

Apêndice A

FUNÇÕES

Este apêndice tem como um objetivo inicial apresentar os conceitos de diferenciação e integração de forma suficientemente geral para que incluam funções escalares, pontuais, vetoriais ou tensoriais cujos argumentos são escalares, pontos, vetores ou tensores. A seguir, pretende-se desenvolver as noções de gradiente, divergente e rotacional de campos escalares, pontuais, vetoriais ou tensoriais. Além disso, serão enunciados alguns teoremas fundamentais de integração em mais de uma dimensão. Para cumprir tais metas, parte-se *a priori* da idéia fundamental de *função*.

A.1 Definição de Função

Uma função de um conjunto A em um conjunto B , denotada por $f : A \rightarrow B$, é uma relação tal que

- para todo $x \in A$ existe um $y \in B$ tal que $x f y$ (lê-se x está relacionado a y por f)
- para todo $x \in A$ e $y_1, y_2 \in B$, se $x f y_1$ e $x f y_2$, então $y_1 = y_2$

Em outras palavras, f é uma relação que permite associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$. É usual empregar, no lugar de $x f y$, a seguinte notação

$$y = f(x).$$

Em $f : A \rightarrow B$, A é chamado de *domínio* de f , sendo denotado por $dom f$, e B é chamado de *contra domínio* de f . A partir do que foi definido, é possível interpretar uma função como uma relação de valor único pois cada elemento de $dom f$ ocorre apenas uma vez em f . Nota-se ainda que $dom f \neq \emptyset$. O elemento $y \in B$ que resulta da relação $f(x) = y$ é denominado *imagem* de $x \in A$, ou *valor da função* em x .

O conjunto de todos os elementos de B que são imagens dos elementos de A é chamado de *conjunto imagem*. Esse conjunto, usualmente denotado por $\mathcal{I}(f)$, é o conjunto que contém todas as imagens de f , i.e.,

$$\mathcal{I}(f) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Define-se como gráfico da função $f : A \rightarrow B$ o conjunto dado por

$$graph f = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Observa-se que as definições de função e gráfico de uma função não são coincidentes. No entanto, uma vez especificada uma função, é possível identificá-la a partir do seu respectivo gráfico.

Ressalta-se ainda que os termos *função*, *mapeamento*, *transformação* e *operador* são comumente empregados como sinônimos. Assim, se $f : A \rightarrow B$, diz-se que “ f mapeia A em B ” ou “ f é uma transformação de A em B ” ou “ f é um operador de A em B ”.

Exemplo A.1 Seja \mathfrak{R} o conjunto dos números reais e considere a relação

$$R = \left\{ (x, y) : x, y \in \mathfrak{R}, x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \right\}.$$

Claramente, R define os pontos de uma elipse (Figura A.1). Sendo assim, R não é uma função pois a cada elemento $x \in \mathfrak{R}$ associa-se um par de elementos $y \in \mathfrak{R}$. Por exemplo, $(0, +2)$ e $(0, -2) \in R$.

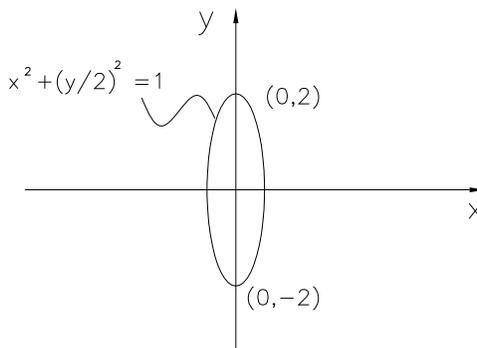


Figura A.1: Função do exemplo A.1.

□

Exemplo A.2 Seja a relação R dada por (Figura A.2)

$$R = \{(x, y) : x, y \in \mathfrak{R}, y = \sin x\}.$$

Esta relação é uma função! Seu domínio é \mathfrak{R} , ou seja, todo o eixo x ($-\infty < x < \infty$). Seu contradomínio também é \mathfrak{R} (todo o eixo y). Seu conjunto imagem é $\{y : y \in \mathfrak{R}, -1 \leq y \leq 1\}$. Observa-se que valores específicos de $y \in \mathcal{R}(R)$ são as imagens de infinitos pontos no domínio de R . Por exemplo, $y = 1$ é a imagem de $\pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, \dots$

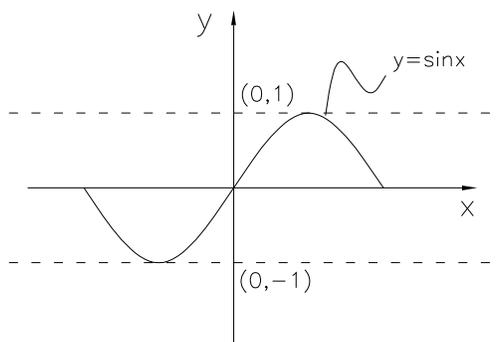


Figura A.2: Relação do exemplo A.2.

□

Para identificar propriedades especiais de uma função $f : A \rightarrow B$, costuma-se utilizar a nomenclatura listada abaixo:

1. *Funções Sobrejetoras.* Uma função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora se todo $b \in B$ é a imagem de algum elemento de A .
2. *Funções Injetoras.* Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita injetora se e somente se, para todo $b \in \mathcal{I}(f)$, existe exatamente um $a \in A$ tal que $b = f(a)$.
3. *Funções Bijetoras.* Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetora se e somente se ela é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, i.e., se e só se todo $b \in B$ é a única imagem de algum $a \in A$.

A Figura A.3 ilustra geometricamente os tipos de funções discutidos anteriormente. A correspondência indicada na Figura A.3(a) é uma relação, mas não é uma função, em razão de um dos elementos de A ter mais de uma imagens em B . A Figura A.3(d) representa uma função injetora, mas não sobrejetora, pois existe um elemento em B que não é imagem de nenhum elemento de A .

Exemplo A.3 *Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais e \mathbb{R}^+ o conjunto dos reais não-negativos. Admita que f denote a seguinte regra: $f(x) = x^2$. Considere agora as seguintes funções:*

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. *Esta função não é injetora uma vez que tanto $-x$ quanto x são mapeados num mesmo ponto x^2 . Esta função também não é sobrejetora pois os números reais não-negativos pertencem ao contra-domínio apesar de não serem imagens de nenhum ponto do domínio.*
2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. *Esta função não é injetora mas é sobrejetora pois seu contra-domínio é o próprio conjunto imagem..*
3. $f_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. *Esta função é injetora pois cada elemento pertencente ao conjunto imagem possui um único correspondente no domínio. No entanto esta função não é sobrejetora pelo mesmo motivo apresentado no primeiro caso.*
4. $f_4 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. *Esta função é bijetora pois é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.*

Note que embora a regra $f(x) = x^2$ que define todas as funções f_1, f_2, f_3 e f_4 seja a mesma, as quatro funções são bastante diferentes.

□

A.2 Funções Compostas e Funções Inversas

Seja $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$. Define-se a *composição* de X em Z , denotada por $g \circ f$ ou simplesmente gf , como $g \circ f : X \rightarrow Z$. A função composta $g \circ f$ pode então ser escrita para todo $x \in X$ como

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemplo A.4 *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + x$. Logo*

$$(gf)(x) = 1 + x^2,$$

$$(fg)(x) = (1 + x)^2.$$

□

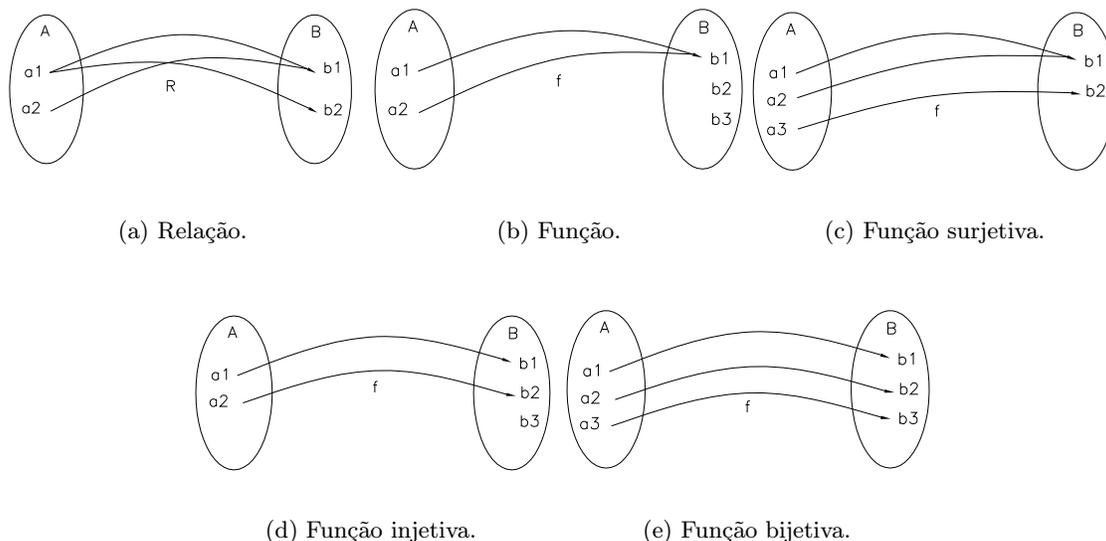


Figura A.3: Classificação de funções.

É importante notar que se $f : X \rightarrow Y$ é definida em X e $g : Y \rightarrow Z$ é definida em Y , então não faz sentido falar sobre a composição $f \circ g$ uma vez que a imagem de g está em Z e o domínio de f está em X . Observa-se ainda, a partir do último exemplo, que mesmo no caso em que faz sentido falar de ambas as composições $g \circ f$ e $f \circ g$ (pois os conjuntos de saída e chegada são sempre os mesmos), em geral

$$fg \neq gf.$$

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita invertível se e somente se existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que para todo $x \in X$ se $y = f(x)$ então $x = g(y)$ e para todo $y \in Y$ se $x = g(y)$ então $y = f(x)$. É comum denotar a função g , quando ela existe, por f^{-1} . Nesse caso é possível escrever

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

e

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

O conceito de função inversa é ilustrado na Figura A.4. O elemento x é levado ao elemento y pela função f e então é trazido de volta de y para x novamente pela função inversa $g = f^{-1}$. Da mesma forma, partindo de y , prescreve-se $x = g(y)$ e tomando-se $f(x) = f(g(y))$ chega-se a x novamente.

Admitindo-se $f : X \rightarrow Y$, é possível mostrar que as afirmações abaixo são equivalentes

- f é invertível;
- f é bijetora.

Com efeito, funções bijetoras estabelecem uma correspondência biunívoca entre todos os elementos de X e de Y . Em outras palavras, para todo $y \in Y$ (f é sobrejetora) existe um único $x \in X$ (f é injetora) tal que $y = f(x)$. Tomando-se por definição $g(y) = x$, nota-se que g é uma função tal que $g(f(x)) = x$ da mesma forma que $f(g(y)) = y$. Isso deixa claro que f deve ser invertível.

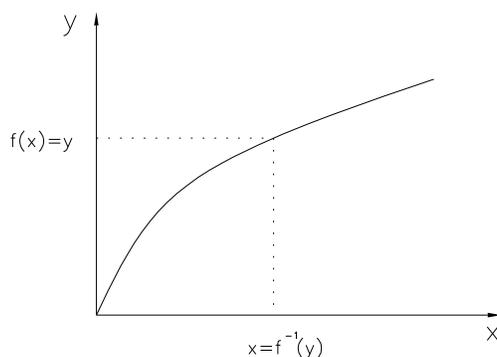


Figura A.4: Função inversa.

Exemplo A.5 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R} = \text{dom } f = \text{conjunto dos números reais}$ e $\mathbb{R}^+ = \{y : y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$. Suponha que f seja definida pela regra $f(x) = x^2$, i.e., $f = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y = x^2\}$. Claramente f não possui inversa pois esta função não é injetora.

□

Exemplo A.6 Seja $\text{dom } f = \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ e $\mathcal{I}(f) = \{y : y \in \mathbb{R}, y = x^2\}$, ou seja, $f = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0, y = x^2\}$. Evidentemente f é injetora e sobrejetora. Dessa forma, f possui uma inversa f^{-1} . Nesse caso, f^{-1} é chamada função raiz quadrada positiva a qual habitualmente é expressa pela notação $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Da mesma forma, se $f_1 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x \leq 0, y = x^2\}$ e $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ é a inversa de f_1 então f_1^{-1} é chamada função raiz quadrada negativa.

□

Exemplo A.7 Claramente, a função seno $f(x) = \sin x$ não é injetora (por exemplo: $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = \dots = 0$). Entretanto, se f for definida em $\mathbb{R}_{\pi/2} = \{x : x \in \mathbb{R}, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$, a restrição $f|_{\mathbb{R}_{\pi/2}}$ será injetora e sobrejetora e portanto possuirá inversa. A inversa de f é chamada de função arco-seno e é denotada por $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$ ou $\sin^{-1}(y)$.

□

A.3 Limite e Continuidade

Nesta seção, examinam-se os conceitos fundamentais de limite e continuidade de funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Observa-se, na verdade, que o conceito de continuidade de uma função decorre imediatamente daquele de limite de uma função.

Limite de uma função. Seja $A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida num conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ e \mathbf{x}_0 , um ponto do domínio de f ou pertencente a um dos contornos que compõem o domínio de f . Diz-se que f possui um limite \mathbf{a} no ponto \mathbf{x}_0 se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um outro número $\delta > 0$ tal que $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{a}| < \varepsilon$.

A idéia de limite é ilustrada na Figura A.5. Se x estiver suficientemente próximo de x_0 , é possível aproximar $f(x)$ de a tanto quanto se queira. A Figura A.5(b) mostra o caso em que $f(x)$ é descontínua em x_0 . Claramente, se tomamos um $\varepsilon > 0$, não existe nenhum intervalo no domínio de $f(x)$ para o qual $|f(x) - a| < \varepsilon$ quando $|x - x_0| < \delta$. Escolhendo $x < x_0$, então $|f(x) - a_1| < \varepsilon$ quando $|x - x_0| < \delta$; ou, se $x > x_0$, então $|f(x) - a_2| < \varepsilon$ quando $|x - x_0| < \delta$. Assim, a_1 é chamado de *limite à esquerda* de $f(x)$ em x_0 e a_2 é chamado de *limite à direita* de $f(x)$ em x_0 . Uma função $f(x)$ tem um limite a em x_0 se e

somente se $a_1 = a_2 = a$, e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

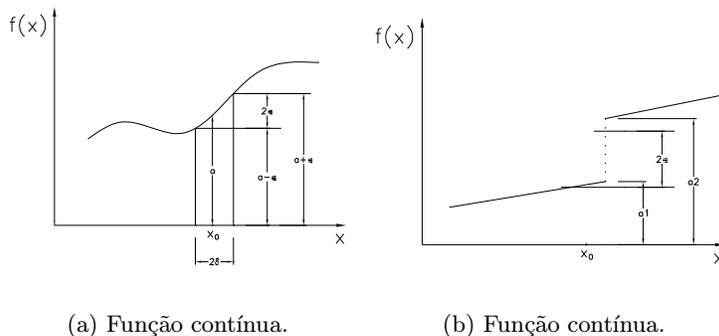


Figura A.5: Conceitos de limite e continuidade.

Continuidade (Definição via Limite). Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $A \subset \mathbb{R}^n$, é contínua no ponto $\mathbf{x}_0 \in A$ se e somente se

1. $f(\mathbf{x}_0)$ existe;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

A definição de continuidade pode ser reescrita sem que se faça referência à noção de limite.

Continuidade (Definição via $\varepsilon - \delta$). Uma função $f : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua no ponto $\mathbf{x}_0 \in A$ (o que significa automaticamente que $f(\mathbf{x}_0)$ existe) se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$|f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon \text{ sempre que } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta, \mathbf{x} \in A.$$

Funções Globalmente Contínuas. Seja $f : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função. Diz-se que f é *globalmente contínua* em A , ou simplesmente f é *contínua* em A , se e somente se f é contínua em todo ponto de A .

A.4 Diferenciação e Integração

A.4.1 Caso Unidimensional

Nesta seção, discute-se brevemente os conceitos de diferenciação e integração uni e multi-dimensionais de funções de variáveis reais. O conceito de integração estará restrito a noção segundo Riemann. Pretende-se, a posteriori, estender ambos os conceitos de forma a abranger os casos de funções escalares, pontuais, vetoriais ou tensoriais cujos argumentos são escalares, pontos, vetores ou tensores.

Derivada de uma Função num Ponto. Seja a um ponto do domínio de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e f , uma função definida de A em \mathbb{R} . O número real K é chamado de *derivada* de f em a se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - K \right| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta, x \in A.$$

Quando o número K existe, escreve-se $K = f'(a)$.

Alternativamente, $f'(a)$ pode ser definido como o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Usando a notação clássica, tem-se

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

e portanto

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$$

que é base para a notação clássica de Leibnitz

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

Se $f'(a)$ existe, diz-se que a função f é *diferenciável* em a . Se f for diferenciável em todo ponto $x \in A$, então f é *diferenciável* em A .

A seguir, serão enunciados algumas proposições e teoremas importantes do cálculo elementar cujas demonstrações ficarão a cargo do leitor.

Diferenciabilidade e Continuidade. Se uma função f é diferenciável num ponto $a \in A \subset \mathfrak{R}$ então f é contínua em a .

Exemplo A.8 A recíproca da proposição anterior não é verdadeira. Com efeito, a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \leq 0 \\ 1 - 2x, & x > 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$, mas ela não é diferenciável neste ponto. Na verdade,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

enquanto que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2.$$

□

Se $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ é diferenciável em todo ponto $a \in A$, a função que fornece a derivada de f em a para todo $a \in A$, denotada por f' , é chamada de *função derivada* de f ou simplesmente *derivada* de f .

Extremos Locais de uma Função. Seja $f : \mathfrak{R} \supset A \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função diferenciável num ponto c interior ao conjunto A . Suponha que f possui um máximo local em c . Então $f'(c) = 0$.

Um resultado análogo pode ser obtido no caso de um mínimo local.

Teorema de Rolle. Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b] \subset \mathfrak{R}$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Suponha que $f(a) = f(b) = 0$. Então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Como consequência desse teorema, chega-se a um dos teoremas mais fundamentais do cálculo.

Teorema do Valor Médio. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b] \subset \mathfrak{R}$ com derivada em em todos os pontos pertencentes a (a, b) . Então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Serão revisados a partir de agora alguns elementos fundamentais associados ao conceito de integração unidimensional.

Partição. Uma partição P de um intervalo $I = [a, b]$ é uma coleção finita de subintervalos de I que não se sobrepõem e cuja união é o próprio I . Uma partição geralmente é descrita especificando-se um conjunto finito de números, i.e.,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

Dessa forma, se

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad 1 \leq k \leq n$$

então P é dada por

$$I = \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

A quantidade

$$\rho(P) = \max_k |x_k - x_{k-1}|$$

é chamada de *raio da partição* P .

Somas de Riemann e Integrais. Seja P uma partição do intervalo $I = [a, b] \subset \mathfrak{R}$ e f , uma função definida em I . O número real

$$R(P, f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

com $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ (k variando de 1 a n), é chamado de *Soma de Riemann* de f correspondente à partição $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ e à escolha dos pontos intermediários ξ_k . A função f é dita *integrável segundo Riemann* em I se para toda sequência de partições P_n convergindo a zero no sentido de que $\rho(P_n) \rightarrow 0$, com os pontos intermediários ξ_k escolhidos arbitrariamente, a correspondente sequência de somas de Riemann convergir para um valor comum J .

O número J , quando existe, é chamado de *Integral de Riemann* de f sobre $[a, b]$ e é denotada por

$$J = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f dx.$$

A função f é denominada de *integrando* de J .

Exemplo A.9 Seja $f(x) = 1$ se x for racional e $f(x) = 0$ se x for irracional. Verifica-se facilmente que o limite das somas de Riemann nesse caso dependem da escolha dos pontos ξ_k . Portanto, a função f não é Riemann integrável.

□

É possível mostrar que se f for contínua dentro do intervalo fechado $[a, b]$, exceto por um número finito de pontos, então f será integrável no sentido de Riemann. Obviamente, a função que acaba de ser considerada não satisfaz esta condição!

A seguir, são listados alguns teoremas fundamentais da teoria clássica de integração (a demonstração destes teoremas é deixada como exercício para o leitor).

Teorema do Valor Médio para Integrais. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b] \subset \mathfrak{R}$. Então existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b] \subset \mathfrak{R}$. Então a função $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds$$

é diferenciável em $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$.

Uma função $F(x)$ cuja derivada é dada por $F'(x) = f(x)$ é chamada de *primitiva* de f . Segue-se de forma imediata que a primitiva de uma função só pode ser determinada a menos de uma constante.

Segundo Teorema Fundamental do Cálculo. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b] \subset \mathfrak{R}$ e F , sua primitiva. Então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

A.4.2 Caso Multidimensional

Uma vez fixados os elementos básicos da diferenciação e integração em uma dimensão, pretende-se agora estender tais conceitos aos casos multidimensionais.

Derivadas Direcional e Parcial de uma Função. Seja $\mathbf{f} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ uma função definida no conjunto $A \subset \mathfrak{R}^n$. De forma equivalente, \mathbf{f} pode ser identificada como uma função vetorial de m componentes, i.e., $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, sendo cada componente f_i uma função escalar de n variáveis reais definida em A . Seja \mathbf{x} um ponto do domínio de \mathbf{f} ou pertencente a um dos contornos que compõem o domínio de \mathbf{f} e \mathbf{u} , um vetor unitário em \mathfrak{R}^n , ou seja, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathfrak{R}^n$ tal que

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 1.$$

O limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{f_j(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}) - f_j(\mathbf{x})}{\varepsilon},$$

quando existe, é chamado de *derivada direcional* da j -ésima função componente f_j no ponto \mathbf{x} segundo a direção \mathbf{u} . Usualmente, denota-se essa derivada por

$$Df_j(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} f_j(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}).$$

A derivada direcional da função vetorial \mathbf{f} em \mathbf{x} segundo a direção \mathbf{u} é definida como

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\varepsilon} = (Df_1(\mathbf{x})[\mathbf{u}], Df_2(\mathbf{x})[\mathbf{u}], \dots, Df_m(\mathbf{x})[\mathbf{u}]).$$

A derivada direcional, como definida acima, satisfaz as propriedades usuais da derivada unidimensional. Tais propriedades são listadas a seguir:

1. *Derivada de uma soma:* se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$ então

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = D\mathbf{f}_1(\mathbf{x})[\mathbf{u}] + D\mathbf{f}_2(\mathbf{x})[\mathbf{u}];$$

2. *Regra do produto:* se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$, com “ \cdot ” indicando qualquer tipo de produto, então

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = D\mathbf{f}_1(\mathbf{x})[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \cdot D\mathbf{f}_2(\mathbf{x})[\mathbf{u}];$$

3. *Regra da cadeia*: se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}))$, então

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = D\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}))[D\mathbf{f}_2(\mathbf{x})[\mathbf{u}]].$$

Exemplo A.10 Seja $f(x, y) = |x^2 - y^2|^{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$. Considere a direção $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$, e seja $\phi(\varepsilon) = f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta)$. A derivada direcional de f em \mathbf{x}_0 , se existir, é dada por $Df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{v}] = \phi'(0)$. Agora

$$\phi(\varepsilon) = \left| \varepsilon^2 \cos^2 \theta - \varepsilon^2 \sin^2 \theta \right|^{\frac{1}{2}} = |\varepsilon| \left| \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Se $\cos^2 \theta = \sin^2 \theta$, então $\phi(\varepsilon) = 0$ para todo ε e $\phi'(0) = 0$; Se $\cos^2 \theta \neq \sin^2 \theta$, então ϕ não possui derivada em $\varepsilon = 0$ pois $\frac{d}{d\varepsilon} |\varepsilon|$, no ponto $\varepsilon = 0$, não existe. Assim, a derivada direcional de f em $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ é zero nas quatro direções $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$. Em qualquer outra direção \mathbf{v} , a derivada direcional de f não existe.

□

Quando o vetor unitário \mathbf{u} que define a derivada direcional de f_j é tomado segundo a direção particular de um dos eixos coordenados, por exemplo \mathbf{e}_i , essa derivada, se existir, recebe o nome de *i-ésima derivada parcial* da *j-ésima* função componente f_j no ponto \mathbf{x} . Assim, denota-se a derivada parcial por

$$Df_j(\mathbf{x})[\mathbf{e}_i].$$

Alternativamente, pode-se definir a derivada parcial de uma função componente f_j em relação à coordenada x_i no ponto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ como

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f_j(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Desse modo, verifica-se que ambas as notações empregadas anteriormente são equivalentes entre si

$$Df_j(\mathbf{x})[\mathbf{e}_i] = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

De forma geral, a função vetorial

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right)$$

é identificada como a derivada parcial de \mathbf{f} com respeito à *i-ésima* coordenada.

Como no caso das funções de uma única variável, funções que prescrevem em todo ponto \mathbf{x} uma derivada parcial ou direcional nestes mesmos pontos são chamadas de (*funções*) *derivadas parciais* ou *direcionais* de \mathbf{f} .

Exemplo A.11 Seja $f(x, y, z) = x^2 + y + \cos(y^2 z)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 - 2yz \sin(y^2 z); \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -y^2 \sin(y^2 z). \end{aligned}$$

□

A noção de funções derivadas (parciais ou direcionais) permite que se introduza o conceito de derivadas de ordem superior como sendo derivadas de derivadas. Nesse sentido, é usual empregar a seguinte notação para as derivadas parciais de ordem superior

$$D^\alpha \mathbf{f} = \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^\alpha},$$

sendo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, denominado *multi-índice*, tal que os símbolos $|\alpha|$ e $\partial \mathbf{x}^\alpha$ sejam entendidos da seguinte forma:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \\ \partial \mathbf{x}^\alpha = \underbrace{\partial x_1 \dots \partial x_1}_{\alpha_1} \underbrace{\partial x_2 \dots \partial x_2}_{\alpha_2} \dots \underbrace{\partial x_n \dots \partial x_n}_{\alpha_n}.$$

O número $|\alpha|$ é chamado de *ordem* da derivada.

Funções de Classe C^k . Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida no conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que \mathbf{f} é de classe $C^k(\Omega)$ se todas as suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k existem e são contínuas em Ω . Os símbolos $C^0(\Omega)$ ou $C(\Omega)$ são reservados para a classe de funções que são apenas contínuas em Ω .

Derivada de um Tensor. Da maneira como foram definidos os conceitos de derivada parcial e direcional, torna-se imediato estender essas noções ao caso de funções tensoriais. Como se sabe, as componentes cartesianas de um tensor \mathbf{T} são dadas por

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j.$$

Assim, determinam-se as componentes da derivada de \mathbf{T} em relação ao tempo (por exemplo) como

$$\frac{dT_{ij}}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \frac{d(\mathbf{T} \mathbf{e}_j)}{dt}.$$

Se a base escolhida para representar \mathbf{T} for uma base cartesiana fixa, verifica-se que $\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = 0$ e portanto

$$\frac{dT_{ij}}{dt} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{d(\mathbf{T} \mathbf{e}_j)}{dt} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} \mathbf{e}_j = \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} \right)_{ij}.$$

Exemplo A.12 Dado um tensor ortogonal $\mathbf{Q}(t)$, mostrar que $(d\mathbf{Q}/dt) \mathbf{Q}^T$ é um tensor antissimétrico.

Como $\mathbf{Q}(t)$ é ortogonal, tem-se que $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ e portanto,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T) = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \frac{d\mathbf{Q}^T}{dt} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{Q} \frac{d\mathbf{Q}^T}{dt} = -\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^T$$

Para $\frac{d\mathbf{Q}^T}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)^T$ tem-se que,

$$\mathbf{Q} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)^T = -\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^T$$

Mas,

$$\mathbf{Q} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)^T = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^T \right)^T$$

Logo,

$$\left\{ \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^T \right\}^T = -\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^T$$

□

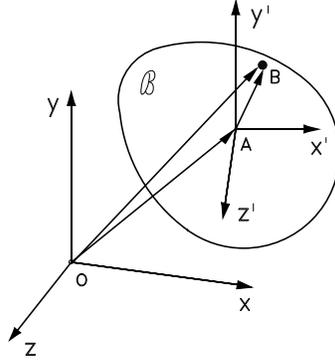


Figura A.6: Corpo rígido e os sistemas de referência inercial e móvel.

Exemplo A.13 A Figura A.6 ilustra os sistemas de referência inercial xyz e móvel $x'y'z'$ associados a um corpo rígido \mathcal{B} . Deseja-se a equação da velocidade do ponto \mathbf{B} de \mathcal{B} .

Da Figura A.6, o vetor posição do ponto \mathbf{B} pode ser escrito como,

$$\mathbf{r}_{OB} = \mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{AB} \tag{A.1}$$

Expressa-se o vetor \mathbf{r}_{AB} no sistema inercial como $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{T}\mathbf{r}'_{AB}$, onde \mathbf{T} é um tensor de rotação. Substituindo a expressão anterior em (A.1) e derivando,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_{OB} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_{OA} + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}\mathbf{r}'_{AB}) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_{OA} + \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{r}'_{AB} + \mathbf{T}\frac{d\mathbf{r}'_{AB}}{dt}$$

Como \mathcal{B} é rígido, tem-se que $\frac{d\mathbf{r}'_{AB}}{dt} = 0$. Portanto,

$$\mathbf{v}_{OB} = \mathbf{v}_{OA} + \frac{d\mathbf{T}}{dt}(\mathbf{T}^T\mathbf{r}_{AB})$$

Do exemplo anterior, $\frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{T}^T$ é um tensor antissimétrico e tomando ω como seu vetor axial, tem-se que

$$\mathbf{v}_{OB} = \mathbf{v}_{OA} + \omega \times \mathbf{r}_{AB}$$

□

Passe-se agora ao estudo da teoria de integração elementar em mais de uma dimensão.

Integral de Riemann em \mathfrak{R}^n . A noção de integração segundo Riemann pode ser generalizada para o caso de funções escalares em \mathfrak{R}^n . Se (a_i, b_i) $i = 1, \dots, n$ denota um intervalo aberto em \mathfrak{R}^n , o produto cartesiano

$$\sigma = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \subset \mathfrak{R}^n$$

é chamado *cubo* (aberto) em \mathfrak{R}^n .

Assume-se por simplicidade que seja dada uma função $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ definida num cubo $E \subset \mathfrak{R}^n$. Entende-se por uma *partição* P de E uma família finita de cubos $\sigma \subset E$, dois a dois disjuntos (i.e., cuja intersecção é vazia), tal que

$$E \subset \cup \sigma, \sigma \in P$$

sendo que $\bar{\sigma}$ denota o *fecho* de σ , ou seja,

$$\bar{\sigma} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

Se um único *raio de cubo* for definido como

$$r(\sigma) = \left(\sum_i^n (b_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

então o raio de uma *partição* será definido por

$$r(P) = \max_{\sigma \in P} r(\sigma).$$

Escolhendo um ponto (intermediário) arbitrário ξ_σ de cada cubo $\sigma \in P$, define-se a *soma de Riemann* como

$$R = R(P, \xi) = \sum_{\sigma \in P} f(\xi_\sigma) m(\sigma),$$

sendo $m(\sigma)$ a *medida* (área, volume, hiper-volume) do cubo σ definida por

$$m(\sigma) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

A função f mencionada acima é dita *integrável no sentido de Riemann* sobre E se e somente se, para toda sequência P_k de partições tal que

$$r(P_k) \rightarrow 0$$

e para uma escolha arbitrária de pontos intermediários ξ_σ , a correspondente sequência de somas de Riemann converge para um valor comum J . O número J , quando existe, é chamado novamente de *integral de Riemann* de f sobre E e é denotada por

$$J = \int_E f \, dE = \int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_E f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n.$$

A.5 Gradiente, Divergente e Rotacional

Nesta seção e na próxima são reunidos os vários elementos abordados ao longo deste texto para finalmente se chegar às ferramentas necessárias a uma clara compreensão dos conceitos utilizados em mecânica do contínuo.

Serão consideradas agora funções definidas sobre um conjunto aberto \mathcal{R} no espaço euclidiano \mathcal{E} ($\equiv \mathbb{R}^3$). Uma função sobre \mathcal{R} é denominada um campo escalar, vetorial, tensorial ou pontual se seus valores são escalares, vetores, tensores ou pontos.

Gradiente de um Campo Escalar. Seja $f(\mathbf{x})$ um campo escalar, i.e., uma função que associa a cada ponto do espaço euclidiano \mathcal{E} um número real. A variação de f num dado ponto \mathbf{x}_0 e numa direção arbitrária \mathbf{u} , pode ser definida através do vetor $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, conhecido como *gradiente* de f em \mathbf{x}_0 , da seguinte maneira:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} = Df(\mathbf{x}_0) [\mathbf{u}].$$

As componentes do gradiente de f no ponto \mathbf{x}_0 podem ser obtidas usando-se a definição de derivada direcional como na equação acima

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} f(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d(x_{0,i} + \varepsilon u_i)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_{0,i}}$$

ou de forma equivalente, considerando-se os vetores unitários $\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$),

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_1 = Df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{e}_1] = \frac{\partial f}{\partial x_1} = (\nabla f)_1;$$

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_2 = Df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{e}_2] = \frac{\partial f}{\partial x_2} = (\nabla f)_2;$$

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_3 = Df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{e}_3] = \frac{\partial f}{\partial x_3} = (\nabla f)_3.$$

Nota-se que as componentes do vetor gradiente são as próprias derivadas parciais do campo escalar f .

Assim, o gradiente de um campo escalar $f(\mathbf{x}) : \mathcal{R} \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{R}$ é o vetor

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

cujas componentes são dadas por

$$(\nabla f(\mathbf{x}))_i = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Em notação indicial de diferenciação, tem-se

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})_{,i} \mathbf{e}_i.$$

O vetor gradiente possui uma interpretação geométrica simples. Para toda superfície de nível $f = c$, sendo c uma constante, tem-se $Df(\mathbf{x}) = 0$ para qualquer vetor \mathbf{u} tangente a essa superfície. Assim, $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = 0$ e ∇f é normal a superfície de $f = c$, como ilustrado na Figura ??.

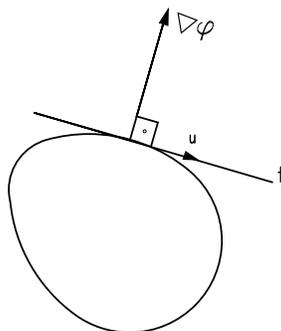


Figura A.7: Interpretação geométrica de $\nabla \varphi$.

Exemplo A.14 Dado o campo escalar $\varphi = xy + z$, encontrar o vetor unitário \mathbf{n} normal a superfície constante φ passando por $(2, 1, 0)$.

O gradiente de φ é dado por,

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_3 = y \mathbf{e}_1 + x \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

Para o ponto $(2, 1, 0)$, tem-se $\nabla \varphi = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Logo,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

□

O *campo vetorial gradiente*, ou seja, a função que a cada ponto \mathbf{x} associa o vetor $\nabla f(\mathbf{x})$ tem ainda um importante significado geométrico: este vetor aponta, em cada ponto, para a direção de maior crescimento de $f(\mathbf{x})$.

Gradiente de um Campo Vetorial. O gradiente de uma campo vetorial é definido de maneira similar ao gradiente de um campo escalar. Se \mathbf{v} é um campo vetorial (ou pontual) que possui derivadas de primeira ordem em \mathcal{R} , então para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}$, $\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ será, por definição, uma transformação linear (e portanto um *tensor*) que leva um vetor arbitrário \mathbf{u} na derivada direcional de \mathbf{v} no ponto \mathbf{x}_0 segundo a direção \mathbf{u} . Dessa forma

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) \mathbf{u} = D\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) [\mathbf{u}].$$

Assim, o tensor $\nabla \mathbf{v}$ transforma um vetor unitário \mathbf{e} em outro vetor $D\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) [\mathbf{e}]$ descrevendo a taxa de mudança de \mathbf{v} no ponto \mathbf{x}_0 segundo direção \mathbf{e} . Logo, para $\mathbf{e} = \mathbf{e}_i$ tem-se

$$(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{e}_i = D\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) [\mathbf{e}_i] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{e}_i) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)}{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0).$$

Em outras palavras, $\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ é o tensor de componentes

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

ou seja,

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Em notação indicial escreve-se

$$\nabla \mathbf{v} = v_{i,j}.$$

Divergente de um Campo Vetorial. Dado um campo vetorial \mathbf{v} que possui derivadas de primeira ordem em \mathcal{R} , o *divergente* de \mathbf{v} é definido como o *campo escalar* dado por

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} (\nabla \mathbf{v}),$$

sendo que *tr* indica o traço do tensor $\nabla \mathbf{v}$.

Fazendo uso de uma base cartesiana ortonormal, tem-se

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

ou, em notação indicial

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = v_{i,i}.$$

Divergente de uma Campo Tensorial. No caso de um campo tensorial \mathbf{S} com derivadas de primeira ordem em \mathcal{R} , o divergente de \mathbf{S} é definido como o único *campo vetorial* que possui a seguinte propriedade:

$$(\operatorname{div} \mathbf{S}) \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div} (\mathbf{S}^T \mathbf{a}),$$

para qualquer vetor fixo \mathbf{a} . Desenvolvendo o lado direito da última igualdade, tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) &= \operatorname{div} \begin{Bmatrix} S_{11}a_1 + S_{21}a_2 + S_{31}a_3 \\ S_{12}a_1 + S_{22}a_2 + S_{32}a_3 \\ S_{13}a_1 + S_{23}a_2 + S_{33}a_3 \end{Bmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} (S_{11}a_1 + S_{21}a_2 + S_{31}a_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (S_{12}a_1 + S_{22}a_2 + S_{32}a_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (S_{13}a_1 + S_{23}a_2 + S_{33}a_3) \\
&= \left(\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial x_3} \right) a_1 + \left(\frac{\partial S_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{23}}{\partial x_3} \right) a_2 + \left(\frac{\partial S_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{33}}{\partial x_3} \right) a_3 \\
&= (\operatorname{div} \mathbf{S}) \cdot \mathbf{a} \\
\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{S} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial S_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial S_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{33}}{\partial x_3} \end{Bmatrix}.
\end{aligned}$$

Em notação indicial, tem-se

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = S_{ij,j}.$$

Teorema A.1 *Sejam ϕ , \mathbf{v} , \mathbf{w} e \mathbf{S} campos que possuam derivadas de primeira ordem num aberto \mathcal{R} , com valores escalares (ϕ), vetoriais (\mathbf{v} , \mathbf{w}) e tensoriais (\mathbf{S}), respectivamente. Logo, as seguintes relações são válidas:*

$$\nabla(\phi \mathbf{v}) = \phi \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla \phi$$

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{v}) = \phi \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi$$

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{w}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{w}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}^T \mathbf{v}) = \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{S}$$

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{S}) = \phi \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{S} \nabla \phi$$

Rotacional. O rotacional de uma campo vetorial \mathbf{v} , denotado por $\operatorname{curl} \mathbf{v}$, é definido como o único campo vetorial com a seguinte propriedade:

$$(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \mathbf{a} = (\operatorname{curl} \mathbf{v}) \times \mathbf{a},$$

para todo vetor fixo \mathbf{a} . A operação \times indica o produto vetorial usual.

Logo, $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ é o vetor axial (discutido no apêndice sobre tensores) correspondente ao tensor antisimétrico $\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T$. Assim, considerando $\nabla \mathbf{v}$ como definido anteriormente, tem-se

$$\left[\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & -\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Se \mathbf{W} for a parte antissimétrica de $\nabla \mathbf{v}$, obtém-se

$$[\mathbf{W}] = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T].$$

Dessa forma,

$$2\mathbf{W}\mathbf{a} = (\text{curl } \mathbf{v}) \times \mathbf{a}.$$

Utilizando ainda a definição de vetor axial (vide apêndice sobre tensores), pode-se escrever $\text{curl } \mathbf{v}$ em termos de suas componentes como

$$(\text{curl } \mathbf{v}) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3.$$

Laplaciano. Seja Φ um campo escalar ou vetorial de classe C^2 . O laplaciano de Φ é definido por

$$\Delta \Phi = \text{div} \nabla \Phi.$$

Em componentes, o laplaciano de Φ é dado por

$$\Delta \Phi = \sum_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}.$$

Se $\Delta \Phi = 0$, então Φ é dito harmônico.

A.6 Teoremas de Integração

Enuncia-se nesta seção um dos teoremas fundamentais de integração em mais de uma dimensão: o *teorema da divergência de Gauss*. A demonstração deste teorema para o caso de campos escalares, vetoriais e tensoriais é deixada a cargo do leitor. A seguir, apresenta-se a *fórmula de Green*, também conhecida como *integração por partes multidimensional*. Estes teoremas são grande aplicação na formulação variacional de problemas bem como nas técnicas de resolução de equações diferenciais parciais. Do ponto de vista numérico tais teoremas também são de extrema relevância.

Teorema da Divergência. De maneira simplificada, considera-se uma *região regular* uma região fechada \mathcal{R} com contorno $\partial \mathcal{R}$ suave por partes (i.e., de classe C^1). É importante notar que \mathcal{R} pode ser limitada ou não-limitada. No primeiro caso, denota-se por $\text{vol}(\mathcal{R})$ o volume de \mathcal{R} .

Teorema A.2 :Teorema da Divergência. *Seja \mathcal{R} uma região regular limitada e seja $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{v} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{V}$ e $\mathbf{S} : \mathcal{R} \rightarrow \text{Lin}$ campos suaves. Então*

$$\int_{\partial \mathcal{R}} \varphi \mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{R}} \nabla \varphi \, dV,$$

$$\int_{\partial \mathcal{R}} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{R}} \nabla \mathbf{v} \, dV,$$

$$\int_{\partial \mathcal{R}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{R}} \text{div } \mathbf{v} \, dV,$$

$$\int_{\partial \mathcal{R}} \mathbf{S} \mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{R}} \text{div } \mathbf{S} \, dV,$$

sendo \mathbf{n} o campo vetorial normal unitário saindo de $\partial \mathcal{R}$.

Integração por Partes Multidimensional. Seja Ω um conjunto aberto do \mathbb{R}^n cuja fronteira $\partial\Omega$ seja suave por partes (i.e., de classe C^1). Sejam ainda $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções escalares de classe C^1 definidas em $\bar{\Omega}$ (i.e., o fecho de Ω). As funções f e g devem ainda ser contínuas ao longo da fronteira $\partial\Omega$. Então, a seguinte relação é válida

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} f g n_i d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g d\Omega, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

sendo $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_n)$ o vetor unitário normal externo à fronteira $\partial\Omega$.

Exemplo A.15 *Demonstre a fórmula de Green para o caso $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$.*

Assumindo todas as premissas do enunciado da integração por partes multidimensional e ainda que a integral dupla sobre Ω do primeiro membro de A.2 possa ser calculada de maneira iterada nas variáveis x_1 e x_2 , tem-se, para $i = 2$

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_2} d\Omega = \int_a^b \left(\int_{c(x_1)}^{d(x_1)} f \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1.$$

Usando a fórmula de integração por partes unidimensional na integral entre parênteses da última expressão, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_{c(x_1)}^{d(x_1)} f \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 &= \int_a^b \left(f(x_1, x_2)g(x_1, x_2) \Big|_{c(x_1)}^{d(x_1)} - \int_{c(x_1)}^{d(x_1)} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_a^b f(x_1, d(x_1))g(x_1, d(x_1)) dx_1 - \int_a^b f(x_1, c(x_1))g(x_1, c(x_1)) dx_1 - \int_a^b \left(\int_{c(x_1)}^{d(x_1)} \frac{\partial f}{\partial x_2} g dx_2 \right) dx_1 \\ &= - \int_b^a f(x_1, d(x_1))g(x_1, d(x_1)) dx_1 - \int_a^b f(x_1, c(x_1))g(x_1, c(x_1)) dx_1 - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} g d\Omega, \end{aligned}$$

sendo que os limites na primeira integral da última expressão foram invertidos para se levar em conta o sentido anti-horário da integração ao longo de $\partial\Omega$.

Observa-se que as duas primeiras integrais na última expressão são de fato integrais de linha ao longo do percurso superior e inferior de $\partial\Omega$, respectivamente. Chamando o percurso (orientado) superior de Γ_s e o inferior de Γ_i de modo que $\Gamma_s \cup \Gamma_i = \partial\Omega$, é possível escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_2} d\Omega &= - \int_{\Gamma_s} (fg) dx_1 - \int_{\Gamma_i} (fg) dx_1 - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} g d\Omega \\ &= - \int_{\partial\Omega} (fg) dx_1 - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} g d\Omega. \end{aligned}$$

Lembrando que a primeira integral na última expressão pode ser parametrizada em relação ao comprimento de arco ds (ou em notação menos usual $d(\partial\Omega)$), tem-se

$$\int_{\partial\Omega} (fg) dx_1 = \int_{\partial\Omega} (fg) \frac{dx_1}{ds} ds.$$

Denotando agora um vetor no plano \mathbb{R}^2 por $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2)$, sabe-se que a derivada desse vetor em relação ao comprimento de arco ds resulta num vetor unitário tangente ao contorno $\partial\Omega$ em qualquer um de seus pontos, ou seja,

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{t} = (t_1, t_2) = \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds} \right).$$

Uma vez tendo o vetor tangente \mathbf{t} , pode-se construir de forma trivial o vetor normal externo ao contorno $\partial\Omega$ da seguinte maneira

$$\mathbf{n}_e = (n_1, n_2) = (t_2, -t_1) = \left(\frac{dx_2}{ds}, -\frac{dx_1}{ds}\right).$$

Observa-se que a obviedade na determinação de \mathbf{n}_e ocorre pelo fato dos vetores \mathbf{t} e \mathbf{n}_e serem ortogonais e unitários. Uma única atenção deve ser tomada para se obter o vetor normal externo e não o interno pois a escolha de $\mathbf{n}_i = (-t_2, t_1)$ também resulta num vetor unitário normal a \mathbf{t} , i.e.,

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_e \rangle = t_1 n_1 + t_2 n_2 = t_1 t_2 + t_2 (-t_1) = 0,$$

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_i \rangle = t_1 n_1 + t_2 n_2 = t_1 (-t_2) + t_2 t_1 = 0.$$

Retornando finalmente à expressão que fornece a integral no contorno $\partial\Omega$ em termos do parâmetro s , tem-se

$$\int_{\partial\Omega} (fg) dx_1 = \int_{\partial\Omega} (fg) \frac{dx_1}{ds} ds = - \int_{\partial\Omega} (fg) n_2 ds$$

e portanto

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_2} d\Omega = \int_{\partial\Omega} (fg) n_2 ds - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} g d\Omega.$$

Um resultado análogo pode ser obtido para o caso em que $i = 1$, i.e.,

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_1} d\Omega = \int_{\partial\Omega} (fg) n_1 ds - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} g d\Omega$$

demonstrando assim a validade da fórmula de Green no caso bidimensional.

□