

Capítulo 3

FORMULAÇÃO VARIACIONAL DE PROBLEMAS DE MECÂNICA

3.1 Introdução

Os métodos e os princípios variacionais são importantes tanto na mecânica teórica como aplicada. Isto se deve ao fato que a formulação variacional é a maneira mais natural e rigorosa de denotar as leis que governam o comportamento dos meios contínuos. Além disso, esta abordagem induz, também de maneira natural, o método de solução e sua aproximação, permitindo obter soluções aproximadas muitas vezes de fácil implementação computacional.

O uso de uma formulação variacional permite representar numa única expressão integral todos os elementos relevantes ao problema em estudo tais como equações de equilíbrio, relações constitutivas, condições de contorno e iniciais, dentre outros. Observa-se ainda que as formas locais, geralmente expressas como equações diferenciais, podem ser obtidas diretamente a partir da própria formulação variacional.

De maneira geral, para se formular os problemas de mecânica a partir da abordagem variacional, adotam-se as seguintes etapas ilustradas esquematicamente nas Figuras 3.1 e 3.2.

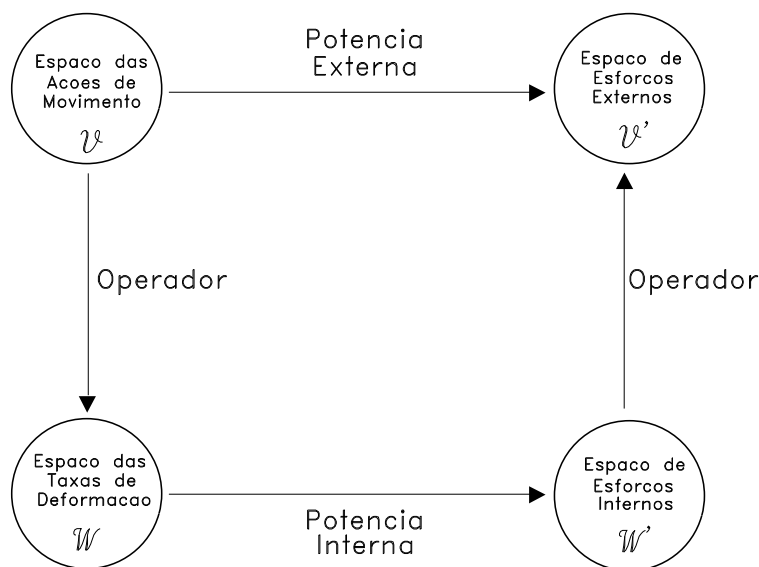


Figura 3.1: Formulação variacional de problemas de mecânica.

1. **Definição das hipóteses cinemáticas:** neste caso, define-se o conjunto de ações de movimento possíveis que o corpo pode estar submetido. Este modelo cinemático constitui o espaço \mathcal{V} das ações de movimento possíveis. Em geral, as ações de movimento devem satisfazer certas restrições cinemáticas representadas pelas condições de contorno impostas ao problema. Dessa forma, determina-se o subconjunto $Kin_{\mathbf{v}}$ de \mathcal{V} das ações de movimento cinematicamente admissíveis, ou seja, as condições possíveis que respeitam os vínculos físicos do problema. As ações de movimento são descritas por campos escalares de deslocamento u ou velocidade v ou campos vetoriais de campos de deslocamento \mathbf{u} ou de velocidade \mathbf{v} .
2. **Componentes de deformação:** a partir da cinemática, obtém-se a deformação compatível com o modelo cinemático adotado. Define-se então o operador \mathcal{D} , o qual é aplicado sobre as ações de movimento para determinar as componentes de deformação. Estas componentes de deformação constituem o espaço \mathcal{W} das taxas de deformação.
3. **Caracterização dos movimentos rígidos:** conhecidas as ações de movimento e as taxas de deformação, obtém-se o subconjunto das ações rígidas de movimento, ou seja, as ações que não causam deformações. Este conjunto será denotado por $\mathcal{N}(\mathcal{D})$.
4. **Expressão para a potência interna:** no caso de corpos deformáveis, utiliza-se o conceito de *potência interna* para se conhecer o estado dos esforços internos. A potência interna relaciona os espaços de taxas de deformação \mathcal{W} e de esforços internos \mathcal{W}' .
5. **Aplicação do Princípio da Potência Virtual (PPV):** com este princípio, relacionam-se as potências interna e externa para uma ação de movimento virtual, determinando uma expressão integral para o problema.
6. **Caracterização dos esforços externos:** a partir do PPV e do conceito de potência externa, relacionam-se os espaços das ações de movimento \mathcal{V} e dos esforços externos \mathcal{V}' . Desta forma, é possível caracterizar os esforços externos presentes no problema considerado. Determinam-se ainda as equações locais, as quais constituem a solução do enunciado integral do problema, caracterizando o operador \mathcal{D}^* e as condições de equilíbrio para as ações rígidas.
7. **Aplicação das equações constitutivas:** tomando-se as equações constitutivas, tem-se uma relação entre tensões e deformações, permitindo obter, no caso de um material elástico, as equações do problema em termos de deslocamentos.

Deve-se observar que com exceção da terminologia usada acima, relacionada principalmente com problemas estruturais, a mesma abordagem variacional pode ser utilizada em diferentes campos da mecânica, tais como em problemas de Mecânica de Fluidos, Transferência de Calor, etc.

Antes de aplicar os passos anteriores para a formulação do problema de barra, apresentam-se as definições dos conceitos de potência externa e interna, além do Princípio das Potências Virtuais. Vários dos conceitos abordados a seguir, tais como deformação, tensão, tensores, dentre outros, serão definidos posteriormente ao longo deste texto.

3.2 Potência Externa

Uma das maiores dificuldades ao longo da história da mecânica foi definir um modelo mecânico-matemático adequado para representar as ações entre corpos. Um esquema empregado com êxito é de representar a ação através de vetores de força ou campos vetoriais de forças, sendo este esquema

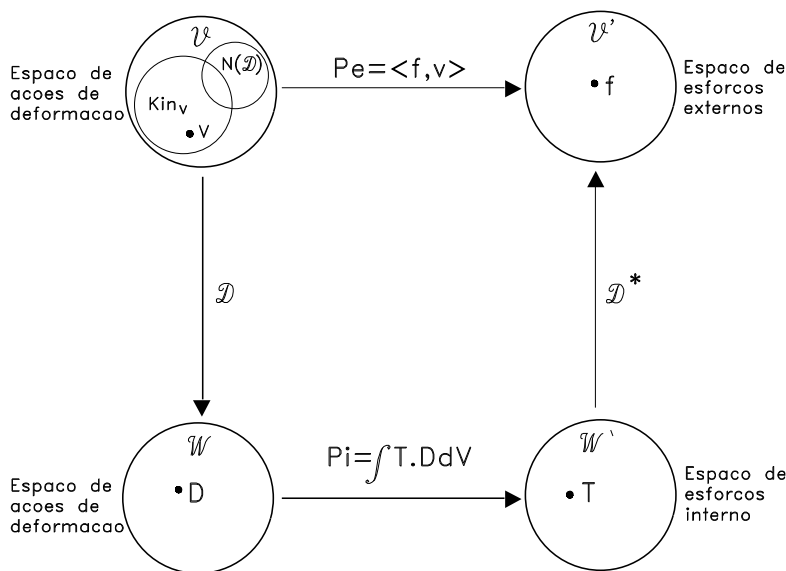


Figura 3.2: Espaços \mathcal{V} , \mathcal{V}' , \mathcal{W} e \mathcal{W}' e as potências externa e interna associadas.

denominado abordagem vetorial ou newtoniana. Desta maneira, o conceito de força surge como um conceito pré-definido, sendo totalmente independente da cinemática adotada para modelar o problema.

No entanto, apesar do inegável êxito desta esquematização, existe uma outra maneira de representar o conceito de ação entre corpos, aparentemente mais abstrata, mas que traduz a experiência concreta diária. Neste caso, a ação ou força que um sistema exerce sobre outro não surge como conceito inicial, mas através de um elemento em dualidade a uma determinada ação de movimento. Esta dualidade é colocada partindo-se do conceito de potência ou trabalho virtuais externos.

Esta segunda abordagem, denominada analítica ou variacional, é tão antiga como a própria mecânica. Observa-se que a partir dos primeiros passos objetivando alcançar uma estrutura matemática precisa para a mecânica, o conceito de potência surgiu como algo básico e fundamental. Neste sentido, destacam-se os trabalhos pioneiros de J. Bernoulli (1717), definitivamente consagrados por D'Alembert. Esta forma de esquematizar as forças atuando sobre um corpo é mais natural expressando uma experiência física muito comum. Por exemplo, como ilustrado no Capítulo 2, para se conhecer o peso de um objeto, levanta-se o mesmo ligeiramente e determina-se o seu peso pela potência ou trabalho realizado para executar esta ação de movimento (ver Figura 2.2). Logo, o efeito é introduzir um movimento *virtual*, retirando o objeto do seu estado de movimento natural em que se encontrava, no caso o repouso.

Conforme visto no Capítulo 2, as ações de movimento de uma partícula são descritas por um vetor velocidade \mathbf{v} (ver Figura 2.2). Através do conceito de potência externa P_e , determinou-se que os esforços externos, compatíveis com a cinemática descrita por \mathbf{v} , são vetores de forças resultantes \mathbf{F} (ver Seção ??). Analogamente, as ações de movimento de corpo rígido são também dadas por vetores velocidade \mathbf{v} segundo equação (?). Os esforços externos são resultantes em termos de força \mathbf{F} e momentos \mathbf{M} (ver Seção ??). Nos casos de partícula e de corpo rígido, a potência externa é dada pelo produto escalar de vetores.

Considere agora a viga da Figura 3.3(a) submetida ao carregamento distribuído uniforme q_0 . Como todos os movimentos de corpo rígido da viga (neste caso, translações em x e y e rotação em z) estão impedidos, devido ao engaste na extremidade $x = 0$, a viga irá se deformar. A Figura 3.3(b) ilustra a viga na sua configuração deformada. Esta configuração é descrita por uma função $v(x)$, a qual fornece a velocidade (taxa de variação do deslocamento) vertical para cada seção transversal x da viga. Logo, neste

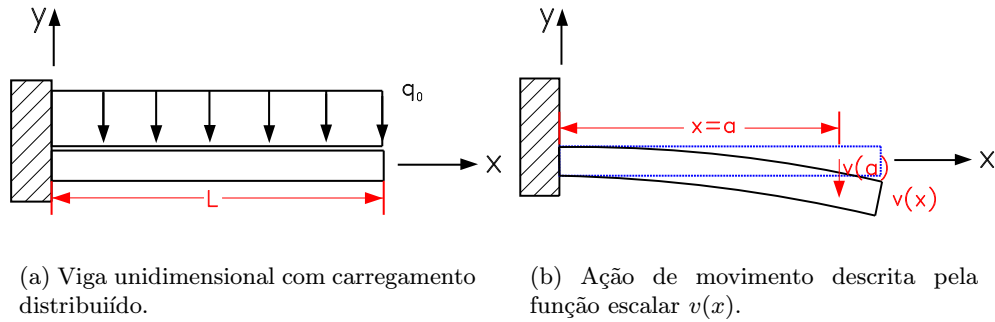


Figura 3.3: Modelo unidimensional de viga.

exemplo, a ação de movimento é descrita por uma função escalar contínua $v(x)$. O fato de ser escalar implica que $v(x)$ fornece um número real para cada valor de x .

Como discutido no Capítulo 2 para os casos de partículas e corpos rígidos, o conceito de potência externa permite associar os esforços externos compatíveis com a cinemática adotada para descrever as ações de movimento. Além disso, a potência externa varia linearmente com ação de movimento (ver Seção 2).

As mesmas propriedades da potência externa já apresentadas no Capítulo 2 são válidas para o caso de corpos deformáveis, como por exemplo a viga ilustrada na Figura 3.3. Entretanto, no caso da viga, a ação de movimento é descrita por uma função contínua $v(x)$. Logo, como a potência externa associa a cinemática adotada com os esforços externos compatíveis, estes esforços devem também ser dados por uma função contínua $q(x)$. Como a potência é um funcional linear das ações de movimento, neste caso a função $v(x)$, a única operação que aplicada ao produto de duas funções $q(x)$ e $v(x)$ resulta num escalar é uma integral ao longo do comprimento L da viga. Portanto, a potência externa no caso da viga é dada por

$$P_e = \int_0^L q(x)v(x)dx. \quad (3.1)$$

Como mencionado no Apêndice B, o produto escalar de vetores é um caso particular do conceito de produto interno aplicado a vetores cartesianos. Tomando-se este conceito geral, é totalmente natural falar do produto interno de funções contínuas como $q(x)$ e $v(x)$. Assim, pode-se dizer que a potência externa P_e dada em (3.1) é o produto interno da função $v(x)$, descrevendo a cinemática de deformação da viga, pela função $q(x)$, representando o carregamento externo compatível com $v(x)$. O resultado da integral em (3.1) é um número escalar correspondente à potência P_e associada à ação de movimento $v(x)$.

Em particular para a viga da Figura 3.3(a), o carregamento aplicado é uma carga distribuída constante q_0 . Logo, $q(x) = q_0$ para todo $x \in (0, L)$, ou seja, para qualquer seção x ao longo do comprimento L da viga. Portanto, a expressão (3.1) se reduz a

$$P_e = \int_0^L q_0 v(x)dx.$$

Fazendo-se uma análise dimensional da expressão (3.1), suponha que a unidade da velocidade $v(x)$ seja $\frac{m}{s}$. Logo, a potência P_e estará dada em $Watts = N\frac{m}{s}$. Portanto, $q(x)$ terá que ser expresso necessariamente em $\frac{N}{m}$, fazendo com que o integrando $q(x)v(x)$ tenha como unidades $\frac{N}{m}\frac{m}{s}$. Após a integral ao longo do comprimento L da viga, obtém-se como unidades $N\frac{m}{s} = Watts$, indicando um

resultado em termos de potência. Assim, $q(x)$ dado em (3.1) representa na verdade uma densidade de força por unidade de comprimento. Esta densidade indica exatamente a carga distribuída conforme será visto ao se formular o problema de viga em flexão. Observa-se que a integral em (3.1) está dada ao longo do comprimento, pois a viga é formulada através um modelo unidimensional, como será visto posteriormente. Da mesma maneira, a ação de movimento é dada por uma função $v(x)$ dependente apenas de x , pois tem-se um modelo unidimensional de viga.

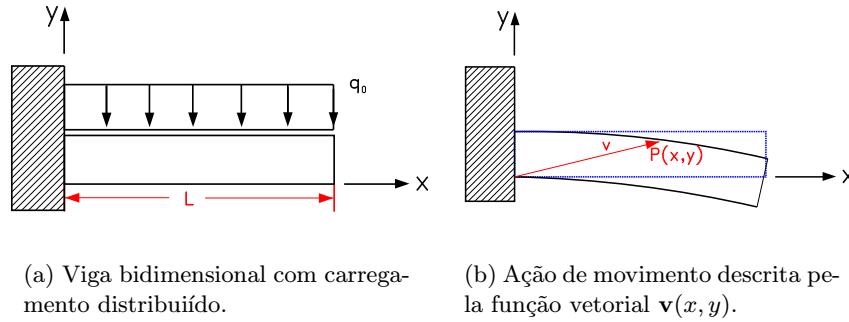


Figura 3.4: Modelo bidimensional de viga.

Pode-se modelar a viga da Figura 3.3 como um problema plano. Empregando-se a hipótese que a variação dos esforços internos ao longo da seção transversal da viga é desprezível, tem-se um problema de estado plano de tensão para a viga, conforme ilustrado na Figura 3.4. Neste caso, a posição de cada ponto P da viga é descrita pelo par de coordenadas cartesianas (x, y) e velocidade por uma função vetorial de duas variáveis $\mathbf{v}(x, y)$. Diz-se que $\mathbf{v}(x, y)$ é uma função vetorial, pois para cada ponto P com coordenadas (x, y) , tem-se um vetor \mathbf{v} com as componentes de velocidade $v_1(x, y)$ e $v_2(x, y)$ ao longo das direções de x e y . Logo, $\mathbf{v}(x, y)$ pode ser denotado vetorialmente como

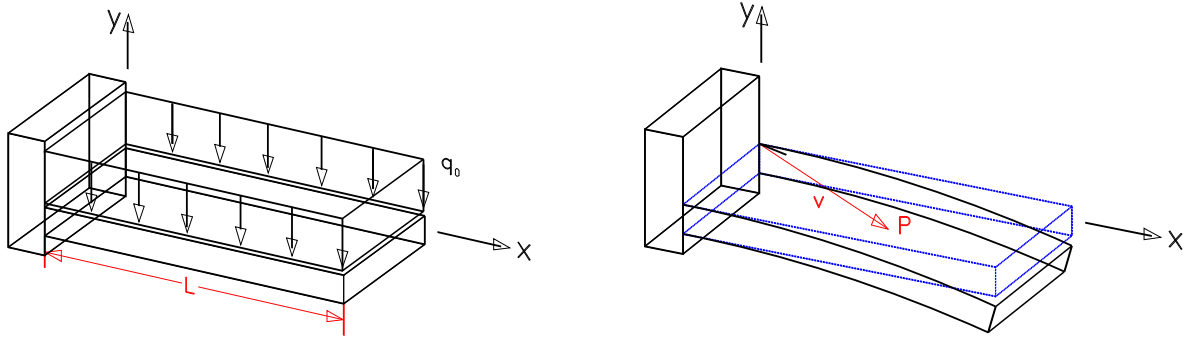
$$\mathbf{v}(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{array} \right\}. \quad (3.2)$$

Neste modelo bidimensional, os esforços externos compatíveis com a cinemática $\mathbf{v}(x, y)$ são forças distribuídas ao longo da superfície da viga e denotadas pela função vetorial $\mathbf{b}(x, y)$. Logo, a potência externa, supondo um espessura constante t da viga, será dada pela seguinte integral ao longo da área A

$$P_e = t \int_A \mathbf{b}(x, y) \mathbf{v}(x, y) dA. \quad (3.3)$$

Observa-se que a carga distribuída $q(x, y)$ ilustrada na Figura 3.4(a) é tratada como uma condição de contorno. O problema de estado plano de tensão será estudado em detalhes posteriormente.

Considere agora a mesma viga das Figuras 3.3 e 3.4, mas tratada como um corpo sólido tridimensional, conforme ilustrado na Figura 3.5(a). Neste modelo, cada ponto P é descrito por suas coordenadas cartesianas (x, y, z) . Consequentemente, a ação de movimento de cada ponto é dada por um vetor velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$. Logo, tem-se uma função vetorial $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$, ou seja, ao substituir as coordenadas (x, y, z) de um ponto, tem-se um vetor \mathbf{v} descrevendo a velocidade do ponto durante a ação de movimento da viga. As componentes de \mathbf{v} nas direções x , y e z são denotadas, respectivamente, por $\mathbf{v}_1(x, y, z)$, $\mathbf{v}_2(x, y, z)$ e $\mathbf{v}_3(x, y, z)$. Ao contrário do modelo unidimensional, onde a cinemática era descrita por uma função escalar $v(x)$, no modelo tridimensional a ação de movimento é dada por uma função vetorial



(a) Viga tridimensional com carregamento distribuído.

(b) Ação de movimento descrita pela função vetorial $\mathbf{v}(x, y, z)$.

Figura 3.5: Modelo tridimensional de viga.

$\mathbf{v}(x, y, z)$. Em termos de componentes, denota-se $\mathbf{v}(x, y, z)$ como

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1(x, y, z) \\ \mathbf{v}_2(x, y, z) \\ \mathbf{v}_3(x, y, z) \end{Bmatrix}. \quad (3.4)$$

De forma análoga ao modelo bidimensional de viga, as forças externas compatíveis com a cinemática $\mathbf{v}(x, y, z)$ são forças distribuídas, não mais ao longo da área ou comprimento da viga, mas sim ao longo de seu volume, pois a viga agora é considerada como um corpo sólido. Estas forças de volume ou de corpo são indicadas por uma função vetorial $\mathbf{b}(x, y, z)$ e possui unidades como N/m^3 , ou seja, indicam uma densidade de forças por unidade de volume. A potência externa P_e será então dada por uma integral ao longo do volume V do corpo, ou seja,

$$P_e = \int_V \mathbf{b}(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) dV. \quad (3.5)$$

Tomando-se os exemplos de partícula, corpo rígido e os modelos uni, bi e tridimensional de viga, observa-se que as ações de movimento podem ser descritas por vetores algébricos \mathbf{v} , funções escalares $v(x)$ e vetoriais $\mathbf{v}(x, y)$ e $\mathbf{v}(x, y, z)$. Logo, a natureza das ações de movimento depende do problema considerado. O conjunto de todas as ações de movimento de um certo problema constitui-se num espaço vetorial (ver definição no Apêndice B) denotado por \mathcal{V} e denominado espaço vetorial das ações de movimento possíveis.

De forma análoga, os esforços externos compatíveis com a cinemática de partícula, corpo rígido e os modelos uni, bi e tridimensionais de viga são dados, respectivamente, por vetores (forças \mathbf{F} e momentos \mathbf{M}), funções escalares (carga distribuída $q(x)$) e funções vetoriais (cargas de corpo $\mathbf{b}(x, y)$ e $\mathbf{b}(x, y, z)$). Novamente, a natureza dos esforços externos depende do problema considerado ou mais especificamente da cinemática adotada para o problema em estudo. O conjunto dos esforços externos compatíveis cinematicamente para um dado problema é o espaço vetorial de esforços externos, denotado por \mathcal{V}' .

Para o caso da viga, observa-se que os esforços externos $q(x)$, $\mathbf{b}(x, y)$ e $\mathbf{b}(x, y, z)$ representam, respectivamente, densidades de força por unidade de comprimento, de área e de volume. Assim, a potência externa P_e pode ser denotada como uma integral de uma densidade de potência p_e ao longo do corpo \mathcal{B}_t

no instante de tempo t

$$P_e = \int_{\mathcal{B}_t} p_e d\mathcal{B}_t. \quad (3.6)$$

Os elementos do espaço \mathcal{V}' devem ser compatíveis com as ações de movimento em \mathcal{V} . Além disso, estes elementos são caracterizados a partir do conceito de potência externa P_e . Desta maneira, diz-se que \mathcal{V}' é o espaço dual de \mathcal{V} . Como explicado na Seção 2.6.1, a potência é um funcional linear dos elementos de \mathcal{V} . Formalmente, \mathcal{V}' é definido como o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos em \mathcal{V} .

Como a natureza dos elementos em \mathcal{V} e \mathcal{V}' depende do problema em estudo, denota-se a potência externa P_e da seguinte forma geral

$$P_e = \langle f, v \rangle, \quad (3.7)$$

sendo $f \in \mathcal{V}'$ o sistema de forças atuando sobre o corpo \mathcal{B}_t no instante de tempo t e $v \in \mathcal{V}$ é ação de movimento. Observa-se que f é caracterizado pela potência externa P_e para cada ação de movimento $v \in \mathcal{V}$.

Finalmente, deve-se mencionar que as ações de movimento satisfazem certas restrições cinemáticas do problema. Por exemplo, na viga da Figura 3.3, tem-se que o deslocamento na direção y e a rotação em z devem ser nulos, ou seja, $v(0) = 0$ e $\frac{dv(0)}{dx} = 0$. Estas ações de movimento pertencem a \mathcal{V} e são denominadas ações de movimentos cinematicamente admissíveis. O conjunto de todas estas ações define o subconjunto $Kin_{\mathcal{V}}$ de \mathcal{V} . Os espaços \mathcal{V} e \mathcal{V}' e o subconjunto $Kin_{\mathcal{V}}$ estão ilustrados na parte superior da Figura 3.2.

3.3 Potência Interna

Como apresentado na seção anterior, devido às ações de movimento de um corpo, tem-se uma potência externa associada, a qual depende apenas destas ações e não da deformação presente no corpo. Portanto, se for realizada uma ação rígida, ou seja, uma ação não produzindo deformação no corpo em análise, nenhuma resposta será obtida sobre o estado interno dado pelas forças de ligações entre as partículas do corpo. Um exemplo deste fato é a correia de um motor dado na Figura 2.3. Deve-se realizar uma ação que deforma a correia para avaliar se a mesma está ou não tensionada. Uma ação de deslocamento rígido não permite avaliar a tensão na correia.

Considerado o modelo unidimensional de viga ilustrado na Figura 3.3, observa-se que devido a ação de movimento $v(x)$, tem-se uma deformação da viga. Pode-se imaginar que a potência externa P_e associada a carga distribuída q_0 e a ação de movimento $v(x)$, foi totalmente consumida para deformar a viga. No entanto, a viga não se deforma indefinidamente, ou seja, a deformação da viga é finita. Logo, ao se aplicar a carga q_0 , a viga se deforma continuamente até atingir uma nova configuração de equilíbrio. Assim, de forma análoga à potência externa P_e , existe uma potência interna P_i no interior da viga, de tal forma que no equilíbrio tem-se a igualdade das potências externa e interna, ou seja, $P_e = P_i$.

Pode-se dizer que a ação de movimento $v(x)$ representa uma cinemática *externa* da viga que juntamente com o carregamento distribuído $q(x)$ resulta numa potência externa. Já a taxa de deformação da viga, denotada por $\dot{\epsilon}_{xx}(x)$, indica a cinemática *interna* da viga. Emprega-se a taxa de deformação, pois tem-se considerado o conceito de potência associado às ações de movimento descritas por velocidades. O conceito de deformação ainda não foi definido, mas será introduzido posteriormente a medida que os vários problemas abordados neste texto forem apresentados. Apesar disto, observa-se que a cinemática $v(x)$ e a taxa de deformação $\dot{\epsilon}_{xx}(x)$ da viga estão relacionadas. Em particular, tem-se que $\dot{\epsilon}_{xx}(x) = -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$. Em geral, as componentes de deformação são obtidas derivando-se as componentes da cinemática do problema.

O ponto central é observar que através do conceito de potência externa, tem-se esforços externos compatíveis com a cinemática adotada. De forma análoga, a potência interna associa à deformação um conjunto de esforços internos compatíveis com a deformação presente no problema em estudo. Além disso, estes esforços internos são compatíveis com a cinemática do problema, pois a deformação é obtida a partir da derivação da ação de movimento. Estes esforços internos permitem caracterizar o estado interno de um corpo e surgem devido as forças de ligação entre as partículas do corpo.

De forma análoga a potência externa, a potência interna é funcional linear da deformação, associando esforços internos compatíveis com a deformação. Tomando-se o exemplo da viga, a deformação é dada por uma função contínua $\dot{\epsilon}_{xx}(x)$. Associada a $\dot{\epsilon}_{xx}(x)$, deve existir uma função contínua $\sigma_{xx}(x)$ representando o estado das forças internas em cada seção x da viga. Lembre-se que no caso da partícula, a magnitude da potência externa é dada pelo produto da normas dos vetores de força resultante \mathbf{F} e de velocidade \mathbf{v} . Para o caso da viga, tem-se infinitos pontos e potência interna será dada, de forma análoga ao caso da partícula, pelo produto da deformação $\dot{\epsilon}_{xx}(x)$ por uma função contínua $\sigma_{xx}(x)$ representando os esforços internos, sendo este produto somado para cada ponto da viga, ou seja, tem-se uma operação de integração. Desta maneira, a potência interna P_i é dada como uma integral ao longo do volume V da viga, isto é,

$$P_i = - \int_V \sigma_{xx}(x) \dot{\epsilon}_{xx}(x) dV, \quad (3.8)$$

onde o sinal $-$ foi introduzido apenas por conveniência ao se aplicar o Princípio das Potências Virtuais (ver a próxima seção).

Fazendo uma análise dimensional da expressão (3.8), a unidade da potência interna P_i é por exemplo $Watts = Nm/s$. Supondo que $v(x)$ está dada em m/s , tem-se $\dot{\epsilon}_{xx}(x) = -y \frac{d^2v(x)}{dx^2}$ em $1/s$. Portanto, se o volume V da viga está dado em m^3 , observa-se que para a integral anterior resultar em $Watts$, a função $\sigma_{xx}(x)$ terá que ser dada necessariamente em N/m^2 . Logo, $\sigma_{xx}(x)$, representando o estado de esforços internos em cada seção x da viga, é na verdade uma densidade de força por unidade de comprimento, sendo por isto denominada tensão. Neste caso em particular, tem-se uma tensão normal atuante na direção x . Logo, observe que o conceito de tensão surgiu a partir da definição de deformação e do fato que a potência interna é um funcional linear das ações de deformação.

Como será visto ao se estudar o problema de viga, a expressão anterior pode ser reescrita como uma integral ao longo do comprimento L da viga, ou seja,

$$P_i = - \int_0^L M_z(x) \frac{d^2v(x)}{dx^2} dx, \quad (3.9)$$

sendo $M_z(x)$ o momento fletor na seção transversal x da viga.

Na expressão anterior, o integrando $p_i = M_z(x) \frac{d^2v(x)}{dx^2}$ representa uma densidade de potência, ou seja, potência interna por unidade de comprimento. Para confirmar este fato, basta verificar as unidades de p_i . Supondo que a ação de movimento $v(x)$ está dada em m/s e o momento fletor em Nm , p_i terá as seguintes unidades

$$[p_i] = [Nm] \left[\frac{m/s}{m^2} \right] = [Nm] \left[\frac{1}{ms} \right] = \left[\frac{1}{m} N \frac{m}{s} \right] = \left[\frac{Watts}{m} \right],$$

ou seja, potência por unidade de comprimento. Analogamente, o integrando $p_i = \sigma_{xx}(x) \dot{\epsilon}_{xx}(x)$ em (3.8) representa uma densidade de potência interna como pode ser visto fazendo uma análise dimensional análoga ao caso anterior.

Considerando agora o modelo bidimensional de viga ilustrado na Figura 3.4, tem-se duas componentes de taxa de deformação longitudinal nas direções x e y , denotadas por $\dot{\epsilon}_{xx}(x, y)$ e $\dot{\epsilon}_{yy}(x, y)$, além de duas

componentes de taxa de deformação angular denotadas por $\dot{\gamma}_{xy}(x, y)$ e $\dot{\gamma}_{yx}(x, y)$. Associadas a estas componentes de deformação, tem-se 4 funções descrevendo o estado de forças interno. Estas funções representam as componentes de tensão normal $\sigma_{xx}(x, y)$ e $\sigma_{yy}(x, y)$ nas direções x e y e tensões de cisalhamento $\tau_{xy}(x, y)$ e $\tau_{yx}(x, y)$, associadas respectivamente a $\dot{\epsilon}_{xx}(x, y)$, $\dot{\epsilon}_{yy}(x, y)$, $\dot{\gamma}_{xy}(x, y)$ e $\dot{\gamma}_{yx}(x, y)$. De forma análoga à equação (3.8), a potência interna para o modelo de estado plano é dada por

$$P_i = - \int_V [\sigma_{xx}(x, y)\dot{\epsilon}_{xx}(x, y) + \sigma_{yy}(x, y)\dot{\epsilon}_{yy}(x, y) + \tau_{xy}(x, y)\dot{\gamma}_{xy}(x, y) + \tau_{yx}(x, y)\dot{\gamma}_{yx}(x, y)] dV. \quad (3.10)$$

O modelo sólido de viga da Figura 3.5 representa o caso mais geral com 3 componentes de taxa de deformação normal nas direções x , y e z denotadas por $\dot{\epsilon}_{xx}(x, y, z)$, $\dot{\epsilon}_{yy}(x, y, z)$ e $\dot{\epsilon}_{zz}(x, y, z)$, além de 6 componentes de taxa de deformação angular denotadas por $\dot{\gamma}_{xy}(x, y, z)$, $\dot{\gamma}_{yx}(x, y, z)$, $\dot{\gamma}_{xz}(x, y, z)$, $\dot{\gamma}_{zx}(x, y, z)$, $\dot{\gamma}_{yz}(x, y, z)$ e $\dot{\gamma}_{zy}(x, y, z)$. Correspondentes às componentes de taxa de deformação, tem-se as componentes de tensão normal $\sigma_{xx}(x, y, z)$, $\sigma_{yy}(x, y, z)$ e $\sigma_{zz}(x, y, z)$, além de 6 componentes de tensão cisalhantes $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{yx}(x, y, z)$, $\tau_{xz}(x, y, z)$, $\tau_{zx}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$ e $\tau_{zy}(x, y, z)$. De forma análoga a (3.10), a potência interna é dada por

$$P_i = - \int_V \left[\begin{array}{l} \sigma_{xx}(x, y, z)\dot{\epsilon}_{xx}(x, y, z) + \tau_{xy}(x, y, z)\dot{\gamma}_{xy}(x, y, z) + \tau_{xz}(x, y, z)\dot{\gamma}_{xz}(x, y, z) + \\ \tau_{yx}(x, y, z)\dot{\gamma}_{yx}(x, y, z) + \sigma_{yy}(x, y, z)\dot{\epsilon}_{yy}(x, y, z) + \tau_{yz}(x, y, z)\dot{\gamma}_{yz}(x, y, z) + \\ \tau_{zx}(x, y, z)\dot{\gamma}_{zx}(x, y, z) + \tau_{zy}(x, y, z)\dot{\gamma}_{zy}(x, y, z) + \sigma_{zz}(x, y, z)\dot{\epsilon}_{zz}(x, y, z) \end{array} \right] dV. \quad (3.11)$$

Como pode ser notado nas equações (3.10) e (3.11), os integrandos representam uma densidade de potência p_i , ou seja, potência interna por unidade de volume neste caso. Para verificar este fato, observa-se que, em geral, as componentes de deformação são dadas pela derivada das componentes da cinemática (por exemplo, $\dot{\epsilon}_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial x}$) como será visto posteriormente. Supondo que a componente v_1 esteja dada em m/s e a tensão σ_{xx} em N/m^2 , o produto $\sigma_{xx}\dot{\epsilon}_{xx}$ terá as seguintes unidades

$$[\sigma_{xx}\dot{\epsilon}_{xx}] = \left[\frac{N}{m^2} \right] \left[\frac{1}{s} \right] = \left[\frac{N}{m^2} \frac{1}{s} \frac{m}{m} \right] = \left[\frac{1}{m^3} N \frac{m}{s} \right] = \left[\frac{Watts}{m^3} \right].$$

A partir da expressão (3.11), verifica-se que no caso geral de um corpo tridimensional, o estado de deformação de cada ponto está caracterizado por 9 componentes de deformação ($\dot{\epsilon}_{xx}$, $\dot{\epsilon}_{yy}$, $\dot{\epsilon}_{zz}$, $\dot{\gamma}_{xy}$, $\dot{\gamma}_{xz}$, $\dot{\gamma}_{yx}$, $\dot{\gamma}_{yz}$, $\dot{\gamma}_{zx}$, $\dot{\gamma}_{zy}$). Da mesma forma, o estado de tensão em cada ponto é caracterizado por 9 componentes de tensão (σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy}). Estas componentes de deformação e tensão podem ser escritas matricialmente como

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

sendo que as coordenadas (x, y, z) não foram indicadas nas componentes para simplificar a notação. As matrizes anteriores contém as componentes cartesianas dos tensores taxa de deformação \mathbf{D} e tensor de tensões de Cauchy \mathbf{T} . O conceito de tensor será introduzido posteriormente. Multiplicando $[\mathbf{D}]^T$ por $[\mathbf{T}]$, obtém-se

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}]^T [\mathbf{T}] &= \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{zx} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx}\sigma_{xx} + \dot{\gamma}_{yx}\tau_{yx} + \dot{\gamma}_{zx}\tau_{zx} & \dot{\epsilon}_{xx}\tau_{xy} + \dot{\gamma}_{yx}\sigma_{yy} + \dot{\gamma}_{zx}\tau_{yz} & \dot{\epsilon}_{xx}\tau_{xz} + \dot{\gamma}_{yx}\tau_{yz} + \dot{\gamma}_{zx}\sigma_{zz} \\ \dot{\gamma}_{xy}\sigma_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy}\tau_{yx} + \dot{\gamma}_{yz}\tau_{zx} & \dot{\gamma}_{xy}\tau_{xy} + \dot{\epsilon}_{yy}\sigma_{yy} + \dot{\gamma}_{yz}\tau_{yz} & \dot{\gamma}_{xy}\tau_{xz} + \dot{\epsilon}_{yy}\tau_{yz} + \dot{\gamma}_{yz}\sigma_{zz} \\ \dot{\gamma}_{xz}\sigma_{xx} + \dot{\gamma}_{yz}\tau_{yx} + \dot{\epsilon}_{zz}\tau_{zx} & \dot{\gamma}_{xz}\tau_{xy} + \dot{\gamma}_{yz}\sigma_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}\tau_{yz} & \dot{\gamma}_{xz}\tau_{xz} + \dot{\gamma}_{yz}\tau_{yz} + \dot{\epsilon}_{zz}\sigma_{zz} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Somando as componentes da diagonal principal do produto $[\mathbf{D}]^T [\mathbf{T}]$, obtém-se um número escalar, denominado traço e denotado como tr , ou seja,

$$\text{tr}([\mathbf{D}]^T [\mathbf{T}]) = \dot{\epsilon}_{xx}\sigma_{xx} + \dot{\gamma}_{yx}\tau_{yx} + \dot{\gamma}_{zx}\tau_{zx} + \dot{\gamma}_{xy}\tau_{xy} + \dot{\epsilon}_{yy}\sigma_{yy} + \dot{\gamma}_{yz}\tau_{yz} + \dot{\gamma}_{xz}\tau_{xz} + \dot{\gamma}_{yz}\tau_{yz} + \dot{\epsilon}_{zz}\sigma_{zz}.$$

Observa-se que o traço é exatamente o integrando da expressão (3.11). Logo, pode-se expressar a densidade de potência p_i como $p_i = \text{tr}([\mathbf{D}]^T [\mathbf{T}])$. Como será visto posteriormente, pode-se efetuar o produto interno $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ de tensores \mathbf{D} e \mathbf{T} quaisquer. Este produto interno é exatamente o traço do produto $[\mathbf{D}]^T [\mathbf{T}]$, ou seja,

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = \text{tr}([\mathbf{D}]^T [\mathbf{T}]). \quad (3.13)$$

Desta forma, a equação (3.11) pode ser reescrita como

$$P_i = - \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dV = - \int_V \text{tr}([\mathbf{D}]^T [\mathbf{T}]) dV. \quad (3.14)$$

Observa-se que a partir do caso geral de um corpo sólido é possível obter a expressão da potência interna para os modelos uni e bidimensional equações (3.8) e (3.10)), bastando manter apenas as componentes não-nulas nos tensores \mathbf{T} e \mathbf{D} .

De forma análoga ao caso da potência externa, a forma específica da potência interna depende da cinemática adotada para o modelo em estudo, como pode ser visto a partir das expressões (3.8), (3.10) e (3.11). Desta maneira, indica-se a potência interna P_i de forma geral como

$$P_i = - (T, D) = - (T, Dv), \quad (3.15)$$

sendo D um operador diferencial aplicado a ação cinemática $v \in \mathcal{V}$. Por exemplo, no caso do modelo unidimensional de viga, tem-se $D = \frac{d^2}{dx^2}$ e $Dv = \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$. Para o caso de um corpo sólido, tem-se que

$$P_i = - (T, D) = - (T, D\mathbf{v}) = - \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dV. \quad (3.16)$$

Neste caso, a cinemática será dada pelo campo vetorial $\mathbf{v}(x, y, z)$ e o operador D aplicado $\mathbf{v}(x, y, z)$ é proporcional pelo gradiente de $\mathbf{v}(x, y, z)$, ou seja,

$$Dv = D\mathbf{v}(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(\text{grad}\mathbf{v}(x, y, z) + \text{grad}\mathbf{v}^T(x, y, z) \right). \quad (3.17)$$

Tomando-se ainda as equações (3.8), (3.10) e (3.11), tem-se que os integrandos representam densidades de potência interna, respectivamente, por unidades de comprimento, área e volume. Com base nessa constatação, pode-se formular o seguinte conceito: a *potência interna* (isto é a resposta do estado interno do corpo às ações de movimento) é um funcional (no sentido de que fornece um número a partir de uma ação de movimento) definido por uma *densidade* de potência interna p_i por unidade de volume (de área num caso plano; de comprimento se o problema é unidimensional). Assim, a potência interna P_i é a *integral de uma densidade*, sendo portanto uma função escalar. Logo, de forma geral,

$$P_i = \int_{\mathcal{B}_t} p_i d\mathcal{B}_t. \quad (3.18)$$

Para o caso de uma partícula em movimento ou um corpo em movimento de corpo rígido, a potência interna é nula. Esta é uma das condições do Princípio das Potências Virtuais discutido na próxima

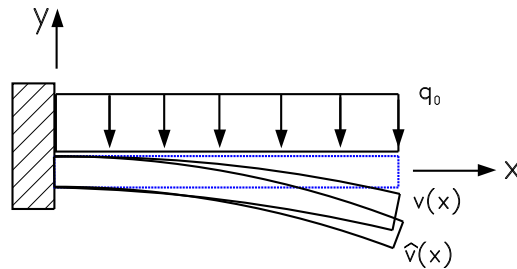


Figura 3.6: Ação de movimento virtual $\hat{v}(x)$ na viga.

seção. Assim, para toda ação rígida $v \in \mathcal{V}$, tem-se a partir de (3.15) que a potência interna deve ser nula, ou seja,

$$P_i = -(T, Dv) = 0, \quad (3.19)$$

implicando que $Dv = 0$, isto é, a deformação é nula e v é uma ação rígida. O conjunto de todas as ações de movimento $v \in \mathcal{V}$ para as quais $Dv = 0$ é o subconjunto $\mathcal{N}(D)$ de \mathcal{V} das ações de movimento rígidas. O símbolo \mathcal{N} indica o espaço nulo de D , ou seja, o subconjunto de ações de movimento rígidas no espaço das ações de movimento possíveis \mathcal{V} .

Por sua vez, o conjunto de todas as ações de deformação Dv define o espaço \mathcal{W} das ações de deformações compatíveis cinematicamente com as ações de deformação $v \in \mathcal{V}$. O espaço dual de \mathcal{W} , contendo as componentes de esforços internos, é designado por \mathcal{W}' . A Figura 3.2 ilustra estes espaços, a potência P_i e o subconjunto $\mathcal{N}(D)$.

3.4 Princípio da Potência Virtual (PPV)

O Princípio das Potências Virtuais (PPV) foi iniciado em torno de 300a.c por Aristóteles. No entanto, foi formulado pela primeira vez nos célebres trabalhos de J.Bernoulli e definitivamente estabelecido a partir dos trabalhos de D'Alembert.

Para entender o PPV, considere a viga ilustrada na Figura 3.3(a). Como se sabe, devido a ação da carga distribuída q_0 , a viga se deforma até atingir uma configuração de equilíbrio mostrada na Figura 3.3(b). Nesta configuração a potência externa P_e , dada pela ação de movimento $v(x)$ e pela força distribuída q_0 , se iguala a potência interna P_i , dada pela taxa de deformação longitudinal $\dot{\epsilon}_{xx}(x)$ e pela tensão normal $\sigma_{xx}(x)$.

Para verificar se a viga está realmente em equilíbrio, procede-se de forma análoga aos exemplos de avaliar o peso do objeto ou a tensão na correia. Logo, a partir da configuração deformada dada na Figura 3.3(b), introduz-se uma ação de movimento virtual $\hat{v}(x)$, como ilustrado na Figura 3.6. Caso as potências externa e interna desenvolvidas durante a ação virtual $\hat{v}(x)$ sejam iguais, a viga realmente está em equilíbrio na configuração deformada da Figura 3.3(b). Observe na Figura 3.6 que a ação virtual $\hat{v}(x)$ é arbitrária e respeita os vínculos cinemáticos, neste caso o engaste em $x = 0$. Assim, o efeito da ação virtual $\hat{v}(x)$ é introduzir uma perturbação a partir da posição deformada, visando avaliar o equilíbrio da viga.

Para indicar matematicamente o PPV, considere um corpo qualquer numa configuração de equilíbrio deformada. Impondo-se uma ação de movimento virtual \hat{v} , o corpo está em equilíbrio se a soma das potências externa e interna são nulas, ou seja,

$$P_e + P_i = 0. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.7) e (3.19) vem que

$$\langle f, \hat{v} \rangle - (T, D\hat{v}) = 0, \quad (3.21)$$

para qualquer ação virtual $\hat{v} \in \mathcal{V}$.

Tomando-se uma ação virtual rígida $\hat{v} \in \mathcal{N}(D)$, a potência interna é nula e a expressão (3.21) se reduz a

$$P_e = \langle f, \hat{v} \rangle = 0,$$

ou seja, obtém-se a mesma condição de equilíbrio deduzida no Capítulo 2.

Ao aplicar o PPV, é possível caracterizar os esforços externos compatíveis com o modelo cinemático do problema. Desta maneira, define-se o espaço \mathcal{V} das forças externas. Além disso, tem-se a forma integral de equilíbrio, a partir da qual obtém-se a forma local dada em termos de uma equação diferencial e condições de contorno. O conjunto formado pela equação diferencial e condições de contorno é denominado Problema de Valor de Contorno (PVC). Esta forma local é caracterizado pelo operador D^* mapeando elementos do espaço dos esforços internos \mathcal{W}' no espaço dos esforços externos V' .

Pode-se generalizar o PPV para o caso de corpos deformáveis em movimento. Para isto basta incluir na expressão da potência externa, a força de inércia do corpo. Na expressão (3.5), $\mathbf{b}(x, y, z)$ representa uma densidade de força por unidade de volume. Logo, introduz-se a força de inércia como $-\rho\mathbf{a}(x, y, z)$, sendo ρ a densidade dada em unidades como Kg/m^3 , e $\mathbf{a}(x, y, z)$ o campo veorial da aceleração expressa em geral em m/s^2 . O produto $\rho\mathbf{a}$ terá como unidades

$$[\rho\mathbf{a}] = \left[\frac{Kg}{m^3} \right] \left[\frac{m}{s^2} \right] = \left[\frac{N}{m^3} \right],$$

ou seja, tem-se novamente uma densidade de força por unidade de volume.

Assim, reescreve-se a equação (3.21) como

$$\langle f^*, \hat{v} \rangle - (T, D\hat{v}) = 0, \quad (3.22)$$

sendo $f^* = f - \rho\mathbf{a}$. A expressão anterior é denominada Princípio de D'Alembert. A grande vantagem deste princípio é possibilitar o estudo de problemas dinâmicos da mesma forma que problemas de equilíbrio estático, pois a componente da força de inércia é introduzida como uma força externa no termo f^* .

Toda a formulação aqui apresentada está baseada na idéia de potência, implicando que as ações de movimento são descritas por campos de velocidades $v \in \mathcal{V}$. Como se sabe, a velocidade é a taxa de variação do deslocamento no tempo. As ações virtuais têm por objetivo introduzir uma perturbação que permita avaliar o estado de equilíbrio do corpo. Pode-se, então, empregar ações virtuais tão pequenas quanto se queira, ou, seja, pode-se considerar um deslocamento diferencial num intervalo de tempo também diferencial. Desta maneira, pode-se caracterizar a ação de movimento através de um deslocamento. Como os problemas abordados neste texto são estáticos, utiliza-se ações de movimento dadas por deslocamentos num pequeno intervalo de tempo. Isto simplifica a notação, pois ao invés de se falar de uma componente de taxa de deformação $\dot{\varepsilon}_{xx}$, fala-se simplesmente da deformação ε_{xx} . Este procedimento será adotado ao longo deste texto.