Capítulo 7

FUNÇÕES DE SINGULARIDADE

Para traçar os diagramas de esforços solicitantes através das equações diferenciais de equilíbrio, deve-se integrar a expressão do carregamento. Os exemplos apresentados até agora consideram apenas carregamentos distribuídos ao longo de toda a viga, estando os apoios, as cargas concentradas e os momentos puros aplicados nas extremidades da viga e tratados através das condições de contorno.

As funções de singularidade permitem o tratamento de carregamentos descontínuos, tais como forças e momentos pontuais, assim como a presença de apoios em qualquer seção da viga e não apenas nas extremidades. Como exemplo, considere a viga da Figura 7.1 submetida à ação das forças e momentos concentrados indicados. Verificam-se as seguintes expressões para o momento fletor ao longo das quatro seções distintas,

$$\begin{array}{ll} M = R_{Ay}x & 0 \leq x \leq a \\ M = R_{Ay}x - P_1(x-a) & a \leq x \leq b \\ M = R_{Ay}x - P_1(x-a) + M_b & b \leq x \leq c \\ M = R_{Ay}x - P_1(x-a) + M_b + P_2(x-c) & c \leq x \leq L \end{array} \tag{7.1}$$

As expressões anteriores podem ser escritas numa única equação como,

$$M = R_1 < x - 0 >^1 - P_1 < x - a >^1 + M_b < x - b >^0 + P_2 < x - c >^1 \tag{7.2}$$

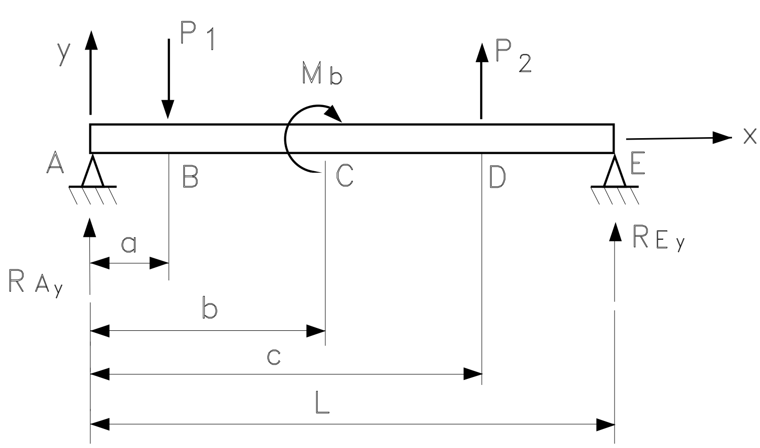


Figura 7.1: Viga submetida a forças e momentos concentrados.

Para isso, introduz-se a seguinte função simbólica,

$$< x - a >^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < a \\ (x-a)^n & \text{se } a < x < \infty \end{cases} \quad n > 0 \tag{7.3}$$

$$< x - a >^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < a \\ 1 & \text{se } a < x < \infty \end{cases} \tag{7.4}$$

Observa-se que a expressão $< x - a >^n$ não existe, ou seja, é nula até x atingir a. Para $x > a$, a expressão torna-se o binômio $(x - a)^n$ ou 1, respectivamente para $n > 0$ e $n = 0$. Além disso, tem-se a seguinte regra para a integração de $< x - a >^n$,

$$\int < x - a >^n dx = \begin{cases} \frac{< x-a >^{n+1}}{n+1} & n \geq 0 \\ < x - a >^{n+1} & n < 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

Esta notação permite representar uma força concentrada através de um termo $< x - a >^{-1}$ e o momento puro como $< x - a >^{-2}$, conforme ilustrado na Figura 7.2. Desta maneira, a integridade do carregamento da viga na Figura 7.1 é expressa como,

$$q(x) = -P_1 < x - a >^{-1} + M_b < x - b >^{-2} + P_2 < x - c >^{-1} \tag{7.6}$$

sendo as reações de apoio, neste caso, tratadas como condições de contorno.

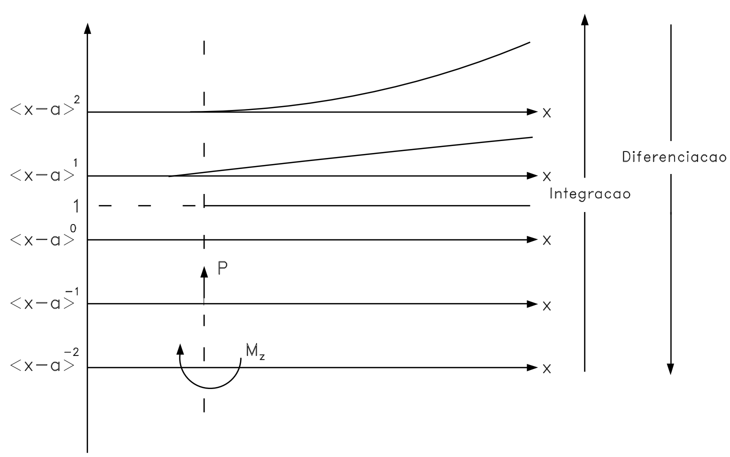


Figura 7.2: Notação simbólica para $< x - a >^n$.

Para demonstrar tal fato, considere a função $h_n(x)$ na variável independente x dada por,

$$h_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-nx}} \tag{7.7}$$

onde n é um número inteiro. Para cada valor de n, tem-se uma função distinta, como, por exemplo,

$$n = 1 \rightarrow \quad h_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \qquad n = 5 \rightarrow \quad h_5(x) = \frac{1}{1 + e^{-5x}}$$

$$n = 20 \rightarrow \quad h_{20}(x) = \frac{1}{1 + e^{-20x}} \qquad n = 100 \rightarrow \quad h_{100}(x) = \frac{1}{1 + e^{-100x}}$$

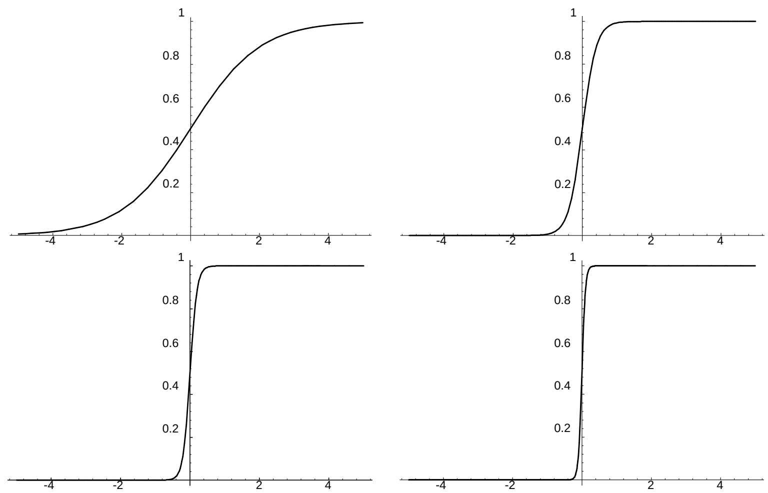


Figura 7.3: Gráficos de $h_n(x)$ para $n = 1, 5, 10, 20$.

estando alguns gráficos de $h_n(x)$ ilustrados Figura 7.3.

Logo, observa-se que $h_n(x)$ é uma família com infinitas funções definidas pelo parâmetro n. Desta forma, pode-se imaginar $h_n(x)$ como uma função de duas variáveis, n e x_1 ou seja, $h_n(x) = h(n, x)$. Torna-se interessante analisar o comportamento da sequência de funções $h_n(x)$ obtidas ao se variar o parâmetro n. Verifica-se que a expressão em (7.7) possui os seguintes valores limites:

$$x \to 0 \Rightarrow h_n = \frac{1}{2} \quad x \to \infty \Rightarrow h_n = 1 \quad x \to -\infty \Rightarrow h_n = 0$$

A definição original da função de Heaviside ou de passo unitário $H(x)$, mostrada na Figura 7.4a), é dada por,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{7.8}$$

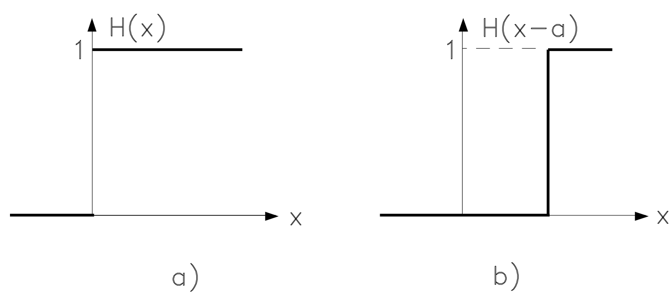


Figura 7.4: Função de Heaviside: a) $H(x)$; b) $H(x - a)$

Assim,a partir desta definição e dos gráficos da Figura 7.3, verifica-se que o limite das funções $h_n(x)$ para $x \to \infty$ é a função de Heaviside, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = H\left(x\right) \tag{7.9}$$

A partir daí, o termo $< x - a >^0$ pode ser expresso como,

$$< x - a >^0 = H(x - a) = 1 \quad \text{para } x > a \tag{7.10}$$

Por sua vez, a função delta de Dirac é definida usualmente como,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{7.11}$$

ou ainda,

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = x_0 \end{cases} \tag{7.12}$$

A seguinte propriedade do delta de Dirac é válida,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

Esta definição de $\delta(x)$ não coincide com o conceito clásico e função, sendo válida no sentido de função generalizada, a qual constitui-se numa extensão da análise clássica de funções. No entanto, pode-se empregar a família de funções $h_n(x)$ e utilizá-las para definir o delta de Dirac como uma função generalizada. Para isto considere a derivada da expressão (7.7),

$$d_1 h_n(x) = \frac{dh_n(x)}{dx} = \frac{n}{e^{nx}(1 + e^{-nx})^2} \tag{7.13}$$

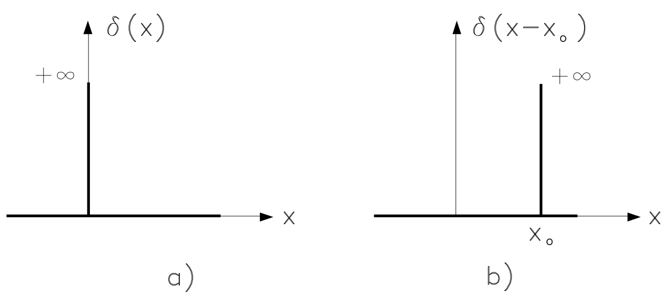


Figura 7.5: Delta de Dirac: a) $\delta(x)$; b) $\delta(x - x_o)$.

Tomando-se novamente a sequência ou a família de funções $d_1 h_n(x)$ e variando-se o parâmetro n tem-se, por exemplo,

$$n = 1 \to d_1 h_1(x) = \frac{1}{e^{x}(1 + e^{-x})^2} \qquad n = 5 \to d_1 h_5(x) = \frac{5}{e^{5x}(1 + e^{-5x})^2}$$
$$n = 20 \to d_1 h_20(x) = \frac{2}{0} e^{20x}(1 + e^{-20x})^2 \qquad n = 100 \to d_1 h_{100}(x) = \frac{100}{e^{100x}(1 + e^{-100x})^2}$$

A Figura 7.6 ilustra os gráficos das funções $d_1 h_n(x)$ para vários valores de n. Verifica-se, então, que as derivadas de $h_n(x)$,à medida que n cresce, aproximam a definição do delta de Dirac. Logo,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{dh_n(x)}{dx} = \delta(x) \tag{7.14}$$

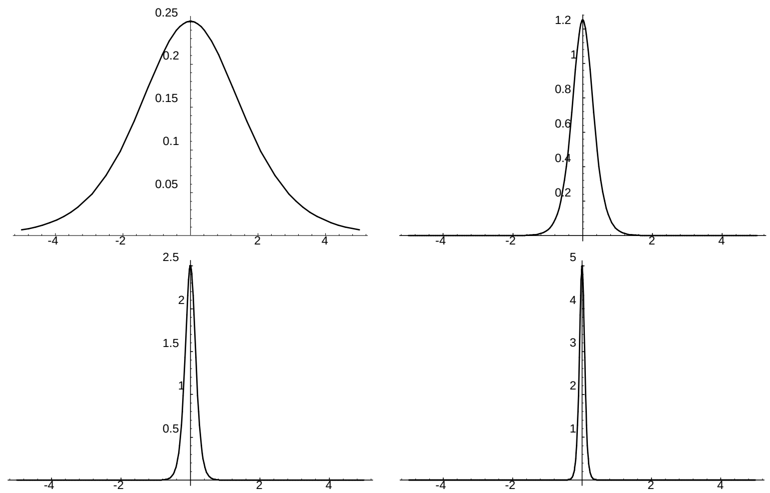


Figura 7.6: Derivadas de $h_n(x)$ para vários valores de n.

No entanto, a partir de (7.4), tem-se que o limite de $h_n(x)$ para $n \to \infty$ é a função de Heaviside. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{dh_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \frac{d}{dx} H(x) = \delta\left(x\right) \tag{7.15}$$

onde for possível trocar a ordem do limite com a derivação, pois pela própria definição (7.7), a família de funções $h_n(x)$ é continuamente diferenciável.

Como $< x - a >^{-n} = (x-a)^{-n}$ para $x > a$, observa-se que para $x = a$ a expressão $\frac{1}{x-a}^{n}$ assume o valor $+\infty$, ou seja, tem-se uma singularidade neste ponto, surgindo, daí, a denominação de funções de singularidade.

Derivando a expressão (7.10) e utilizando (7.15) vem que,

$$\frac{d}{dx} < x - a >^{0} = \frac{d}{dx} H(x-a) = \delta(x-a) = < x - a >^{-1} \tag{7.16}$$

Logo, a intensidade da carga concentrada P_1 da viga na Figura 7.1 pode ser escrita como,

$$q(x) = P_1 < x - a >^{-1} = P_1 \delta(x-a) = P_1$$

Analogamente, a intensidade do momento M_b será dada por $q(x) = M_b < x - b >^{-2}$. Para comprovar tal fato, considere a derivada segunda de $h_n(x)$, ou seja,

$$\frac{d^2}{dx^2} h_n(x) = \frac{n^2}{e^{nx}(1+e^{-nx})^2} - \frac{2n^2}{e^{2nx}(1+e^{-nx})^3} \tag{7.17}$$

Novamente, variando-se n tem-se a família de funções $\dfrac{d^2}{dx^2} h_n(x)$, estando os gráficos para vários valores de n ilustrados na Figura 7.7. A medida que n cresce, estas funções aproximam a derivada do delta de Dirac, pois

$$\frac{d}{dx} \delta\left(x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} H(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} h_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{d^2}{dx^2} h_n(x) \tag{7.18}$$

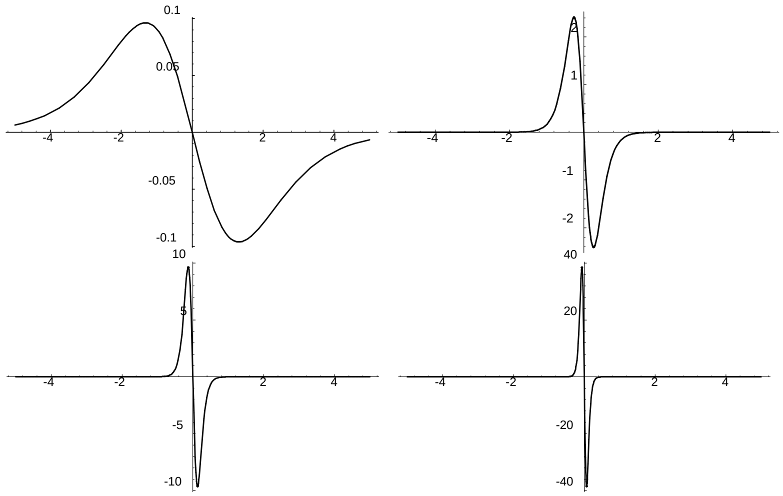


Figura 7.7: Gráficos de $\frac{d^2}{dx^2} h_n(x)$ para $n = 1, 5, 10, 20$.

A partir de (7.17) e da Figura 7.7, verifica-se que a derivada segunda da função de Heaviside, ou ainda a derivada primeira do delta de Dirac, aproxima o efeito de um momento concentrado em torno da origem. A partir de (7.16), tem-se que,

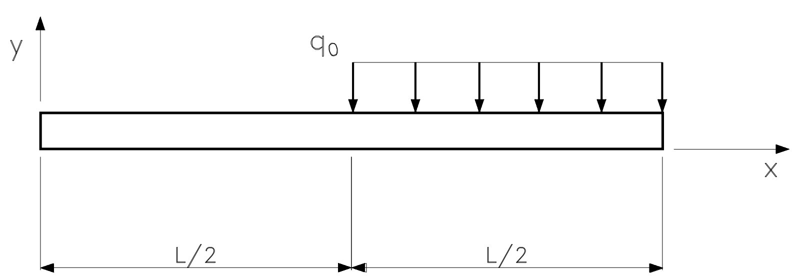
$$\frac{d}{dx} < x - a >^{-1} = \frac{d^2}{dx^2} H(x - a) = \frac{d}{dx} \delta(x - a) = < x - a >^{-2}$$

Verifica-se que $< x - a >^{-2}$ possui uma singularidade em $x = a$. Desta maneira, as funções de singularidade são empregadas para denotar a intensidade $q(x)$ do carregamento ao longo da viga, como por exemplo, na expressão (7.6) para a viga da Figura 7.1.

7.0.8 Exemplos

A seguir apresentam-se as expressões da intensidade do carregamento para vários casos.

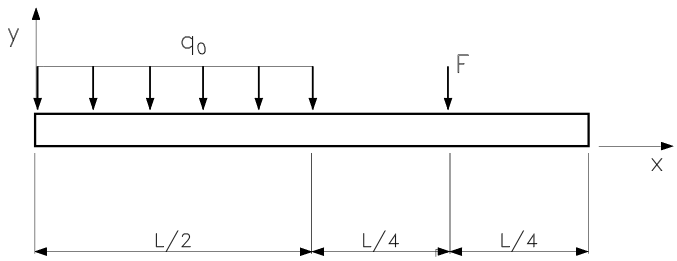
1)



- **carregamento**:

$$q(x) = -q_0 < x - \frac{L}{2} >^0 = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ -q_0 (x - \frac{L}{2}) = -q_0 & x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

2)

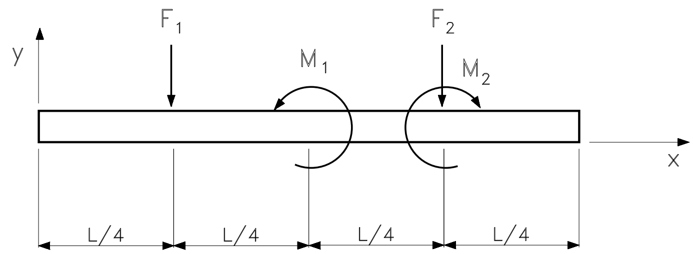


- **carregamento**:

$$q(x) = -q_0 < x - 0 >^0 + q_0 < x - \frac{L}{2} >^0 - F < x - \frac{3}{4}L >^{-1} = \begin{cases} -q_0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < \frac{3}{4}L \\ -F(x - \frac{L}{4})^{-1} & \frac{3}{4}L < x < L \end{cases}$$

- neste caso, o termo $q_0 < x - o >^0$ implica que a carga distribuída está presente ao longo de todo o comprimento da viga. Como q_0 atua somente até $x = L/2$, torna-se necessário somar o termo $q_0 < x - \frac{L}{2} >^0$ de tal forma que a resultante em termos da carga distribuída seja nula no trecho $L/2 < x < L$.

3)

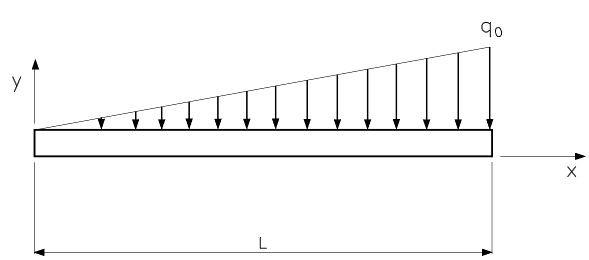


- **carregamento**:

$$q(x) = -F_1 < x - \frac{L}{4} >^{-1} - M_1 < x - \frac{L}{2} >^{-2} + M_2 < x - \frac{3}{4}L >^{-2} - F_2 < x - \frac{3}{4}L >^{-1}$$

$$q(x) = \begin{cases} q(x) = 0 & 0 < x < \frac{L}{4} \\ -F_1(x - \frac{L}{4})^{-1} & \frac{L}{4} < x < \frac{L}{2} \\ -F_1(x - \frac{L}{4})^{-1} - M_1(x - \frac{L}{2})^{-2} & \frac{L}{2} < x < \frac{3}{4}L \\ -F_1(x - \frac{L}{4})^{-1} - M_1(x - \frac{L}{2})^{-2} + M_2(x - \frac{3}{4}L)^{-2} - F_2(x - \frac{3}{4}L)^{-1} & \frac{3}{4}L < x < L \end{cases}$$

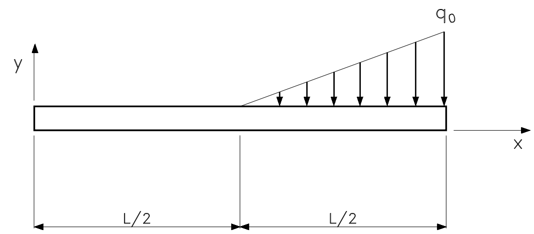
4)



- **carregamento**:

$$q(x) = -\frac{q_0}{L} < x - 0 >^1 = -\frac{q_0}{L}(x-0)^1 = -q_0\frac{x}{L}$$

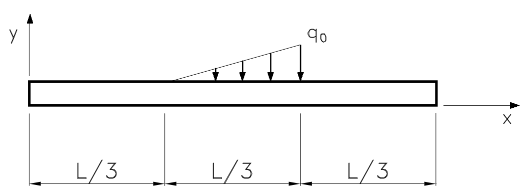
5)

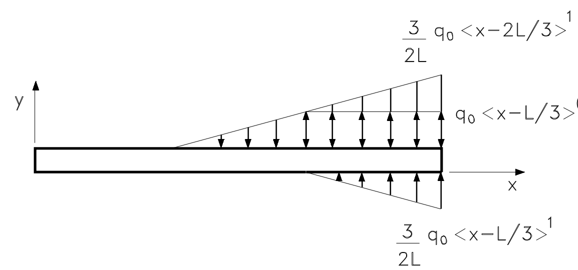


- **carregamento**:

$$q(x) = -\frac{q_0}{\frac{L}{2}} < x - \frac{L}{2} >^1 = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ -\frac{2q_0}{L} < x - \frac{L}{2} >^1 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

6)





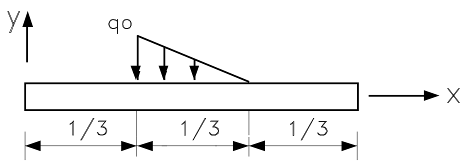
- **carregamento**:

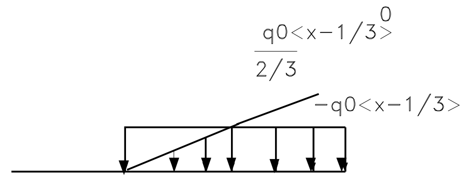
$$q(x) = -\frac{q_0}{\frac{L}{3}} < x - \frac{L}{3} >^1 + \frac{q_0}{\frac{L}{3}} < x - \frac{2}{3}L >^1 + q_0 < x - \frac{2}{3}L >^0$$

$$q(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{3} \\ -\frac{q_0}{\frac{L}{3}}(x - \frac{L}{3}) & \frac{L}{3} < x < \frac{2}{3}L \\ -\frac{q_0}{\frac{L}{3}}(x-\frac{L}{3})^1 + \frac{q_0}{\frac{L}{3}}(x - \frac{2}{3}L)^1 + q_0(x-\frac{2}{3}L)^0 & \frac{2}{3}L < x < L \end{cases}$$

- novamente o termo $-3\frac{q_0}{L} < x - \frac{L}{3} >^1$ implica que a carga distribuída está presente no trecho $\frac{2}{3}L < x < L$. Para isso, soma-se o termo $3\frac{q_0}{L} < x - \frac{2}{3}L >^1$, resultando ainda numa carga constante a qual é anulada somando $q_0 < x - \frac{2}{3}L >$.

7)





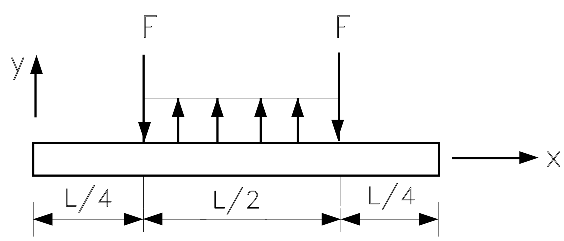
- **carregamento**:

$$q(x) = -q_0 < x - \frac{L}{3} >^0 + \frac{q_0}{\frac{L}{3}} < x - \frac{L}{3} >^1 - \frac{q_0}{\frac{2}{3}L} < x - \frac{2}{3}L >^1$$

$$q(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{3} \\ -q_0(x - \frac{L}{3})^0 + \frac{q_0}{\frac{L}{3}}(x - \frac{L}{3})^1 & \frac{L}{3} < x < \frac{2}{3}L \\ -q_0 + \frac{q_0}{\frac{L}{3}}(x - \frac{L}{3})^1 - \frac{q_0}{\frac{L}{3}}(x - \frac{2}{3}L)^1 & \frac{2}{3}L < x < L \end{cases}$$

- neste exemplo, a carga distribuída desejada no trecho $\frac{L}{3} < x < \frac{2}{3}L$ é dada pela soma de uma carga constante de intensidade $-q_0 < x - \frac{L}{3} >^0$ com o termo linear $\frac{q_0}{\frac{L}{3}} < x - \frac{L}{3} >^1$. No entanto, deve-se considerar ainda a subtração da expressão $\frac{q_0}{\frac{2}{3}L} < x - \frac{2}{3}L >$ para que a resultante no intervalo $\frac{2}{3}L < x < L$ seja nula.

8)



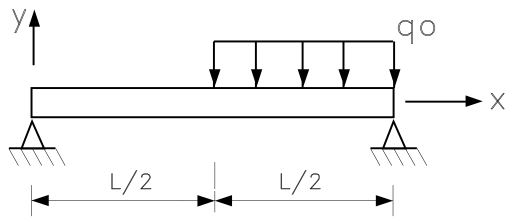
- **carregamento**:

$$q(x) = -F < x - \frac{L}{4} >^{-1} + q_0 < x - \frac{L}{4} >^0 - F < x - \frac{3}{4}L >^{-1} - q_0 < x - \frac{3}{4}L >^0$$

$$q(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{4} \\ -F < x - \frac{L}{4} >^{-1} + q_0 < x - \frac{L}{4} >^0 & \frac{L}{4} < x < \frac{3}{4}L \\ -F < x - \frac{L}{4} >^{-1} + q_0 < x - \frac{L}{4} >^0 - F < x - \frac{2L}{4} >^{-1} & \frac{3}{4}L < x < L \end{cases}$$

- observa-se que deve-se subtrair o termo $q_0 < x - \frac{3}{4}L >^0$ para que a intensidade da carga seja nula no trecho $\frac{3}{4}L < x < \frac{L}{4}$.

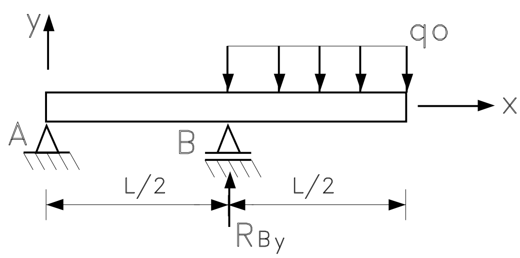
9)



- **carregamento**:

$$q(x) = -q_0 < x - \frac{L}{2} >^0 = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ -q_0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

10)

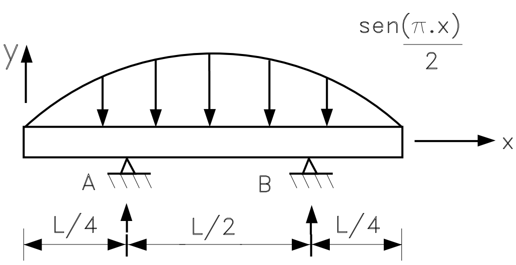


- **carregamento**:

$$q(x) = -q_0 < x - \frac{L}{2} >^0 + R_{By} < x - \frac{L}{2} >^{-1} = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ -q_0 + R_{By}(x - \frac{L}{2})^{-1} & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

- **condições de contorno**: $V_y(x = L) = 0 \;\; M_z(x = 0) = 0 \;\; M_z(x = L) = 0$

11)



- **carregamento**:

$$q(x) = -\text{sen}\frac{\pi x}{L} + R_{Ay} < x - \frac{L}{4} >^{-1} + R_{By} < x - \frac{3}{4}L >^{-1}$$

$$q(x) = \begin{cases} -\text{sen}\frac{\pi x}{L} & 0 < x < \frac{L}{4} \\ -\text{sen}\frac{\pi x}{L} + R_{Ay}(x - \frac{L}{4})^{-1} & \frac{L}{4} < x < \frac{3}{4}L \\ -\text{sen}\frac{\pi x}{L} + R_{Ay}(x - \frac{L}{4})^{-1} + R_{By}(x - \frac{3}{4}L)^{-1} & \frac{3}{4}L < x < L \end{cases}$$

- **condições de contorno**: $V_y(x=0)=0 \;\; M_z(x=0)=0 \;\; V_y(x=L)=0 \;\; M_z(x=L)=0$

7.0.9 Exercícios Resolvidos

1. Traçar os diagramas de esforços solicitantes para a viga indicada na Figura 7.8.

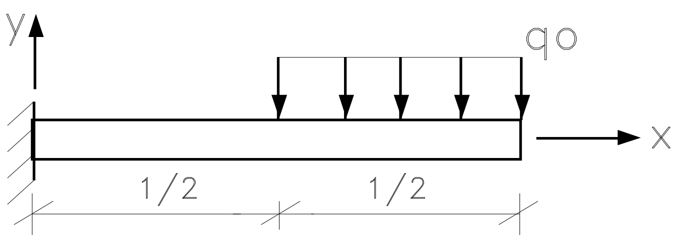


Figura 7.8: Funções de singularidade: viga do exercício 1.

(a) Equação do carregamento: $q(x) = -q_0 < x - \frac{L}{2} >^0$

(b) Condições de contorno: $V_y(x=L)=0 \quad M_z(x=L)=0$

(c) Integração da equação diferencial: $\frac{d^2M}{dx^2} = -q_0 < x - \frac{L}{2} >^0$

- 1^a integração (cortante): $V_y = \frac{dM_z}{dx} = -q_0 < x - \frac{L}{2} >^1 + C_1$
- 2^a integração (momento fletor): $M_z = -\frac{q_0}{2} < x - \frac{L}{2} >^2 + C_1 x + C_2$

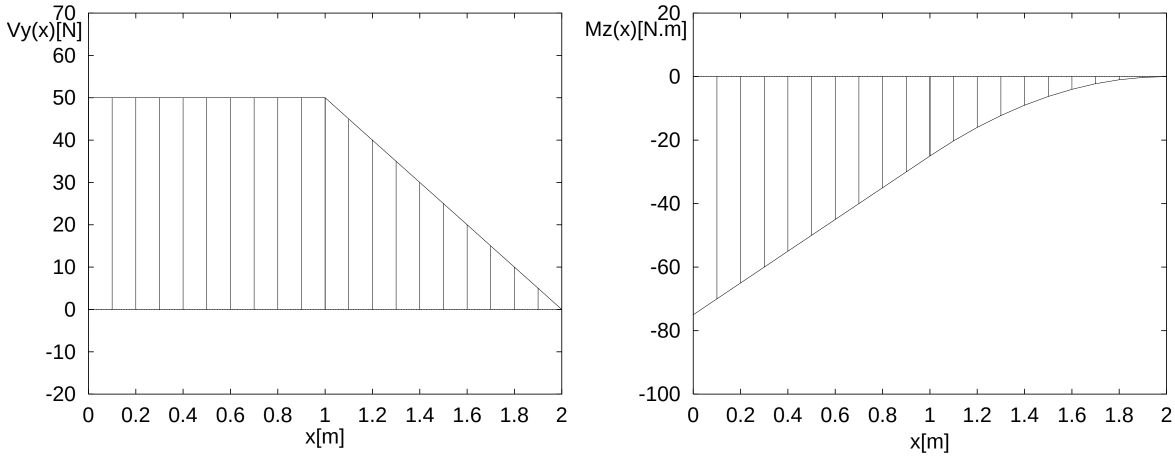
(d) Determinação das constantes de integração
$V_y(x=L) = -q_0(L - \frac{L}{2}) + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = q_0\frac{L}{2}$
$M_z(x=L) = -\frac{q_0}{2}(L - \frac{L}{2})^2 + q_0\frac{L}{2}L + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{3}{8}q_0L^2$

(e) Equações finais

- força cortante: $V_y = -q_0 < x - \frac{L}{2} >^1 + q_0\frac{L}{2}$
- momento fletor: $M_z = -\frac{q_0}{2} < x - \frac{L}{2} >^2 + q_0\frac{L}{2}x - \frac{3}{8}q_0L^2$

(f) Diagramas da força cortante e momento fletor: para $L = 2m$ e $q_0 = 50N$ tem-se os diagramas abaixo.

$$
\begin{array}{ll}
V_y(x \rightarrow 0^+) = q_0\frac{L}{2} & M_z(x \rightarrow 0^+) = -\frac{3}{8}q_0L^2 \\
V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = q_0\frac{L}{2} & M_z(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = -q_0\frac{L^2}{8} \\
V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}^+) = q_0\frac{L}{2} & M_z(x \rightarrow \frac{L}{2}^+) = -q_0\frac{L^2}{8} \\
V_y(x \rightarrow L^-) = 0 & M_z(x \rightarrow L^-) = 0
\end{array}
$$



2. Traçar os diagramas de esforços solicitantes para a viga indicada na Figura 7.9.

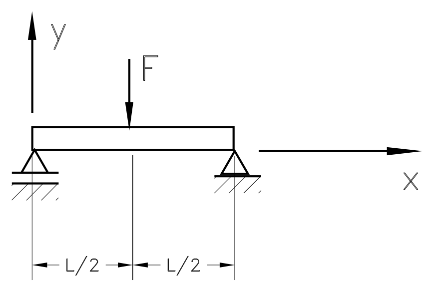


Figura 7.9: Funções de singularidade: viga do exercício 2.

(a) Equação do carregamento: $q(x) = -F < x - \frac{L}{2} >^{-1}$

(b) Condições de contorno: $M_z(x=0) = 0 \quad M_z(x=L) = 0$

(c) Integração da equação diferencial: $\frac{d^2M}{dx^2} = -F < x - \frac{L}{2} >^{-1}$

- 1^a integração (cortante): $V_y = \frac{dM_z}{dx} = -F < x - \frac{L}{2} >^0 + C_1$
- 2^a integração (momento fletor): $M_z = -F < x - \frac{L}{2} >^1 + C_1 x + C_2$

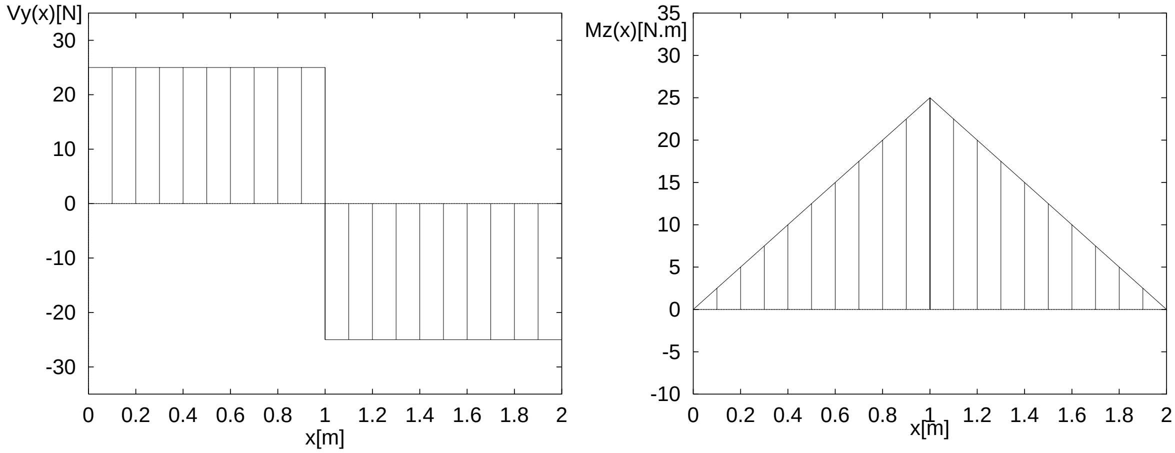
(d) Determinação das constantes de integração
$M_z(x=0) = -F(0) + C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$
$M_z(x=L) = -F\frac{L}{2} + C_1 L + 0 = 0 \rightarrow C_1 = \frac{F}{2}$

(e) Equações finais

- força cortante: $V_y = -F < x - \frac{L}{2} >^0 + \frac{F}{2}$
- momento fletor: $M_z = -F < x - \frac{L}{2} >^1 + \frac{F}{2}x$

(f) Diagramas da força cortante e do momento fletor: para $L = 2m$ e $F = 50N$ tem-se os diagramas abaixo.

$$
\begin{array}{ll}
V_y(x \rightarrow 0^+) = \frac{F}{2} & M_z(x \rightarrow 0^+) = 0 \\
V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = \frac{F}{2} & M_z(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = F\frac{L}{4} \\
V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}^+) = -\frac{F}{2} & M_z(x \rightarrow \frac{L}{2})^+ = F\frac{L}{4} \\
V_y(x \rightarrow L^-) = -\frac{F}{2} & M_z(x \rightarrow L^-) = 0
\end{array}
$$



3. Traçar os diagramas de esforços solicitantes para a viga indicada na Figura 7.10.

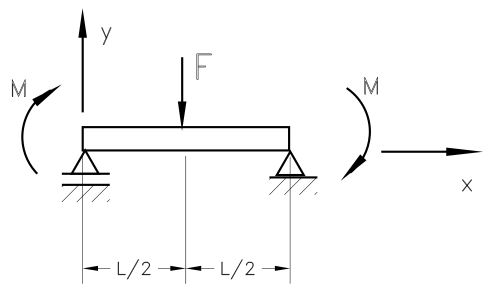


Figura 7.10: Funções de singularidade: viga do exercício 3.

(a) Equação do carregamento: $q(x) = -F < x - \frac{L}{2} >^{-1}$

(b) Condições de contorno: $M_z(x = 0) = M \quad M_z(x = L) = -M$

(c) Integração da equação diferencial: $\frac{d^2M}{dx^2} = -F < x - \frac{L}{2} >^{-1}$

- 1^a integração (cortante): $V_y = \frac{dM_z}{dx} = -F < x - \frac{L}{2} >^0 + C_1$
- 2^a integração (momento fletor): $M_z = -F < x - \frac{L}{2} >^1 + C_1 x + C_2$

(d) Determinação das constantes de integração

$M_z(x = 0) = -F(0) + C_1(0) + C_2 = M \rightarrow C_2 = M$

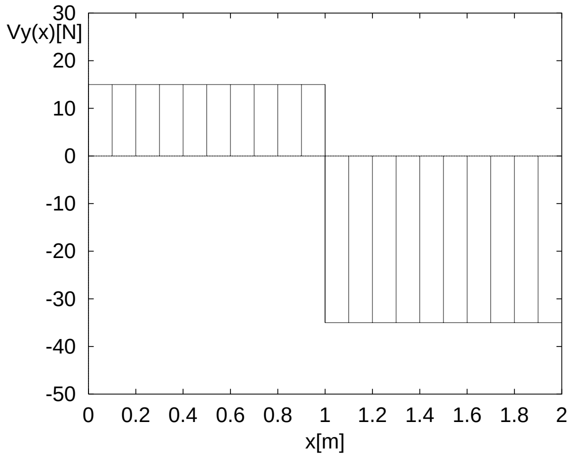
$M_z(x = L) = -F\frac{L}{2} + C_1 L + M = -M \rightarrow C_1 = \frac{2M}{L} + \frac{F}{2}$

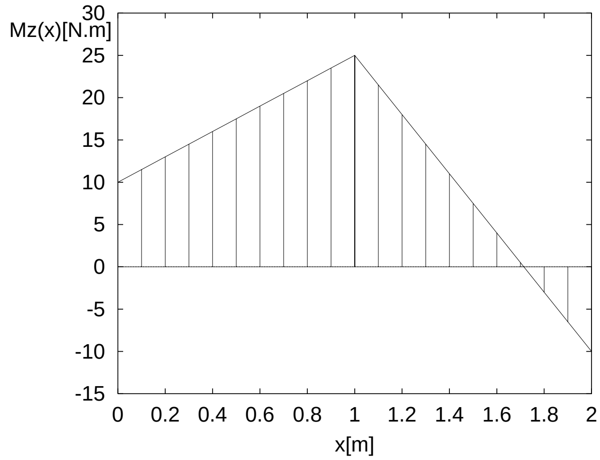
(e) Equações finais

- força cortante: $V_y = -F < x - \frac{L}{2} >^0 \frac{2M}{L} + \frac{F}{2}$
- momento fletor: $M_z = -F < x - \frac{L}{2} >^1 + (\frac{2M}{L} + \frac{F}{2})x + M$

(f) Diagramas da forçacortante e do momento fletor: para $L = 2m$, $F = 50N$ e $M = 10Nm$ tem-se os seguintes diagramas.

$$
\begin{array}{ll}
V_y(x \rightarrow 0^+) = \frac{2M}{L} + \frac{F}{2} & M_z(x \rightarrow 0^+) = M \\
V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = -\frac{2M}{L} + \frac{F}{2} & M_z(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = F\frac{L}{4} \\
V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}^+) = -\frac{2M}{L} - \frac{F}{2} & M_z(x \rightarrow \frac{L}{2}^+) = F\frac{L}{4} \\
V_y(x \rightarrow L^-) = -\frac{2M}{L} - \frac{F}{2} & M_z(x \rightarrow L^-) = -M
\end{array}
$$





4. Traçar os diagramas de esforços solicitantes para a viga indicada na Figura 7.11.

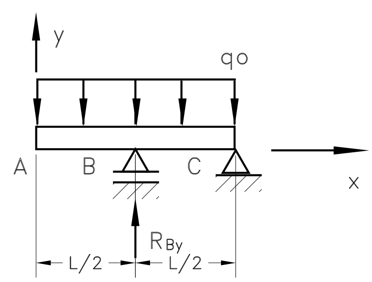


Figura 7.11: Funções de singularidade: viga do exercício 4.

(a) Equação do carregamento:
$q(x) = -q_0 < x - 0 >^0 + R_{By} < x - \frac{L}{2} >^{-1} = -q_0 + R_{By} < x - \frac{L}{2} >^{-1}$

(b) Condições de contorno: $V_y(x=0) = 0 \quad M_z(x=0) = 0 \quad M_z(x=L) = 0$

(c) Integração da equação diferencial: $\frac{d^2M}{dx^2} = -q_0 + R_{By} < x - \frac{L}{2} >^{-1}$

- 1^a integração (cortante): $V_y = \frac{dM_z}{dx} = -q_0 < x - 0 >^1 + R_{By} < x - \frac{L}{2} >^0 + C_1$
- 2^a integração (momento fletor): $M_z = -\frac{q_0}{2} < x - 0 >^2 + R_{By} < x - \frac{L}{2} >^1 + C_1 x + C_2$

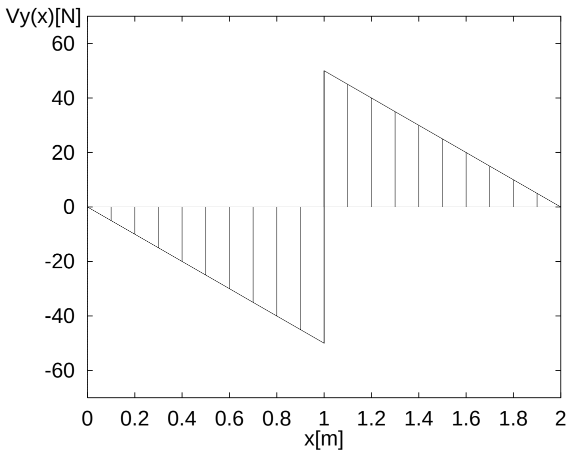
(d) Determinação das constantes de integração
$V_y(x=0) = 0 + 0 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$
$M_z(x=0) = 0 + 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$
$M_z(x=L) = -q_0\frac{L^2}{2} + R_{By}\frac{L}{2} = 0 \rightarrow R_{By} = q_0 L$

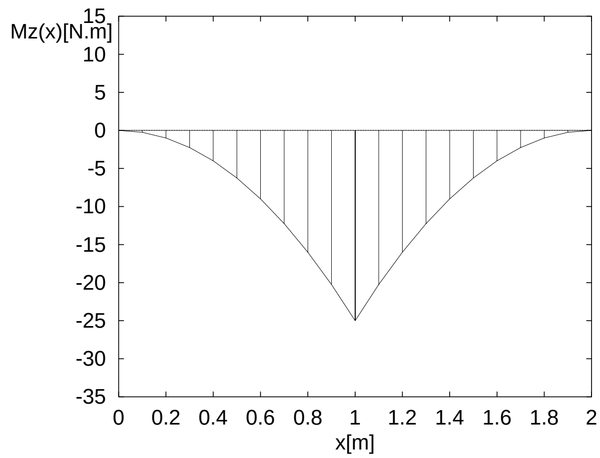
(e) Equações finais

- força cortante: $V_y = -q_0 x + q_0 L < x - \frac{L}{2} >^0$
- momento fletor: $M_z = -\frac{q_0}{2} x^2 + q_0 L < x - \frac{L}{2} >^1$

(f) Diagramas da força cortante e do momento fletor: para $L = 2m$ e $q_0 = 50N$, tem-se os seguintes diagramas.

$$\begin{array}{ll} V_y(x \rightarrow 0^+) = 0 & M_z(x \rightarrow 0^+) = 0 \\ V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = -q_0\frac{L}{2} & M_z(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = -q_0\frac{L^2}{4} \\ V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}^+) = q_0\frac{L}{2} & M_z(x \rightarrow \frac{L}{2}^+) = -q_0\frac{L^2}{4} \\ V_y(x \rightarrow L^-) = 0 & M_z(x \rightarrow L^-) = 0 \end{array}$$





5. Traçar os diagramas de esforços solicitantes para a viga indicada na Figura 7.12.

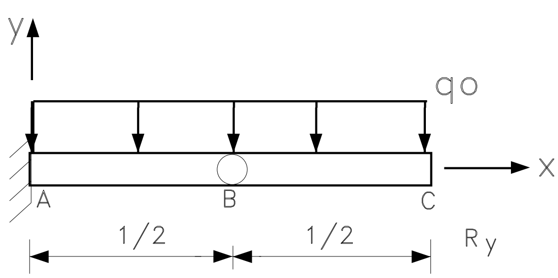


Figura 7.12: Funções de singularidade: viga do exercício 5.

(a) Equação do carregamento: $q(x) = -q_0 < x - 0 >^0 = -q_0$

(b) Condições de contorno: $M_z(x = L) = 0$

(c) Restrição adicional (rótula): $M_z(x = \frac{L}{2}) = 0$

(d) Integração da equação diferencial: $\frac{d^2M}{dx^2} = -q_0$

- 1^a integração (cortante): $V_y = \frac{dM_z}{dx} = -q_0x + C_1$
- 2^a integração (momento fletor): $M_z = -\frac{q_0}{2}x^2 + C_1x + C_2$

(e) Determinação das constantes de integração

$M_z(x = L) = -q_0\frac{L^2}{2} + C_1L + C_2 = 0 \rightarrow 2C_1L + 2C_2 = q_0L^2$

$M_z(x = \frac{L}{2}) = -q_0\frac{L^2}{8} + C_1\frac{L}{2} + C_2 = 0 \rightarrow 4C_1L + 8C_2 = q_0L^2$

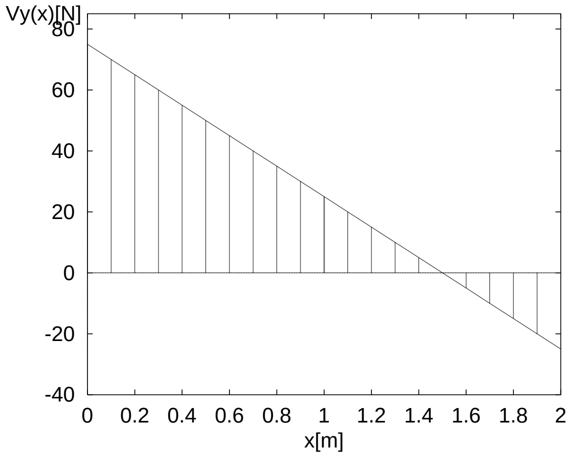
Resolvendo o sistema com as duas equações anteriores, tem-se $C_1 = \frac{3}{4}q_0L$ e $C_2 = -q_0\frac{L^2}{4}$.

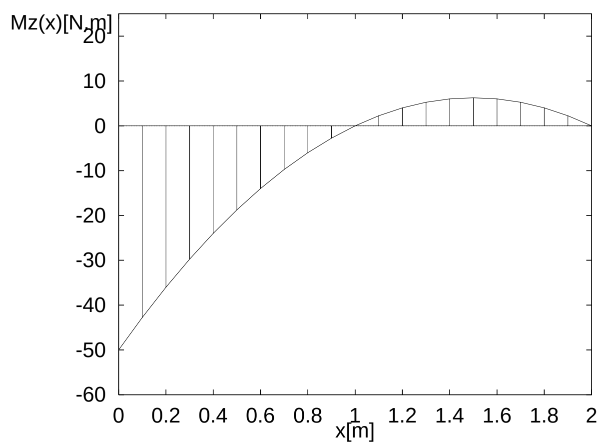
(f) Equações finais

- força cortante: $V_y = -q_0 < x - 0 >^1 + \frac{3}{4} q_0 L$
- momento fletor: $M_z = -\frac{q_0}{2} < x - 0 >^2 + \frac{3}{4} q_0 L x - q_0 \frac{L^2}{4}$

(g) Diagramas da força cortante e momento fletor: para $L = 2m$ e $q_0 = 50N$, tem-se os diagramas.

$$
\begin{array}{ll}
V_y(x \rightarrow 0^+) = \frac{3}{4} q_0 L & M_z(x \rightarrow 0^+) = -q_0 \frac{L^2}{4} \\
V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = q_0 \frac{L}{4} & M_z(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = 0 \\
V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}^+) = q_0 \frac{L}{4} & M_z(x \rightarrow \frac{L}{2}^+) = 0 \\
V_y(x \rightarrow L^-) = -q_0 \frac{L}{4} & M_z(x \rightarrow L^-) = 0
\end{array}
$$





6. Traçar os diagramas de esforços solicitantes para a viga indicada na Figura 7.13.

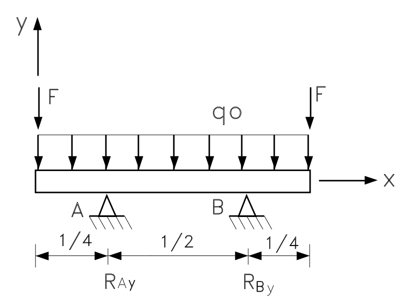


Figura 7.13: Funções de singularidade: viga do exercício 6.

(a) Equação do carregamento:
$q(x) = -q_0 < x - 0 >^0 + R_{Ay} < x - \frac{L}{4} >^{-1} + R_{By} < x - \frac{3}{4} L >^{-1}$

(b) Condições de contorno: $M_z(x = 0) = 0 \quad V_y(x = 0) = -F \quad M_z(x = L) = 0 \quad V_y(x = L) = F$

(c) Integração da equação diferencial:
$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q_0 < x - 0 >^0 + R_{Ay} < x - \frac{L}{4} >^{-1} + R_{By} < x - \frac{3}{4} L >^{-1}$

- 1^a integração: cortante $V_y = \frac{dM_z}{dx} = -q_0 x + R_{Ay} < x - \frac{L}{4} >^0 + R_{By} < x - \frac{3}{4} L >^0 + C_1$
- 2^a integração: momento fletor $M_z = -\frac{q_0}{2} x^2 + R_{Ay} < x - \frac{L}{4} >^1 + R_{By} < x - \frac{3}{4} L >^1 + C_1 x + C_2$

(d) Determinação das constantes de integração
$V_y(x=0) = -q_0(0) + R_{Ay}(0) + R_{By}(0) + C_1 = -F \rightarrow C_1 = -F$
$M_z(x=0) = -\frac{q_0}{2}(0) + R_{Ay}(0) + R_{By}(0) + C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$
$V_y(x=L) = -q_0L + R_{Ay} + R_{By} - F = F \rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 2F + q_0L$
$M_z(x=L) = -q_0\frac{L^2}{2} + \frac{3}{4}LR_{Ay} + \frac{L}{4}R_{By} - FL = 0 \rightarrow 3R_{Ay} + R_{By} = 4F + 2q_0L$

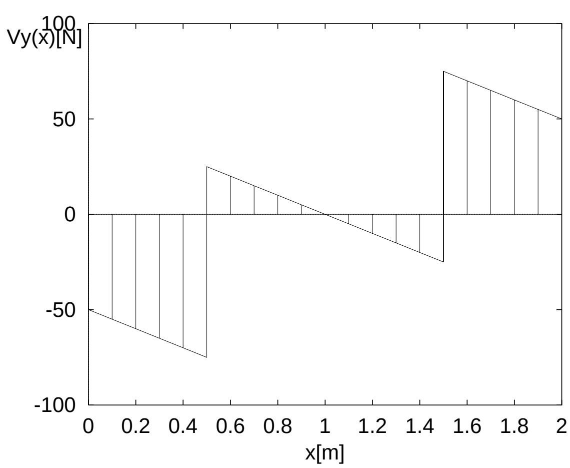
Resolvendo o sistema definido pelas duas últimas equações, obtem-se $R_{Ay} = R_{By} = q_0\frac{L}{2} + F$.

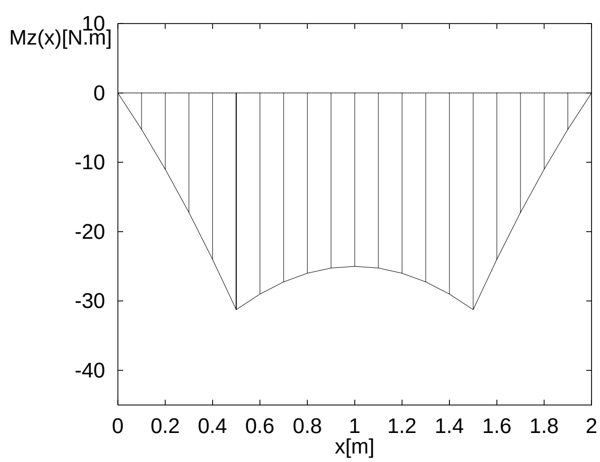
(e) Equações finais

- força cortante:
  $V_y = -q_0x + R_{Ay} < x - \frac{L}{4} >^0 + R_{By} < x - \frac{3}{4}L >^0 - F$
- momento fletor:
  $M_z = -\frac{q_0}{2}x^2 + R_{Ay} < x - \frac{L}{4} >^1 + R_{By} < x - \frac{3}{4}L >^1 - Fx$

(f) Diagramas da força cortante e do momento fletor: para $L = 2m$, $F = 50N$ e $q_0 = 50N$, tem-se os seguintes diagramas.

$V_y(x \rightarrow 0^+) = -F$	$M_z(x \rightarrow 0^+) = 0$
$V_y(x \rightarrow \frac{L}{4}^-) = -F$	$M_z(x \rightarrow \frac{L}{4}^-) = -q_0\frac{L^2}{32} - F\frac{L}{4}$
$V_y(x \rightarrow \frac{L}{4}^+) = q_0\frac{L}{4}$	$M_z(x \rightarrow \frac{L}{4}^+) = -q_0\frac{L^2}{32} - F\frac{L}{4}$
$V_y(x \rightarrow \frac{L}{2}) = 0$	$M_z(x \rightarrow \frac{L}{2}) = -f\frac{L}{4}$
$V_y(x \rightarrow \frac{3}{4}L^-) = -q_0\frac{L}{4}$	$M_z(x \rightarrow \frac{3}{4}L^-) = -q_0\frac{L^2}{32} - F\frac{L}{4}$
$V_y(x \rightarrow \frac{3}{4}L^+) = -q_0\frac{L}{4} + F$	$M_z(x \rightarrow \frac{3}{4}L^-) = -q_0\frac{L^2}{32} - F\frac{L}{4}$
$V_y(x \rightarrow L^-) = F$	$M_z(x \rightarrow L^-) = 0$





Observa-se que como a cortante anula-se em $x = \frac{L}{2}$, tem-se neste ponto um valor máximo no diagrama de momento fletor.

7. Traçar o diagrama da força normal para a barra indicada na Figura 7.14.

(a) Equação do carregamento:
$p(x) = -p_0 < x - 0 >^0 - F_1 < x - \frac{L}{3} >^{-1} + F_2 < x - \frac{2}{3}L >^{-1}$

(b) Condição de contorno: $N_x(x = L) = 0$

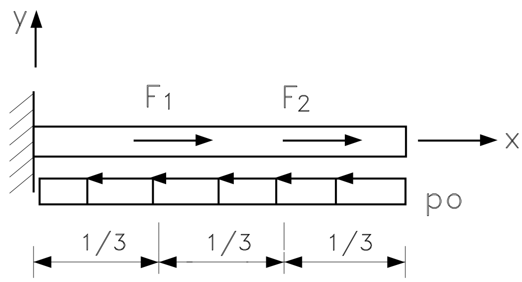


Figura 7.14: Funções de singularidade: barra do exercício 7.

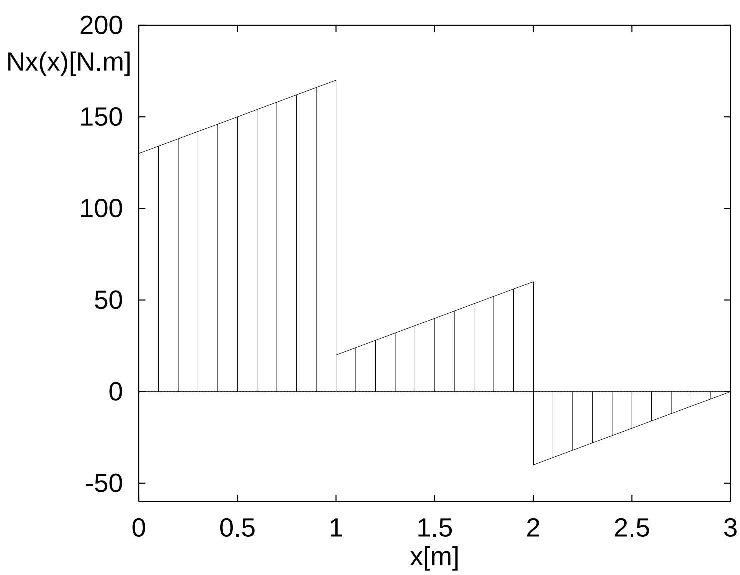
(c) Integração da equação diferencial
$\frac{dN_x}{dx} = -p(x) \rightarrow N_x = -p_0 < x - 0 >^1 -F_1 < x - \frac{L}{3} >^0 +F_2 < x - \frac{2}{3}L >^0 +C_1$

(d) Determinação da constante de integração
$x = L \rightarrow N_x = p_0 L - F_1 - F_2 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = F_1 + F_2 - p_0 L$

(e) Equação final
$N_x = -p_0 < x - 0 >^1 -F_1 < x - \frac{L}{3} >^0 +F_2 < x - \frac{2}{3}L >^0 +F_1 + F_2 - p_0 L$

(f) Diagrama da força normal: para $L = 3m$, $F_1 = 150N$, $F_2 = 100N$ e $p_0 = 40N$, tem-se o seguinte diagrama.

$$
\begin{array}{ll}
N_x(x \rightarrow 0^+) = F_1 + F_2 - p_0 L & N_x(x \rightarrow \frac{L}{3}^-) = F_1 + F_2 - \frac{2}{3} p_0 L \\
N_x(x \rightarrow \frac{L}{3}^+) = F_2 - \frac{2}{3} p_0 L & N_x(x \rightarrow \frac{2}{3}L^-) = F_2 - \frac{1}{3} p_0 L \\
N_x(x \rightarrow \frac{2}{3}L^+) = -\frac{1}{3} p_0 L & N_x(x \rightarrow L^-) = 0
\end{array}
$$



8. Traçar o diagrama do momento torçor para a viga indicada na Figura 7.15.

(a) Equação do carregamento: $t(x) = -t_0 < x - \frac{L}{2} >^0 +T_1 < x - \frac{L}{2} >^{-1}$

(b) Condição de contorno: $M_x(x = L) = T_2$

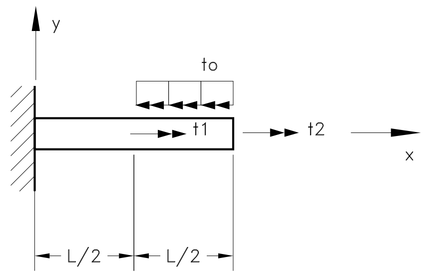


Figura 7.15: Funções de singularidade: viga do exercício 8.

(c) Integração da equação diferencial
$\frac{dM_x}{dx} = -t(x) \rightarrow M_x = t_0 < x - \frac{L}{2} >^1 -T_1 < x - \frac{L}{2} >^0 +C_1$

(d) Determinação da constante de integração
$x = L \rightarrow M_x = t_0 \frac{L}{2} - T_1 + C_1 = T_2 \rightarrow C_1 = T_2 + T_1 - t_0 \frac{L}{2}$

(e) Equação final
$M_x = t_0 < x - \frac{L}{2} >^1 -T_1 < x - \frac{L}{2} >^0 +T_2 + T_1 - t_0 \frac{L}{2}$

(f) Diagrama do momento torçor: para $L = 2m$, $T_1 = 10Nm$, $T_2 = 30Nm$ e $t_0 = 20Nm$ tem-se o seguinte diagrama.

$$M_x(x \rightarrow 0^+) = 0 \qquad M_x(x \rightarrow \frac{L}{2}^-) = T_2 + T_1 - t_0 \frac{L}{2}$$
$$M_x(x \rightarrow \frac{L}{2}^+) = T_2 - t_0 \frac{L}{2} \qquad M_x(x \rightarrow L^-) = T_2$$