar os componentes mecânicos de tal forma que os mesmos permaneçam na fase elástica. Isto implica que sob a ação de esforços externos, o componente irá se deformar, mas voltará a sua forma inicial tão logo o carregamento seja retirado. Por dimensionar uma estrutura, entenda-se determinar as dimensões que permitem caracterizar o seu comportamento mecânico.

Para o caso de barra, o comprimento é determinado por restrições construtivas. Assi, dimensionar a barra significa calcular a dimensão mínima da área da seção transversal de tal forma que a barra permença na fase elástica. O dimensionamento considerado aqui será baseado no valor máximo da tensão ao longo da barra. Para barras submetidas a forças axiais de compressão, torna-se necessário verificar o efeito de flambagem, o qual será tratado posteriormente.

No dimensionamento à tensão máxima, consideram-se os seguintes passos:

- 1. determina-se a função e o respectivo diagrama da força normal $N_x(x)$.
- 2. com base neste diagrama, determina-se a seção mais solicitada, ou seja, a seção onde atua o maior valor da força normal em módulo, sendo este valor denotado N_x^{\max} .
- 3. aplicando-se a expressão (4.10), tem-se que a tensão máxima $\sigma_{xx}^{\rm max}$ é dada por

$$\sigma_{xx}^{\max} = \frac{N_x^{\max}}{A}.$$
(4.39)

4. para que a barra permaneça na fase elástica, tem-se que a tensão máxima deve ser inferior a tensão normal admissível de tração $\bar{\sigma}_t$ para barras em tração e inferior à tensão normal admissível de compressão $\bar{\sigma}_c$ para barras em compressão, ou seja,

$$\sigma_{xx}^{\max} = \frac{N_x^{\max}}{A} \le \bar{\sigma}_t \qquad \text{ou} \qquad \sigma_{xx}^{\max} = \frac{N_x^{\max}}{A} \le \bar{\sigma}_c \quad . \tag{4.40}$$

5. a área mínima A para que a barra permaneça na fase elástica é obtida tomando-se a igualdade na expressão anterior, isto é,

$$A = \frac{N_x^{\max}}{\bar{\sigma}_t} \quad \text{ou} \quad A = \frac{N_x^{\max}}{\bar{\sigma}_c} \ . \tag{4.41}$$

Conhecida á área da seção transversal, pode-se determinar as suas dimensões. Por exemplo, para uma barra circular de diâmetro d, a sua área é dada por $A = \frac{\pi d^2}{4}$. A partir da expressão anterior, determina-se d

$$d = \sqrt{\frac{4N_x^{\max}}{\pi\bar{\sigma}_t}} \quad \text{ou} \quad d = \sqrt{\frac{4N_x^{\max}}{\pi\bar{\sigma}_c}} .$$
(4.42)

No caso de verificação de uma barra, conhece-se as dimensões da seção transversal e deseja-se verificar se a mesma permanece na fase elástica quando submetida a um certo carregamento. Para isto calcula-se a tensão normal máxima σ_{xx}^{max} usando (4.39). Com esta tensão máxima, basta verificar se a mesma é menor $\bar{\sigma}_t$ que para barra em tração. Para barra em compressão, compara-se com a tensão $\bar{\sigma}_c$. Resumindo, deve-se verificar que

$$\sigma_{xx}^{\max} = \leq \bar{\sigma}_t \quad \text{ou} \quad \sigma_{xx}^{\max} \leq \bar{\sigma}_c . \tag{4.43}$$

Neste caso, diz-se que a barra permanece na fase elástica. Caso uma das duas condições inferiores não seja válida, deve-se redimensionar a barra.

4.1.12 Barras Submetida a Variação de Temperatura

Considere uma barra de comprimento L submetida a uma variação de temperatura ΔT positiva. Verificase então um alongamento da barra e o comprimento final L' é dado por

$$L' = L(1 + \alpha \Delta T), \tag{4.44}$$

sendo α o coeficiente de dilatação térmica do material. A expressão anterior pode ser reescrita como

$$\frac{L'-L}{L} = \alpha \Delta T.$$

O termo do lado direito, representa o alongamento $\delta = L' - L$ da barra dividido pelo comprimento inicial L, ou seja, tem-se uma deformação específica térmica denotada como ε_T . Logo

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T.$$
 (4.45)

Portanto, devido a uma variação de temperatura a barra sofre uma deformação longitudinal. Caso esta barra esteja submetida a ação de forças que causam uma deformação ε_{xx} , a deformação total ε é a soma das duas deformações, isto é,

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_T. \tag{4.46}$$



Figura 4.21: Exercício resolvido 4.1.

4.2 Exercícios Resolvidos

Exercício 4.1 Considere a barra com o carregamento ilustrada na Figura 4.21. Pede-se traçar os diagramas da força normal, dos deslocamentos, deformações e tensões axiais.

- 1. Equação do carregamento: $q(x) = q_0 < x 0 >^0 -F_2 < x 1 >^{-1} +F_3 < x 2 >^{-1}$
- 2. Condições de contorno: $N_x(x=0) = -F_1 = -100N$ u(x=3) = 0
- 3. Integração da equação diferencial

$$E(x)A(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -q(x) = -q_0 < x - 0 >^0 + F_2 < x - 1 >^{-1} - F_3 < x - 2 >^{-1}$$

- 1^a integração: força normal $N_x(x) = EA\frac{du(x)}{dx} = -q_0 < x - 0 >^1 + F_2 < x - 1 >^0 - F_3 < x - 2 >^0 + C_1$
- 2^a integração: deslocamento axial $EAu(x) = -\frac{q_0}{2} < x - 0 >^2 + F_2 < x - 1 >^1 - F_3 < x - 2 >^1 + C_1 x + C_2$
- 4. Determinação das constantes de integração

$$N_x(x=0) = 0 + 0 - 0 + C_1 = -F_1 \to C_1 = -F_1$$
$$u(x=3) = -\frac{q_0}{2}(3)^2 + F_2(3-1) - F_3(3-2) - 100(3) + C_2 = 0 \to C_2 = 250$$

- 5. Equações finais
 - força normal: $N_x(x) = -q_0 x + F_2 < x 1 >^0 F_3 < x 2 >^0 F_1$
 - deslocamento: $u(x) = \frac{1}{EA}(-50x^2 + 350 < x 1 > 1 200 < x 2 > 1 100x + 250)$
- 6. Diagrama da força normal

$$N_x(x \to 0^+) = -100N \quad N_x(x \to 1^-) = -200N$$

$$N_x(x \to 1^+) = 150N \quad N_x(x \to 2^-) = 50N$$

$$N_x(x \to 2^+) = -150N \quad N_x(x \to 3^-) = -250N$$



7. Reação de apoio $R_{A_x} = N_x(x=3) = -100(3) + 350 - 200 - 100 = -250N$

- 8. Deslocamento, deformação e tensão: neste caso, toma-se $A = 10^{-4}m^2$ e E = 100GPa
- trecho 0 < x < 1

$$\begin{split} u(x) &= \frac{1}{EA} (-50x^2 - 100x + 250) \rightarrow \begin{cases} u(x \to 0^+) &= 2, 5 \times 10^{-5} \\ u(x \to 1^-) &= 1, 0 \times 10^{-5} \end{cases} \\ \varepsilon_{xx}(x) &= \frac{du(x)}{dx} = 50 \times 10^{-7} (-2x - 2) = -10^{-5} (x + 1) \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx}(x \to 0^+) &= -10^{-5} \\ \varepsilon_{xx}(x \to 1^-) &= -2 \times 10^{-5} \end{cases} \\ \sigma_{xx}(x \to 0^+) &= -1MPa \\ \sigma_{xx}(x \to 1^-) &= -2MPa \end{cases}$$

• trecho 1 < x < 2

- $u(x) = \frac{1}{EA}(-50x^2 + 350(x-1) 100x + 250) \rightarrow \begin{cases} u(x \to 1^+) = 1, 0 \times 10^{-5} \\ u(x \to 2^-) = 2, 0 \times 10^{-5} \end{cases}$ $\varepsilon_{xx}(x) = \frac{du(x)}{dx} = 50 \times 10^{-7}(-2x+5) \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx}(x \to 1^+) = 1, 5 \times 10^{-5} \\ \varepsilon_{xx}(x \to 2^-) = 0, 5 \times 10^{-5} \end{cases}$ $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -10^6(x+1) \rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx}(x \to 1^+) = 1, 5MPa \\ \sigma_{xx}(x \to 2^-) = 0, 5MPa \end{cases}$
- trecho 2 < x < 3 $u(x) = \frac{1}{EA}(-50x^{2} + 350(x - 1) - 200(x - 2) - 100x + 250) = 50 \times 10^{-7}(-x^{2} + x + 6)$ $u(x) = \begin{cases} u(x \to 2^{+}) = 2, 0 \times 10^{-5} \\ u(x \to 3^{-}) = 0 \end{cases}$ $\varepsilon_{xx}(x) = \frac{du(x)}{dx} = 50 \times 10^{-7}(-2x + 5) \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx}(x \to 2^{+}) = -1, 5 \times 10^{-5} \\ \varepsilon_{xx}(x \to 3^{-}) = -2, 5 \times 10^{-5} \end{cases}$ $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -10^{6}(x + 1) \rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx}(x \to 2^{+}) = 1, 5MPa \\ \sigma_{xx}(x \to 3^{-}) = 2, 5MPa \end{cases}$



A seguir ilustram-se os gráficos dos deslocamentos e deformação ao longo da barra.

Exercício 4.2 As Figuras 4.22(a) e 4.22(b) ilustram barras com uma extremidade fixa e apoiada sobre uma mola (fundação flexível) e com uma folga Δu . Deseja-se determinar a expressão para a força normal e deslocamento axial em ambos os casos.



Figura 4.22: Exercício resolvido 4.2.

- Barra apoiada sobre mola
 - 1. Equação de carregamento: q(x) = 0
 - 2. Condições de contorno: $u_1(x=0) = 0$ $N_x(x=L) = -ku_1(L)$
 - 3. Integração da equação diferencial: $EA\frac{d^2u_1(x)}{dx} = -q(x) = 0$
 - $\begin{array}{l} \ 1^{a} \ integração: \ força \ normal \\ N_{x} = EA \frac{du_{1}(x)}{dx} = C_{1} \\ \ 2^{a} \ integração: \ deslocamento \ axial \\ EAu(x) = C_{1}x + C_{2} \end{array}$

- 4. Determinação das constantes de integração $u(x = 0) = C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$ $N_x(x = L) = C_1 = -ku_1(L)$
- 5. Equações finais

- força normal:
$$N_x(x) = -ku_1(L)$$

- deslocamento axial: $u_1(x) = \frac{1}{EA}(-ku_1(L)x) = \frac{-ku_1(L)}{EA}x$

- Barra com folga Δu
 - 1. Equação de carregamento: q(x) = 0
 - 2. Condições de contorno: $u_1(x=0) = 0$ $u_1(x=L) = \Delta u_L$
 - 3. Integração da equação diferencial: $EA\frac{d^2u_1(x)}{dx} = -q(x) = 0$
 - 1^a integração: força normal $N_x = EA \frac{du_1(x)}{dx} = C_1$ - 2^a integração: deslocamento axial $EAu(x) = C_1 x + C_2$
 - 4. Determinação das constantes de integração $u_1(x=0) = C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$$u_1(x=0) = C_1(0) + C_2 = 0 \quad \forall \ C_2 = 0$$
$$u_1(x=L) = C_1L + 0 = \Delta u_L \to C_1 = \frac{\Delta u_L}{L}$$

5. Equações finais

- força normal:
$$N_x(x) = \frac{\Delta u_L}{L}$$

- deslocamento axial: $u_1(x) = \frac{1}{EA} \frac{\Delta u_L}{L} x = \frac{\Delta u_L}{EAL} x$

_	_
	_
	_
_	_

Exercício 4.3 Determine as forças normais (N_1, N_2) atuando em cada parte da coluna bi-engastada ilustrada na Figura 4.23 e sujeita a uma força F = 1kN. As seções transversais das barras são circulares com diâmetros $d_1 = 50mm \ e \ d_2 = 125mm$. Dados: $L_1 = 300mm$; $L_2 = 400mm$; $E_1 = 1, 5E_2$.



Figura 4.23: Exercício resolvido 4.3.

Para a solução deste problema, considera-se a os trechos $AB \ e \ BC$ da barra, assim como o equilíbrio da interface entre os dois trechos, como ilustrado respectivamente nas Figuras 4.24(a), $4.24(b) \ e \ 4.24(c)$.



Figura 4.24: Exercício resolvido 4.3: esforços nas seções.

Barra 1 ($0 < x < L_1$): neste caso tem-se como incógnitas as constantes de integração C_1, C_2 , assim como a força normal N_1 interface dos dois trechos.

- Equação diferencial: $E_1 A_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} = 0$
- Condições de contorno

$$u_1(x=0) = 0$$
 $N_{x1}(x=L_1) = N_1$

- primeira integração: força normal
 - $N_{x1} = C_1$
- segunda integração: deslocamento axial

$$E_1 A_1 u_1 = C_1 x + C_2$$

• Determinação de C_1 e C_2

$$N_{x1}(x = L_1) = C_1 = N_1 \rightarrow C_1 = N_1$$

$$E_1 A_1 u_1 (x = 0) = C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

- Equações finais
 - força normal: $N_{x1}(x) = N_1$
 - deslocamento axial: $u_1(x) = \frac{N_1}{E_1A_1}x$

Barra 2 $(L_1 < x < L_2)$: neste caso tem-se como incógnitas as constantes de integração D_1, D_2 , assim como a força normal N_2 interface dos dois trechos.

• Equação diferencial: $E_2 A_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} = 0$

• Condições de contorno

$$u_2 (x = L_1 + L_2) = 0$$
 $N_{x2} (x = L_1) = N_2$
- primeira integração: forca normal

– primeira integração: força normal

$$N_{x2} = D_1$$

- segunda integração: deslocamento axial

$$E_2 A_2 u_2 = D_1 x + D_2$$

• $Determinação \ de \ D_1 \ e \ D_2$

$$N_{x2} (x = L_1) = D_1 = N_2$$

$$E_2 A_2 u_2 (x = L_1 + L_2) = D_1 (L_1 + L_2) + D_2 = 0 \rightarrow D_2 = -N_2 (L_1 + L_2)$$

• Equações finais

- força normal:
$$N_{x2}(x) = N_2$$

- deslocamento axial: $u_2(x) = \frac{1}{E_2A_2} \left[N_2 x - N_2 \left(L_1 + L_2 \right) \right]$

Equilíbrio da descontinuidade : considera-se o equilíbrio da força normal presente na interface dos trechos AB e BC, como mostrado na Figura 4.24(b). A condição de equilíbrio é a seguinte:

$$\sum F_x = 0: \quad -N_1 + F + N_2 = 0 \to N_1 - N_2 = F \tag{4.47}$$

Condição de compatibilidade : tem-se que os deslocamentos axiais $u_1 e u_2$ devem ser iguais. Logo,

$$u_1 (x = L_1) = u_2 (x = L_1)$$

Tomando as equações anteriores determinadas para os deslocamentos $u_1 e u_2$, vem que,

$$\frac{N_1}{E_1 A_1} L_1 = \frac{1}{E_2 A_2} \left[N_2 L_1 - N_2 L_1 - N_2 L_2 \right]$$

$$N_1 = -\frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \frac{L_2}{L_1} N_2 = -k N_2$$
(4.48)

Substituindo (4.48) em (4.47) vem que,

$$-kN_2 - N_2 = F \to N_2 (1+k) = -F \to N_2 = -\frac{F}{1+k}$$

Logo,

$$N_1 = -k\left(-\frac{F}{1+k}\right) \to N_1 = \frac{k}{1+k}F$$

Calculando k, tem-se que,

$$k = \frac{E_1}{E_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{L_2}{L_1} = \frac{1,5E_2}{E_2} \frac{\left(\frac{\pi}{4}d_1^2\right)}{\left(\frac{\pi}{4}d_2^2\right)} \frac{L_2}{L_1} = 1,5 \frac{d_1^2}{d_2^2} \frac{L_2}{L_1} \to k = 1,5 \frac{50^2}{125^2} \frac{400}{300} = 0,32$$

Portanto,

$$N_1 = \left(\frac{0,32}{1+0,32}\right) 1 = 0,24KN$$
$$N_2 = -\left(\frac{1}{1+0,32}\right) 1 = -0,76KN$$

Exercício 4.4 Determinar o alongamento de uma barra de 3 m de comprimento cuja secção transversal tem área igual a 3 cm². A barra foi solicitada por uma força de tração de 6 kgf e o módulo de elasticidade do seu material é 2000 t_f/cm^2 ?

 $\begin{array}{l} \partial = ? \\ \ell_0 = 3m = 300 cm \\ A = 3 cm^2 \\ P = 6 kgf \\ E = 2000 t_f / cm^2 = 2x 10^6 kgf / cm^2 \\ \partial = \frac{P \ell_0}{AE} = \frac{6.300}{3.2 x 10^6} = \boxed{3x 10^{-4} cm} \\ \Box \end{array}$

Exercício 4.5 Uma barra prismática de aço tem 60 cm sob a ação de uma força de tração. Determinar essa força sendo o volume da barra 400 cm?

$$\begin{split} \ell_0 &= 60cm\\ \partial &= 0,06cm\\ P = ?\\ V &= 400cm^3\\ E &= 21x10^5 kgf/cm^2\\ \partial &= \frac{P\ell_0}{AE} \rightarrow P = \frac{\partial}{\ell_0}AE \rightarrow P = \frac{\partial}{\ell_0}.\underbrace{V}_{\ell_0}.E \rightarrow P = \underbrace{0,06}_{60}.\underbrace{400}_{60}.21x10^5 \rightarrow \underbrace{P = 14000kgf}_{\Box}\\ \left(\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial}{\ell_0}\right) \end{split}$$

Exercício 4.6 Uma barra cilíndrica tem 2 cm de diâmetro e 1 m de comprimento e está sendo tracionada por uma força axial de 2 toneladas. Determinar para esta barra, o alongamento, a deformação específica de tração nos seguintes casos:

a) barra de aço
$$(E=21 \ x \ 10^5 \ kgf/cm^2)$$

b) barra de alumínio $(E=7 \ x \ 10^9 \ kgf/cm^2)$
c) barra de cobre $(E=11x10^5 \ kgf/cm^2)$
 $d=2cm$
 $\ell_0 = 1m = 100cm$
 $P = 2t_f$
 $\partial = ?$
 $\varepsilon_{xx} = ?$
 $\sigma_{xx} = ?$
 $\sigma_{xx} = ?$
 $\partial = \frac{P\ell_0}{AE}$
 $A = \frac{\pi d^2}{4}$
 $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\ell_0}$
 $\sigma_{xx} = E.\varepsilon_{xx}$
Material $\partial [cm] \quad \varepsilon_{xx} \quad \sigma_{xx} [kgf/cm^2]$
 $aço \quad 0,030 \quad 3,0x10^{-4} \quad 636,6$
 $alumínio \quad 0,090 \quad 9,0x10^{-4} \quad 636,6$

Exercício 4.7 Tem-se uma barra prismática de aço de secção transversal quadrada vazada de 10 cm de comprimento. Submetendo-se esta barra a uma força axial de tração de 16800 kgf, verificou-se um aumento de 5 x 10^{-3} cm no seu comprimento. Pede-se:

a) Determinar a deformação específica de tração apresentada pela barra.

b) Determinar a tensão normal de tração atuante no seu interior

c) Supondo agora a tensão calculada no item anterior. Como a tensão admissível da barra, dimensioná-la. Desde a relação $\frac{a_1}{a_2}=0.8$.

$$a)\varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\ell_0} = \frac{5x10^{-3}}{10} = 5x10^{-4}$$

$$b)\sigma_{xx} = E.\varepsilon_{xx} = 21x10^5.5x10^{-4} = 1050kgf/cm^2$$

$$c)A = \frac{P}{\sigma} = \frac{16800}{1050} = 16cm^2$$

$$A = a_2^2 - a_1^2$$

$$a_2^2 - (0, 8a_2)^2 = 16 \rightarrow a_2 = 6,7cm$$

$$a_1 = 0, 8a_2 \rightarrow a_1 = 5,3cm$$

$$\Box$$

Exercício 4.8 A estrutura de figura é constituída das barras AB e BC articuladas nas extremidades. Dimensionar as barras sendo as tensões normais admissíveis à tração e à compressão 1400 kgf/cm 2 e 750 kgf/cm², respectivamente.

$$\begin{split} &\sum F_x = 0: A_x + C_x = 0 \\ &\sum F_y = 0: Ay - 50 = 0 \to A_y = -50t_f \\ &\sum M_{za} = 0: -50.4 + 3C_x = 0 \to C_x = 66, 7t_f \\ &Como \; A_x + C_x = 0 \to A_x = -66, 7t_f. \end{split}$$

Utilizando o método dos nós, determina-se que $F_{BC} = 66,7t_f$ e $F_{AB} = 83,3t_f$. A tabela abaixo resume o dimensionamento das barras.

barra	força(kgf)	$\overline{\sigma}$	$A = \frac{P}{\bar{\sigma}} \left[cm^2 \right]$
BC	66700	1400	53.3
AC	-83300	-750	35.7

Exercício 4.9 Seja uma barra de comprimento inicial l, secção transversal retangular de dimensões iniciais a e b. Sabe-se que a barra apresenta uma deformação específica longitudinal E e que seu material tem coeficiente de Poisson m. Determinar:

a) Nova área A' de seção transversal
b) O volume V' da barra

$$a)\varepsilon_{T} = \frac{a'-a}{a} = -\mu\varepsilon \rightarrow a' = a(1-\mu\varepsilon)$$

$$\varepsilon_{T} = \frac{b'-b}{b} = -\mu\varepsilon \rightarrow b' = b(1-\mu\varepsilon)$$

$$A' = a'b' = a(1-\mu\varepsilon)b(1-\mu\varepsilon) = ab(1-\mu\varepsilon)^{2}$$

$$A' = A_{0}(1-2\mu\varepsilon + \mu^{2}\varepsilon^{2})$$
Considerando que ε^{2} é muito menor que ε :

$$A' = A_{0}(1-2\mu\varepsilon)$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \varepsilon_{A} = -2\mu\varepsilon \ [deformação \ específica \ da \ área]$$

$$V' = a'b'\ell' = A'\ell'$$

$$\frac{\ell'-\ell}{\ell} = \varepsilon \rightarrow \ell' = \ell(1+\varepsilon)$$

$$V' = V(1-2\mu\varepsilon)\ell(1+\varepsilon)$$

$$V' = V(1-2\mu\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

$$V' = V(1+\varepsilon - 2\mu\varepsilon - 2\mu^{2}\varepsilon^{2})$$
Considerando que ε^{2} é muito menor que ε :

$$V' = V(1+\varepsilon - 2\mu\varepsilon)$$

$$V' = V(1+\varepsilon - 2\mu\varepsilon)$$

$$V' = V + V(\varepsilon - 2\mu\varepsilon)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{V} = \varepsilon - 2\mu\varepsilon \ [deformação \ específica \ volumétrica]$$

Exercício 4.10 Uma barra de aço de secção transversal circular for submetida a ação de uma força axial de tração de 26250 kgf. Dimensionar a barra sabendo-se que a sua deformação específica volumétrica é 0,03%. Dada a relação entre os diâmetros $\frac{d}{D}=0,8$.

$$\begin{split} &P = 26250 kgf \\ &\varepsilon_v = \frac{0.03}{100} \\ &\mu = 0,3 \\ &E = 21 x 10^5 kgf/cm^2 \\ &\frac{d}{D} = 0,8 \\ &\varepsilon_V = \varepsilon.2 \mu \varepsilon \\ &\varepsilon = \frac{0.003}{1.2(0,3)} = 7,5 x 10^{-4} \\ &\overline{\sigma} = E\overline{\varepsilon} = 21 x 10^5.7,5 x 10^{-4} = 1575 kgf/cm^2 \\ &\sigma_{xx} = \frac{P}{A} = \overline{\sigma} \to A = \frac{26250}{1575} = 16,7 cm^2 \\ &A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \\ &A = \frac{\pi}{4} (D^2 - (0,8D)^2) \\ &D = 7,7 cm \\ &d = 0,8D = 6,1 cm \\ \Box \end{split}$$

4.3 Exercícios Propostos