

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A descrição e a análise de fenômenos físicos da natureza sempre foram de interesse da humanidade. Vários cientistas famosos ao longo dos últimos séculos estudaram o movimento e a deformação dos corpos. Neste último caso, o objetivo principal é o estudo do comportamento de corpos submetidos a solicitações quaisquer, determinando-se os esforços internos e os estados de deformação e tensão.

Através de simplificações sobre o caso geral de um corpo sólido, desenvolveu-se a disciplina de resistência dos materiais, a qual considera basicamente o estudo de problemas unidimensionais com materiais elásticos. De forma geral, na resistência dos materiais estudam-se os esforços internos e a deformação em elementos estruturais como barras, vigas e eixos. Para isso, assume-se que toda solicitação aplicada ao corpo causa apenas deformação, não ocorrendo nenhuma ação de movimento (deve ser observado que o estado de repouso de um corpo é um caso particular de uma ação de movimento geral). Neste contexto, uma série de expressões é deduzida para o cálculo das deformações e tensões em estruturas compostas por barras e vigas. Desta forma, considera-se a resistência dos materiais como uma descrição técnica unidimensional de conceitos gerais de mecânica.

Observa-se que ao se deparar com a denominação de resistência dos materiais, o aluno naturalmente espera aprender como estudar o comportamento de estruturas constituídas por diferentes tipos de materiais. No entanto, os textos clássicos de resistência tratam apenas modelos unidimensionais com a hipótese de material elástico. Assim, tem-se apenas um tipo específico de material ao invés de vários modelos constitutivos de materiais. Ao se considerar apenas modelos unidimensionais, conceitos gerais de mecânica, tais como deformação e tensão, são apresentados de forma específica sem nenhuma relação com o caso geral de um corpo sólido.

Atualmente, os problemas de engenharia têm apresentado um caráter multidisciplinar acentuado. Isto pode ser justificado em parte pela própria evolução do conhecimento humano e pela disponibilidade de recursos computacionais eficientes para a simulação de problemas. Desta forma, torna-se essencial ao engenheiro dominar os conceitos fundamentais de mecânica, sendo capaz de lidar com vários tipos diferentes de problemas. Do ponto de vista do ensino de engenharia, este fato demonstra a necessidade de se adotar uma abordagem que enfatize estes conceitos básicos e fundamentais de mecânica. Tal abordagem deverá oferecer ao engenheiro uma visão ampla dos problemas de mecânica no que se refere às formulações, sendo capaz de tratar problemas de sólidos e fluidos através de uma mesma base conceitual. Tal fato constitui-se no ponto de partida para a aplicação do computador na solução de problemas reais de engenharia. O desconhecimento da formulação de um problema resulta na impossibilidade de se compreender de forma clara as hipóteses fundamentais e as limitações do modelo mecânico considerado, o que torna altamente provável a obtenção de soluções computacionais que não reflitam o comportamento real do problema. Assim, conhecer o modelo mecânico é ponto fundamental para a aplicação de técnicas de simulação computacional.

Este enfoque mais abrangente de se estudar a formulação de problemas de mecânica toma por base

os conceitos desenvolvidos na disciplina de Mecânica do Contínuo, a qual está fundamentada na noção de meios contínuos e conseqüentemente de infinitesimais. É exatamente por este motivo que os cursos de engenharia em geral possuem nos seus currículos disciplinas de cálculo diferencial. No entanto, a forma usual de se ministrar os cursos específicos de engenharia, tais como resistência dos materiais e mecânica dos fluidos, não costuma fazer a devida ligação entre o cálculo diferencial e a mecânica do contínuo. Em geral, apresentam-se conceitos particulares obtidos a partir dos princípios fundamentais da mecânica do contínuo com aplicações a problemas relativamente simples. Isto cria uma lacuna na formação do engenheiro pois o mesmo, ao se deparar com problemas complexos de engenharia, não será capaz de identificar em que pontos as hipóteses que resultaram nas teorias simplificadas dos cursos tradicionais de engenharia devem ser alteradas para tratar os problemas reais. Observa-se que este método tradicional de ensino está totalmente desvinculada dos problemas de engenharia contemporâneos e do uso da simulação computacional.

Nesse sentido, este texto é uma tentativa de se reestruturar o ensino de mecânica partindo-se essencialmente de suas bases conceituais. Assim como na teoria clássica de resistência dos materiais, pretende-se introduzir os rudimentos de mecânica através de modelos unidimensionais, enfatizando-se no entanto, os aspectos simplificadores que resultaram nas suas formulações. Posteriormente, outros tipos de modelos mecânicos serão introduzidos tais como placas, cascas, sólidos, estado plano e axissimétricos. Através destes elementos, o estudante será capaz de tratar outros tipos de problemas não considerados pela resistência dos materiais clássica.

A presente introdução pretende motivar o estudo desta disciplina pela apresentação de alguns modelos mecânicos, suas hipóteses e algumas de suas aplicações. Os exemplos são colocados em ordem crescente de complexidade com o intuito de estimular a noção de aplicabilidade dos modelos mecânicos considerados. A ferramenta básica para a formulação dos problemas é o cálculo diferencial complementado com outros conceitos matemáticos tal como tensores. Os modelos aqui considerados serão tratados em detalhes posteriormente ao longo deste texto.

1.1 Barras em Tração e Compressão

Barra é um elemento estrutural cuja principal característica geométrica é possuir o comprimento bem maior que as dimensões da seção transversal. Assim, considera-se uma barra como um elemento unidimensional, analisando-se o seu comportamento ao longo da direção paralela à dimensão longitudinal, ou seja, o eixo x do sistema de referência mostrado na Figura 1.1.

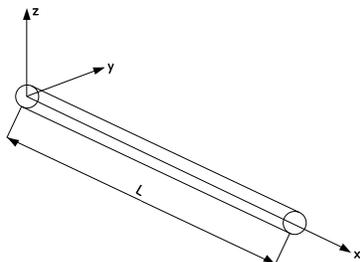
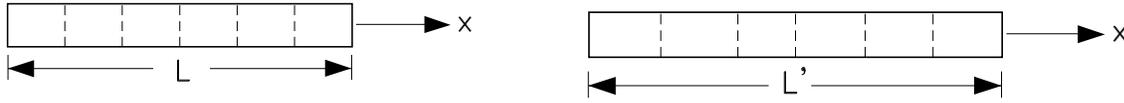


Figura 1.1: Barra de comprimento L juntamente com sistema de coordenadas.

A cinemática do modelo de barra consiste de ações de movimento axiais, ou seja, as seções transversais permanecem perpendiculares ao eixo da barra como ilustrado na Figura 1.2. Desta forma, no caso de deformação tem-se apenas ações de estiramento e encurtamento da barra. As ações de movimento rígido correspondem à translações na direção do eixo x . Os esforços internos e externos compatíveis com a cinemática adotada são forças axiais.



(a) Configuração inicial (seções transversais perpendiculares ao eixo da barra).

(b) Configuração deformada (seções transversais permanecem perpendiculares ao eixo da barra).

Figura 1.2: Cinemática do modelo de barra.

A equação básica para o caso da barra pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{dN_x}{dx} = -p(x). \quad (1.1)$$

sendo N_x a força normal ao longo da barra e $p(x)$, o carregamento axial distribuído ao longo da mesma. Integrando-se esta equação vem

$$N_x(x) = - \int_0^x p(x) dx + C_1,$$

sendo x uma seção arbitrária e C_1 uma constante de integração arbitrária determinada a partir das condições de contorno. Assim, a partir da integração da equação diferencial, obtém-se uma função $N_x(x)$ descrevendo o comportamento da força normal ao longo de toda a barra.

A força normal $N_x(x)$ numa seção transversal x é dada de forma geral como uma integral ao longo da área A da barra

$$N_x(x) = \int_A \sigma_{xx}(x) dydz = \sigma_{xx}(x) \int_A dydz = \sigma_{xx}(x)A(x), \quad (1.2)$$

sendo σ_{xx} a componente de tensão normal na direção do eixo x . Logo, devido a cinemática adotada no modelo de barra, tem-se um estado uniaxial de tensão dado pela tensão normal σ_{xx} , a qual é constante para todos os pontos de uma seção transversal.

Para material elástico linear isotrópico, a lei de Hooke no caso de barra em tração e compressão se reduz a

$$\sigma_{xx} = E\epsilon = E(\epsilon_{xx} - \epsilon_0), \quad (1.3)$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx}, \quad (1.4)$$

sendo ϵ_{xx} a componente de deformação normal; ϵ_{yy} e ϵ_{zz} , as componentes de deformação transversais nas direções y e z ; E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson do material; ϵ_0 representa a deformação inicial da barra existente em casos em que se tem um gradiente de temperatura ou quando a barra é montada com interferência. As equações 1.3 são conhecidas como as equações constitutivas de material elástico linear isotrópico para o problema de barra.

Substituindo (1.3) em (1.2), tem-se a expressão da força normal em termos da deformação ϵ , ou seja,

$$N_x(x) = E(x)A(x)(\epsilon_{xx} - \epsilon_0). \quad (1.5)$$

A componente de deformação normal ϵ_{xx} é dada em função do deslocamento axial da barra $u = u(x)$ como

$$\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx}. \quad (1.6)$$

A partir de (1.5) e de (1.6) vem que

$$N_x(x) = E(x)A(x) \left[\frac{du}{dx} - \epsilon_0 \right]. \quad (1.7)$$

Supondo $\epsilon_0 = 0$ para efeitos de simplificação e substituindo relação anterior em (1.1), tem-se a forma forte do problema ou equação diferencial de barra em termos do deslocamento axial $u = u(x)$

$$\frac{d}{dx} \left(E(x)A(x) \frac{du}{dx} \right) + p(x) = 0, \quad \text{para } x \in (0, L). \quad (1.8)$$

Para o caso em que o módulo de elasticidade e a área da seção são constantes ($E(x) = E$ e $A(x) = A$), obtém-se

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + p(x) = 0, \quad \text{em } x \in (0, L). \quad (1.9)$$

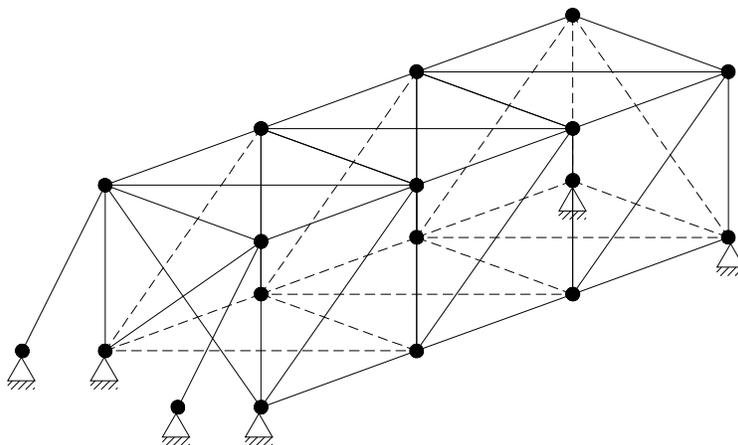


Figura 1.3: Estrutura treliçada.

Como exemplo de aplicação de barras, tem-se estruturas treliçadas constituídas por barras unidas por articulações perfeitas como ilustrado na Figura 1.3. A transmissão das cargas aplicadas da estrutura até os apoios é realizada exclusivamente pela resistência das barras a tração e compressão.

1.2 Torção em Eixos Circulares

Como no caso das barras, o eixo também é um elemento estrutural com dimensão longitudinal predominante. A cinemática do modelo de eixo circular consiste apenas de ações de movimento que originam torção nas seções perpendiculares à dimensão longitudinal como mostrado na Figura 1.4.

De forma completamente análoga ao caso de barras, pode-se obter a seguinte equação de equilíbrio para eixos circulares

$$\frac{dM_x}{dx} = -t(x), \quad (1.10)$$

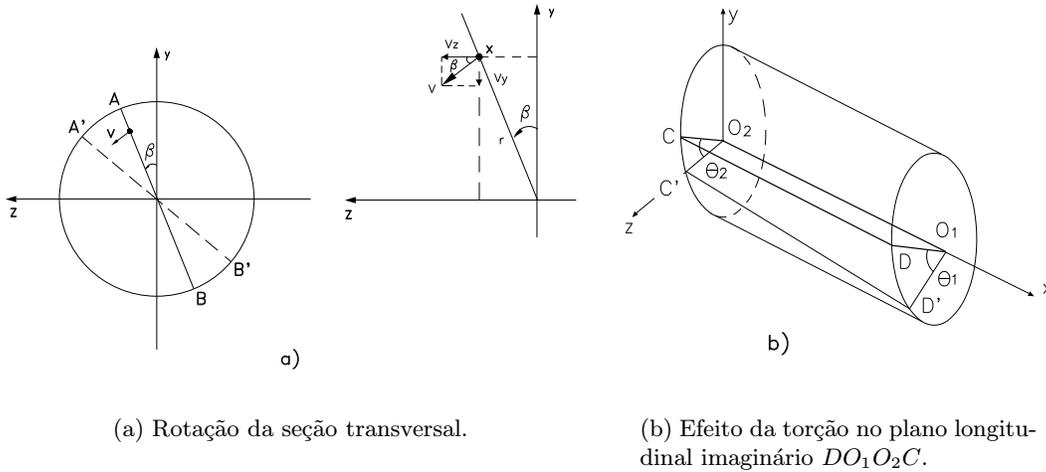


Figura 1.4: Cinemática de torção circular.

sendo $M(x)$ o momento torçor ao longo do eixo e $t(x)$ o torque distribuído aplicado ao mesmo.

Empregando-se as equações constitutivas desse modelo, chega-se a

$$M_x = \mu I_p \frac{d\theta}{dx}. \quad (1.11)$$

Substituindo-se esta última equação na anterior obtém-se

$$\frac{d}{dx} \left(\mu I_p \frac{d\theta(x)}{dx} \right) + t(x) = 0, \quad (1.12)$$

sendo $\theta(x)$ o ângulo de rotação do eixo submetido ao torque $t(x)$, μ , um dos coeficientes de Lamé e I_p , o momento de inércia polar da seção transversal do eixo.

Para um eixo de seção transversal constante e constituído de um único material ($\mu = cte$; $I_p(x) = I_p$) tem-se

$$\mu I_p \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + t(x) = 0. \quad (1.13)$$

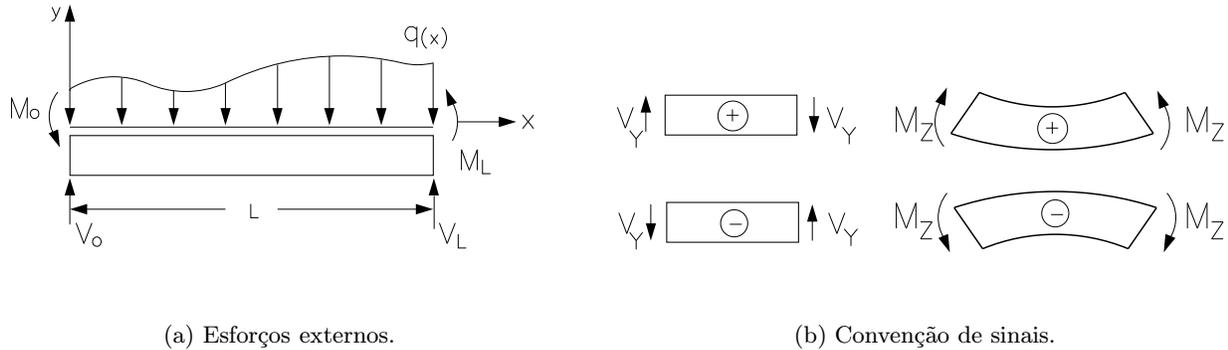
1.3 Vigas em Flexão

O modelo que representa vigas em flexão pura consiste em supor que as ações de movimento possíveis devam ser tais que as seções transversais permaneçam planas, não-deformadas e ortogonais ao eixo da viga. Logo, as forças transversais e os momentos puros são os esforços compatíveis com a cinemática adotada para esse modelo como ilustrado na Figura 1.5.

Assim como no caso de barras, é possível estabelecer uma relação de equilíbrio para forças e momentos em vigas resultando na seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dV_y}{dx} = q(x), \quad (1.14)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = V_y, \quad (1.15)$$



(a) Esforços externos.

(b) Convenção de sinais.

Figura 1.5: Esforços externos compatíveis com a viga de Euler-Bernoulli.

ou ainda

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q(x), \quad (1.16)$$

sendo $V_y(x)$ e $M_z(x)$ a força cortante e o momento fletor ao longo da viga, respectivamente, e $q(x)$ o carregamento distribuído transversal sobre a mesma.

Mais uma vez, empregando-se as equações constitutivas desse modelo, chega-se a

$$M_z = EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (1.17)$$

e substituindo-se esta última equação na anterior obtém-se

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x) I_z(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) - q(x) = 0, \quad (1.18)$$

sendo $v(x)$ a deflexão ao longo da viga submetida ao carregamento transversal $q(x)$, E , o módulo de elasticidade longitudinal e I_z , o momento de inércia de área da seção transversal x em relação ao eixo z .

Para um eixo de seção transversal constante e constituído de um único material ($E(x) = E$; $I_z(x) = I_z$), tem-se

$$EI_z \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - q(x) = 0. \quad (1.19)$$

Como exemplo de uma aplicação de viga, a Figura 1.6 ilustra uma passarela de pedestres.

Os elementos estruturais de barra, eixo e viga são usualmente abordados na teoria clássica de resistência dos materiais. No entanto, a abordagem tradicional de resistência deduz um conjunto de expressões específicas para o problema considerado. Muitas vezes não se deixa claro, por exemplo, quais são as hipóteses cinemáticas destes problemas assim como as suas limitações.

1.4 Problemas Bidimensionais

Para ilustrar um caso de grande importância prática não tratado pela abordagem clássica de resistência dos materiais, considere o problema de estado plano de tensão. Em geral, os problemas bidimensionais em



Figura 1.6: Passarela de pedestres.

elasticidade linear são situações simplificadas de problemas originalmente tridimensionais. A formulação de tais problemas é comumente organizada em três categorias: estado plano de tensão, estado plano de deformação e sólidos axisimétricos. As hipóteses básicas e as equações de equilíbrio para o caso de estado plano de tensão serão descritas a seguir.

Para o caso de estado plano de tensão tem-se

- a espessura do corpo é pequena se comparada às suas dimensões nas direções x e y ,
- não há forças agindo nas faces normais ao eixo z ,
- as componentes das forças de volume agem somente no plano xy e são independentes do eixo z ,
- todas as forças agindo no corpo são planas e independentes de z .

As equações de equilíbrio estático para o estado plano são escritas como

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \implies \begin{cases} \frac{\partial T_{11}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}(x,y)}{\partial y} + b_x(x,y) = 0 \\ \frac{\partial T_{12}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}(x,y)}{\partial y} + b_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

sendo \mathbf{T} o tensor de tensões e \mathbf{b} , o vetor das forças de corpo. Para um material elástico isotrópico linear, chega-se a partir de 1.20 a

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + b_x(x,y) &= 0 \\ \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + b_y(x,y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

sendo u, v os deslocamentos nas direções x e y , respectivamente, b_x, b_y , as componentes da força de corpo e μ, λ os coeficientes de Lamé.

Existem inúmeras aplicações em mecânica que podem ser reduzidas ao caso bidimensional, como por exemplo estruturas em chapa. A Figura 1.7 ilustra um gancho tratado como um modelo de estado plano de tensão.

1.5 Placas e Cascas

As placas e as cascas são componentes estruturais respectivamente planos e curvos que apresentam sua espessura muito menor que qualquer outra de suas dimensões. Essa característica básica permite tratar

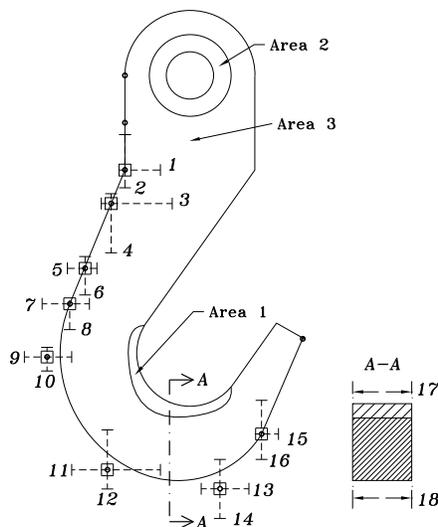


Figura 1.7: Exemplo de problema modelado como estado plano de tensão.

tais elementos a partir de sua superfície média reduzindo assim um problema originalmente tridimensional ao caso bidimensional. Os modelos clássicos que descrevem problemas de placa e casca compreendem frequentemente as formulações de *Kirchhoff* ou *Reissner-Mindlin*. A seguir são apresentadas as hipóteses básicas para o tratamento do modelo placa de *Kirchhoff* bem como a equação resultante dessa formulação.

A hipótese simplificadora na formulação de *Kirchhoff* para o modelo de placa consiste em negligenciar as deformações específicas na direção perpendicular à superfície média da placa. De forma equivalente, esta consideração pode ser reescrita da seguinte maneira: *Linhas retas normais à superfície média da placa antes da deformação permanecem retas e normais a esta superfície após a deformação da placa.*

A equação de equilíbrio de uma placa retangular submetida a pequenas deflexões para o caso de material elástico isotrópico linear é dada por

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1.22)$$

sendo w a deflexão normal ao plano médio da placa, q , a carga distribuída normal a esse mesmo plano e D , uma constante dada pela seguinte equação:

$$D = \frac{Ed^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (1.23)$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal, ν , o coeficiente de *Poisson* e d , a espessura da placa.

1.6 Sólidos Tridimensionais

Todos os corpos estão sujeitos a deformações quando submetidos a esforços externos. Quando o comportamento do material que constitui um corpo é tal que a deformação desaparece totalmente ao se remover o carregamento sobre ele, este material é denominado elástico. Da mesma forma, quando os valores das propriedades mecânicas do material que constitui um corpo são independentes da direção em que estas são analisadas, este material é denominado isotrópico. A seguir são apresentadas as hipóteses básicas e as equações de equilíbrio inerentes ao tratamento de problemas tridimensionais envolvendo uma tal classe de materiais.

No caso da deformação de sólidos não se faz nenhuma hipótese simplificadora sobre a forma funcional das ações cinematicamente possíveis além da sua suavidade (existência de derivadas parciais contínuas). Assim, uma ação de movimento possível \mathbf{v} , para o tratamento de um problema sólido tridimensional, é a seguinte:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}, \quad (1.24)$$

com v_1, v_2 e v_3 sendo funções escalares suaves de x, y e z .

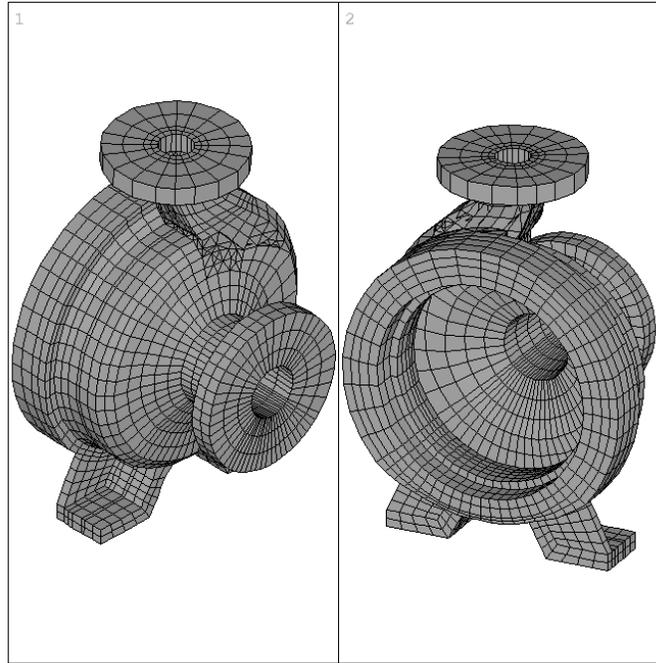


Figura 1.8: Exemplo de uma malha de elementos finitos para um sólido elástico tridimensional.

As equações gerais que descrevem a deformação de um sólido tridimensional, no caso de material elástico isotrópico linear, são dadas por

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{T} &= 2\mu \mathbf{E} + \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I}, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \end{aligned} \quad (1.25)$$

sendo \mathbf{T} o tensor de tensões, \mathbf{b} o vetor das forças de corpo, μ e λ , os coeficientes de Lamé e \mathbf{E} , o tensor de deformações de Green dado por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

A primeira das equações em 1.25 descreve formalmente o equilíbrio para qualquer meio contínuo e a segunda, denominada equação constitutiva, caracteriza o comportamento particular de um corpo sólido relativamente ao tipo de material que o constitui.

Observa-se que a solução analítica do sistema de equações em (1.25) pode ser obtida apenas em alguns casos muito particulares. Nestes casos, empregam-se técnicas numéricas tais como o Método de Elementos Finitos. A Figura 1.8 ilustra uma malha de elementos finitos para uma bomba.

1.7 Fluidos Newtonianos

A principal característica de um fluido é apresentar uma deformação contínua quando submetido a tensões cisalhantes. Dessa forma, é comum definir um fluido como uma classe de materiais idealizados os quais não resistem a qualquer esforço cisalhante. Quando a densidade de um fluido permanece constante independentemente do estado de tensão a que este está submetido, denomina-se este fluido de incompressível. As hipóteses básicas que caracterizam os fluidos do tipo *newtoniano* (ou *fluidos viscosos lineares*) são descritas a seguir.

Quando um fluido é isotrópico em qualquer configuração e sua resposta a aplicação de um estado de tensão depende linearmente das taxas de deformação e somente destas, estabelece-se as hipóteses básicas que regem o comportamento dos fluidos denominados *newtonianos*.

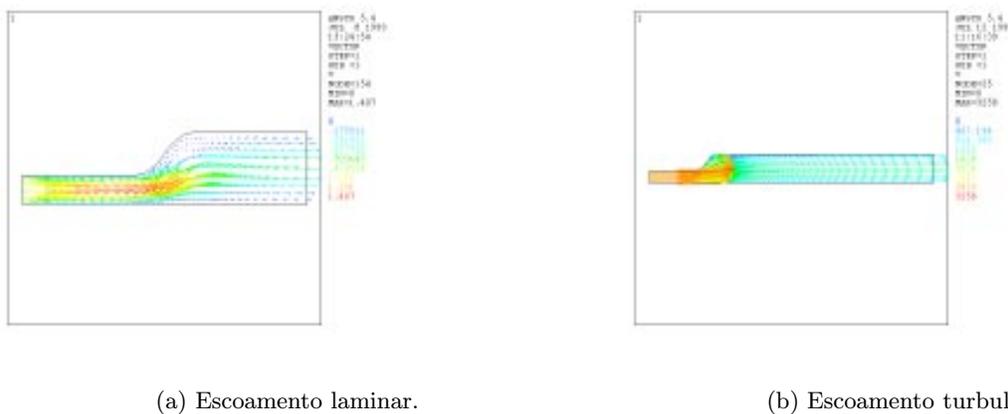


Figura 1.9: Problema de escoamento num duto.

As equações que descrevem o comportamento desse tipo de fluido são basicamente as mesmas que descrevem o comportamento de sólidos elásticos lineares, a menos da equação constitutiva que descreve o tensor de tensões para essa classe de fluidos e do termo de aceleração na equação de equilíbrio para meios contínuos. Dessa forma tem-se

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} &= \rho \mathbf{a}, \\
 \mathbf{T} &= -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \\
 \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T),
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

sendo \mathbf{T} e \mathbf{b} o tensor de tensões e a força de corpo agindo no fluido, respectivamente, \mathbf{a} a aceleração do fluido, ρ , a sua densidade, p , a pressão hidrostática, \mathbf{I} e \mathbf{D} , os tensores identidade e taxa de deformação, respectivamente, μ , um dos coeficientes de Lamé e \mathbf{v} , a velocidade do fluido.

A Figura 1.9 ilustra dois problemas de escoamento resolvidos pela técnica de elementos finitos. O primeiro deles considera um escoamento laminar (Figura 1.9(a)) e o segundo um escoamento turbulento

(Figura 1.9(b)). Observa-se que o primeiro caso pode ser tratado integralmente pelas equações descritas em 1.27, já o segundo não poderia ser descrito pelo mesmo conjunto de equações necessitando de algumas mudanças na sua parte constitutiva.

1.8 Exemplos de Aplicações Atuais

A Figura 1.10 ilustra um problema típico de engenharia moderna envolvendo o projeto ótimo de uma ferramenta tridimensional. Este problema é conhecido como um problema de otimização o qual consiste na minimização de um funcional (energia de deformação, tensão de Von Mises, etc.) submetido a um conjunto de restrições (deslocamentos, tensões, economia de material, etc.).

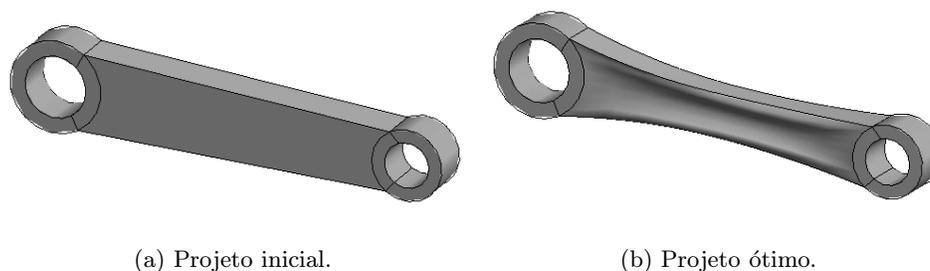


Figura 1.10: Otimização de forma.

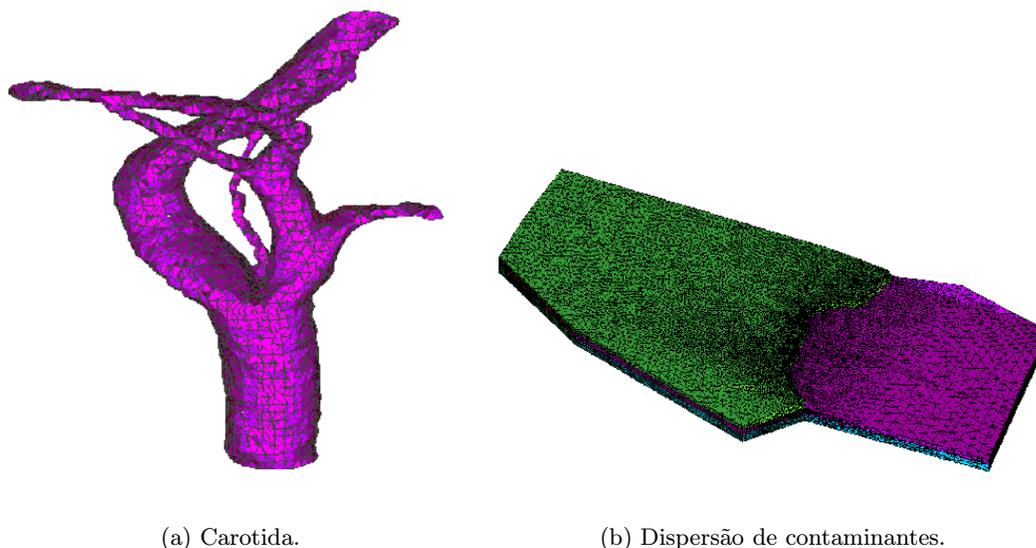


Figura 1.11: Exemplos de problemas multidisciplinares.

Um outro exemplo interessante se refere a simulação do sistema cardiovascular humano. A partir de uma tomografia computadorizada, identifica-se por exemplo a geometria da carótida e gera-se uma malha de elementos finitos para simular o fluxo sanguíneo. A Figura 1.11(a) ilustra a geometria recuperada da carótida e a malha de elementos finitos. A Figura 1.11(b) ilustra o resultado da simulação da dispersão de contaminantes no solo. Estes dois problemas são de extrema relevância social. As doenças cardíacas

são as que mais causam vítimas fatais atualmente no mundo. Boa parte da água consumida no Brasil vem de aquíferos e não há o menor controle sobre a qualidade da água.