# Apêndice C

# ANÁLISE TENSORIAL

## C.1 Tensores

Usa-se o termo tensor como um sinônimo para *transformação linear de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{V}$*. Logo, um tensor $\mathbf{T}$ é uma *transformação linear* que associa a cada vetor $\mathbf{u}$, um outro vetor $\mathbf{v}$ através da operação

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{u}. \tag{C.1}$$

Assim para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{T}\mathbf{v} & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \\ \mathbf{T}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{v} & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \forall \alpha \in \Re \end{cases}. \tag{C.2}$$

De forma geral, dados os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ as relações anteriores podem ser resumidas como

$$\mathbf{T}(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n) = \alpha_1\mathbf{T}\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{T}\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{T}\mathbf{u}_n = \mathbf{T}(\alpha_i\mathbf{u}_i) = \alpha_i\mathbf{T}\mathbf{u}_i. \tag{C.3}$$

O conjunto de todos os tensores forma o espaço vetorial **Lin** se a *adição* e a *multiplicação por escalar* forem definidas ponto a ponto, ou seja, $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ e $\alpha\mathbf{S}$ $(\alpha \in \Re)$ são os tensores definidos por

$$(\mathbf{S} + \mathbf{T})\,\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{T}\mathbf{v}, \tag{C.4}$$

$$(\alpha\mathbf{S})\,\mathbf{v} = \alpha\,(\mathbf{S}\mathbf{v})\,. \tag{C.5}$$

A forma com a qual se definiu o conceito de tensor, acima, permite que se faça uma associação biunívuca entre tensores e matrizes. Dessa maneira, as operações matriciais equivalentes às duas últimas operações tensoriais são, respectivamente, a soma e o produto por escalar usualmente conhecidos do estudo de matrizes.

### C.1.1 Componentes de um tensor

Dado um vetor $\mathbf{u}$ e uma base ortonormal qualquer $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, as componentes desse vetor em relação a essa base são dadas por

$$u_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u} \\ u_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u} \\ u_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u} \end{cases}.$$

Por sua vez, denota-se o vetor $\mathbf{u}$ em termos de suas componentes como

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = u_i\mathbf{e}_i.$$

Aplicando-se o tensor $\mathbf{T}$ ao vetor $\mathbf{u}$, tem-se um outro vetor $\mathbf{v} = \mathbf{Tu}$ que, pela linearidade de $\mathbf{T}$, pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = \mathbf{Tu} = \mathbf{T}\left(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3\right) = u_1\mathbf{Te}_1 + u_2\mathbf{Te}_2 + u_3\mathbf{Te}_3 = u_i\mathbf{Te}_i.$$

As componentes de $\mathbf{v}$ são dadas por

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v} = u_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Te}_1 + u_2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Te}_2 + u_3\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Te}_3 \\ v_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v} = u_1\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{Te}_1 + u_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{Te}_2 + u_3\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{Te}_3 \\ v_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} = u_1\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{Te}_1 + u_2\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{Te}_2 + u_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{Te}_3 \end{array}\right\} \rightarrow v_i = u_j\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Te}_j.$$

Nesse caso, termos como $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Te}_1 = T_{11}$ e $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{Te}_1 = T_{21}$ são interpretados como as componentes de $\mathbf{Te}_1$ nas direções $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ respectivamente. De uma forma geral, define-se $T_{ij}$ como sendo as componentes do tensor $\mathbf{T}$, dadas por

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Te}_j. \tag{C.6}$$

A partir daí, a equação $\mathbf{v} = \mathbf{Tu}$ pode ser escrita na forma de componentes como

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = T_{11}u_1 + T_{12}u_2 + T_{13}u_3 \\ v_2 = T_{21}u_1 + T_{22}u_2 + T_{23}u_3 \\ v_3 = T_{31}u_1 + T_{32}u_2 + T_{33}u_3 \end{array}\right\} \rightarrow v_i = T_{ij}u_j.$$

A relação anterior pode ainda ser representada na seguinte forma matricial:

$$\left\{\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}\right\} \rightarrow \{\mathbf{v}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\},$$

com $[\mathbf{T}]$ denominada *matriz do tensor* $\mathbf{T}$ relativamente à base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Observa-se que os termos nas colunas de $[\mathbf{T}]$ são, respectivamente, as componentes de $\mathbf{Te}_1$, $\mathbf{Te}_2$ e $\mathbf{Te}_3$. Portanto,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{Te}_1 = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{Te}_2 = T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{32}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{Te}_3 = T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3 \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{Te}_i = T_{ji}\mathbf{e}_j.$$

Verifica-se que as componentes de $\mathbf{T}$, assim como as de um vetor $\mathbf{v}$, dependem do sistema de coordenadas adotado através dos vetores unitários da base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Assim, um tensor terá uma matriz para cada base considerada. Por exemplo, tomando-se duas bases ortonormais definidas por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, tem-se respectivamente, as matrizes $[\mathbf{T}]$ e $[\mathbf{T}]'$ para o tensor $\mathbf{T}$.

**Exemplo C.1** *Numa dada base, a transformação* $\mathbf{T}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ *é a multiplicação de vetores pela matriz*

$$[\mathbf{T}] = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

*Aplicar* $\mathbf{T}$ *a um vetor* $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Aplicar $\mathbf{T}$ a um vetor $\mathbf{u}$ significa multiplicar esse vetor pela matriz associada $[\mathbf{T}]$, ou seja,

$$\mathbf{v} = \mathbf{Tu} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} -1 \\ 3 \\ -1 \end{array}\right] = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$$

□

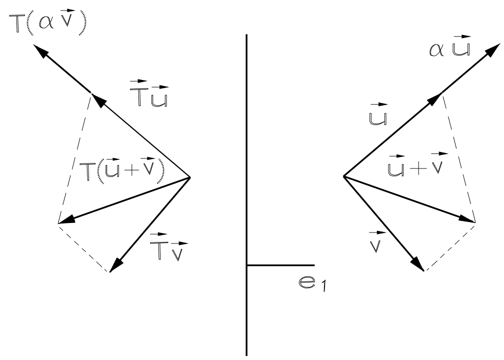


Figura C.1: Espelhamento de vetores em torno de $\mathbf{e}_1$ através de $\mathbf{T}$.

**Exemplo C.2** *Dado que* $\mathbf{T}$ *espelha todo vetor com respeito a um plano fixo, encontrar uma matriz para* $\mathbf{T}$ *e mostrar que* $\mathbf{T}$ *é um tensor.*

Seja $\mathbf{e}_1$ perpendicular ao plano de reflexão como ilustrado na Figura A.1. Logo,

$$\mathbf{Te}_1 = -\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{Te}_2 = \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{Te}_3 = \mathbf{e}_3$$

Como representação matricial de $\mathbf{T}$, tem-se,

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}$$

Tomando-se agora um novo conjunto de vetores de base $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1$, tem-se

$$\mathbf{Te}'_1 = \mathbf{e}'_1 \qquad \mathbf{Te}'_2 = \mathbf{e}'_2 \qquad \mathbf{Te}'_3 = -\mathbf{e}'_3$$

e portanto, as componentes de um tensor dependem da base adotada. Assim,

$$[\mathbf{T}]' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3}$$

O fato que $\mathbf{T}$ é um tensor está ilustrado na Figura A.1 pois,

$$\mathbf{T}\left(\mathbf{u} + \mathbf{v}\right) = \mathbf{Tu} + \mathbf{Tv} \qquad \mathbf{T}\left(\alpha\mathbf{u}\right) = \alpha\mathbf{Tu}$$

□

**Exemplo C.3** *Se* $\mathbf{T}$ *transforma todo vetor num vetor unitário com uma direção fixa, mostrar que* $\mathbf{T}$ *não é um tensor.*

Seja $\mathbf{n}$ o vetor unitário resultante da aplicação de $\mathbf{T}$. Portanto, para todos os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tem-se,

$$\mathbf{Tu} = \mathbf{n} \qquad \mathbf{Tv} = \mathbf{n} \qquad \mathbf{T}\left(\mathbf{u} + \mathbf{v}\right) = \mathbf{n}$$

No entanto, $\mathbf{T}$ não é um tensor pois,

$$\mathbf{T}\left(\mathbf{u} + \mathbf{v}\right) = \mathbf{n} \neq \mathbf{Tu} + \mathbf{Tv} = \mathbf{n} + \mathbf{n} = 2\mathbf{n}$$

□

### C.1.2 Tensor nulo

O elemento nulo do espaço de tensores **Lin** é o *tensor nulo* **0** que transforma qualquer vetor no vetor nulo, ou seja,

$$\mathbf{0v} = \mathbf{0}. \tag{C.7}$$

A forma matricial associada a esse tensor é aquela cujos coeficientes são todos nulos, ou seja,

$$[\mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### C.1.3 Tensor identidade

O *tensor identidade* em **Lin** é definido por,

$$\mathbf{Iv} = \mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{C.8}$$

Em particular, tem-se

$$\mathbf{Ie}_1 = \mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{Ie}_2 = \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{Ie}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Logo, as componentes do tensor identidade são

$$I_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Ie}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \tag{C.9}$$

sendo $\delta_{ij}$ o delta de Dirac, definido de tal forma que $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$. A representação matricial associada a esse tensor é obviamente a matriz identidade

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### C.1.4 Soma de tensores

A soma de dois tensores **S** e **T** é dada por (A.4), podendo-se observar que $(\mathbf{S}+\mathbf{T})$ é um tensor. Por sua vez, as suas componentes são expressas como

$$(\mathbf{S}+\mathbf{T})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S}+\mathbf{T})\,\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Se}_j + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Te}_j = \mathbf{S}_{ij}+\mathbf{T}_{ij}. \tag{C.10}$$

Em forma matricial,

$$[\mathbf{S}+\mathbf{T}] = [\mathbf{S}] + [\mathbf{T}]. \tag{C.11}$$

### C.1.5 Produto de tensores

O *produto* **ST** de dois tensores **S** e **T** é o tensor que define a transformação composta,

$$\mathbf{ST} = \mathbf{S} \circ \mathbf{T}, \tag{C.12}$$

ou seja,

$$(\mathbf{ST})\,\mathbf{v} = \mathbf{S}\,(\mathbf{Tv}) \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{C.13}$$

As componentes de $\mathbf{ST}$ são dadas por

$$(\mathbf{ST})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{ST})\,\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}\,(\mathbf{T}\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}T_{mj}\mathbf{e}_m = T_{mj}\,(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}\mathbf{e}_m) = S_{im}T_{mj},$$

e por sua vez

$$(\mathbf{TS})_{ij} = T_{im}S_{mj}.$$

As expressões anteriores podem ser escritas matricialmente como a seguir

$$[\mathbf{ST}] = [\mathbf{S}]\,[\mathbf{T}] \qquad [\mathbf{TS}] = [\mathbf{T}]\,[\mathbf{S}] \tag{C.14}$$

e portanto, de forma geral, o produto de tensores não é comutativo, i.e.,

$$\mathbf{ST} \neq \mathbf{TS}.$$

Tomando os tensores $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{V}$ verifica-se, com base na associatividade do produto entre matrizes, que

$$(\mathbf{S}\,(\mathbf{TV}))\,\mathbf{v} = \mathbf{S}\,((\mathbf{TV})\,\mathbf{v}) = \mathbf{S}\,(\mathbf{T}\,(\mathbf{V}\mathbf{v})) = (\mathbf{ST})\,(\mathbf{V}\mathbf{v})$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}\,(\mathbf{TV}) = (\mathbf{ST})\,\mathbf{V}. \tag{C.15}$$

Portanto o produto entre tensores também é associativo.

**Exemplo C.4** *Um corpo rígido é girado de* $90°$ *sobre um eixo no sentido anti-horário. Encontrar uma matriz representando esta rotação.*

Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base de vetores unitários, segundo a regra da mão direita, com $\mathbf{e}_3$ o eixo de rotação como ilustrado na Figura A.2a). Sendo $\mathbf{R}$ a transformação tem-se,

$$\mathbf{R}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{R}\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{R}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$$

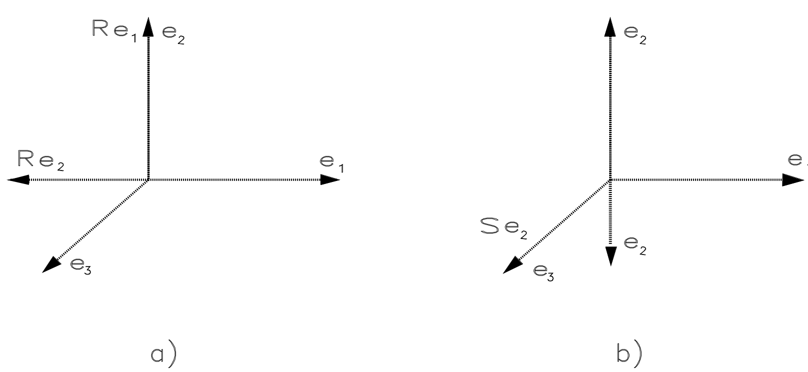


Figura C.2: Rotações no sentido anti-horário: a) 90º em torno de $\mathbf{e}_3$; b) 90º em torno de $\mathbf{e}_1$.

Logo,

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathbf{e}_i}_{\mathbf{e}_i}$$

□

**Exemplo C.5** *Considerando o corpo anterior, suponha que o mesmo é girado de* $90°$ *em torno do eixo* $\mathbf{e}_1$ *no sentido anti-horário. Encontrar a matriz da rotação resultante.*

Neste caso, esta segunda rotação $\mathbf{S}$, mostrada na Figura A.2b), é dada por,

$$\begin{array}{l} \mathbf{S}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{S}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{S}\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \end{array} \quad \Rightarrow [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A rotação resultante é dada por $\mathbf{S}\left(\mathbf{R}\mathbf{v}\right) = \left(\mathbf{S}\mathbf{R}\right)\mathbf{v}$, ou em notação matricial:

$$[\mathbf{S}\mathbf{R}] = [\mathbf{S}]\,[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

**Exemplo C.6** *Dado um ponto* $\mathbf{P}\left(1,1,0\right)$*, encontrar a sua posição após as duas rotações.*

Sendo $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ os vetores posição inicial e final do ponto $\mathbf{P}$, tem-se que

$$\{\mathbf{r}'\} = [\mathbf{S}\mathbf{R}]\,\{\mathbf{r}\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$$

□

**Exemplo C.7** *Encontre a posição de* $\mathbf{P}$ *ao se reverter as rotações.*

Neste caso, sendo $\mathbf{r}''$ a posição final de $\mathbf{P}$, tem-se $\mathbf{r}'' = \mathbf{R}\left(\mathbf{S}\mathbf{r}\right) = \left(\mathbf{R}\mathbf{S}\right)\mathbf{r}$, ou ainda,

$$\{\mathbf{r}''\} = [\mathbf{R}]\,[\mathbf{S}]\,\{\mathbf{r}\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Logo, $\mathbf{r}'' = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. □

### C.1.6 Tensor transposto

O tensor *transposto* de $\mathbf{S}$, denotado por $\mathbf{S}^T$, é definido como o único tensor satisfazendo a propriedade

$$\left(\mathbf{S}\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\left(\mathbf{S}^T\mathbf{v}\right) \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{C.16}$$

Da definição anterior, tem-se

$$\mathbf{e}_j\cdot\left(\mathbf{S}\mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i\cdot\left(\mathbf{S}^T\mathbf{e}_j\right) \Rightarrow S_{ji} = S^T_{ij} \Rightarrow [\mathbf{S}]^T = \left[\mathbf{S}^T\right].$$

Verifica-se ainda que as seguintes propriedades são válidas

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{S}+\mathbf{T}\right)^T &= \mathbf{S}^T + \mathbf{T}^T, \\ \left(\mathbf{S}\mathbf{T}\right)^T &= \mathbf{T}^T\mathbf{S}^T, \\ \left(\mathbf{S}^T\right)^T &= \mathbf{S}. \end{aligned} \tag{C.17}$$

**Exemplo C.8** *Considere a seguinte matriz do tensor* $\mathbf{T}$*,*

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

*então,*

$$\left[\mathbf{T}^T\right] = [\mathbf{T}]^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

*é a forma matricial associada a* $\mathbf{T}^T$*.* □

### C.1.7 Tensores simétrico e antissimétrico

Um tensor é chamado *simétrico* se

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T. \tag{C.18}$$

Assim, as componentes de um tensor simétrico possuem a propriedade,

$$S_{ij} = \left(\mathbf{S}^T\right)_{ij} = S_{ji}$$

ou ainda, $S_{12} = S_{21}$, $S_{13} = S_{31}$, $S_{23} = S_{32}$.

Por sua vez, $\mathbf{S}$ é dito *antissimétrico* se

$$\mathbf{S} = -\mathbf{S}^T. \tag{C.19}$$

Logo, as componentes desse tensor satisfazem a relação

$$S_{ij} = -\left(S^T\right)_{ij} = -S_{ji},$$

o que implica em $S_{12} = -S_{21}$, $S_{13} = -S_{31}$, $S_{23} = -S_{32}$ e $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$.

**Exemplo C.9** *Considere o tensor* $\mathbf{T}$ *tal que*

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

*É fácil observar que,*

$$\left[\mathbf{T}^T\right] = [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

*logo* $\mathbf{T}$ *é simétrico.*

*Já o tensor* $\mathbf{U}$

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

*é antissimétrico.* □

Todo tensor $\mathbf{S}$ pode ser expresso, de forma única, como a soma de um tensor simétrico $\mathbf{E}$ e um tensor antissimétrico $\mathbf{W}$, ou seja,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} + \mathbf{W}, \tag{C.20}$$

sendo

$$\mathbf{E} =\frac{1}{2}\left(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T\right), \tag{C.21}$$

$$\mathbf{W} =\frac{1}{2}\left(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T\right). \tag{C.22}$$

De fato,

$$\mathbf{E}^T=\frac{1}{2}\left(\mathbf{S}^T+\mathbf{S}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T\right) = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{W}^T=\frac{1}{2}\left(\mathbf{S}^T-\mathbf{S}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T\right) = -\mathbf{W}.$$

Os tensores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{W}$ são chamados, respectivamente, *partes simétrica* e *antissimétrica* de $\mathbf{S}$.

### C.1.8 Produto tensorial de dois vetores

O *produto tensorial* $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é definido como uma *transformação* que associa a cada vetor $\mathbf{v}$ o vetor $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{a}$, ou seja,

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\,\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{a}. \tag{C.23}$$

Para qualquer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ e $\alpha, \beta \in \Re$, verifica-se a partir da definição (A.23) que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\,(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) &= [\mathbf{b}\cdot(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})]\,\mathbf{a} = [\alpha\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}) + \beta\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})]\,\mathbf{a} \\
&= \alpha\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{a} + \beta\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{a} = \alpha\,(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\,\mathbf{u} + \beta(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\,\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, observa-se que $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ satizfaz as propriedades básicas de uma transformação linear sendo, portanto, um tensor. Por sua vez, as componentes de um tal tensor com respeito a uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ são as seguintes,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} &= \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\,\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i\cdot[\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_j)] = \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{a}b_j) \\
&= (\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a})\,b_j = a_i b_j \Rightarrow (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{ij} = a_i b_j.
\end{aligned}$$

Logo, em notação matricial

$$[\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T.$$

A partir daí é possível verificar que

$$[\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim sucessivamente. Portanto

$$\sum_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}.$$

Desse modo qualquer tensor pode ser expresso como

$$\mathbf{T} = T_{11}\left[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1\right] + T_{12}\left[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2\right] + T_{13}\left[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3\right] + T_{21}\left[\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1\right] + \cdots \Rightarrow \mathbf{T} = T_{ij}\left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right).$$

Notando-se ainda que os tensores $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$, com $i, j = 1, 2, 3$, são linearmente independentes, pode-se verificar que esses tensores formam uma base para **Lin**.

Além disso, o produto tensorial de dois vetores possui as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}), \\ &(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}. \end{aligned} \tag{C.24}$$

### C.1.9 Traço

O *traço* de um produto tensorial de dois vetores $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$ é definido como um escalar dado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, ou seja,

$$\mathrm{tr}\ (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \tag{C.25}$$

Como consequência direta dessa definição, tem-se a propriedade de linearidade do *traço*

$$\mathrm{tr}\ \left[(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}\right] = (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \beta\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \alpha \mathrm{tr}\ \left[\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}\right] + \beta \mathrm{tr}\ \left[\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\right].$$

Tomando as componentes cartesianas de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, ou seja, $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$, verifica-se que

$$\mathrm{tr}\ (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = u_i v_i = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ii}.$$

Como qualquer tensor $\mathbf{T}$ pode ser escrito na forma $\mathbf{T} = T_{ij}\left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)$, o traço de $\mathbf{T}$ é obtido como

$$\mathrm{tr}\ \mathbf{T} = \mathrm{tr}\ \left(T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right) = T_{ij}\ \mathrm{tr}\left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right) = T_{ij}\left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\right) = T_{ij} \delta_{ij} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}.$$

Logo, o traço de um tensor é bem definido através da relação

$$\mathrm{tr}\ \mathbf{T} = T_{ii}. \tag{C.26}$$

Verifica-se que o traço de um tensor possui ainda as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\ \mathbf{T}^T = \mathrm{tr}\ \mathbf{T}, \\ &\mathrm{tr}\ (\mathbf{S}\mathbf{T}) = \mathrm{tr}\ (\mathbf{T}\mathbf{S}). \end{aligned} \tag{C.27}$$

Observa-se também que o espaço de tensores **Lin** possui um *produto interno* natural definido por

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathrm{tr}\ \left(\mathbf{S}^T \mathbf{T}\right), \tag{C.28}$$

que em termos de suas componentes tem a seguinte forma

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = S_{ij} T_{ij}. \tag{C.29}$$

### C.1.10 Determinante

Define-se o determinante de um tensor $\mathbf{S}$ como sendo o determinante de sua matriz associada $[\mathbf{S}]$:

$$\det \mathbf{S} = \det [\mathbf{S}] \,, \tag{C.30}$$

sendo esta definição independente da escolha da base.

Um tensor $\mathbf{S}$ é *inversível* se existe um tensor $\mathbf{S}^{-1}$, chamado inverso de $\mathbf{S}$, tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Segue que um tensor é inversível se e somente se $\det \mathbf{S} \neq 0$. São válidas as seguintes identidades

$$\begin{aligned} &\det (\mathbf{ST}) = (\det \mathbf{S}) (\det \mathbf{T}) \,, \\ &\det \mathbf{S}^T = \det \mathbf{S}, \\ &\det \left(\mathbf{S}^{-1}\right) = (\det \mathbf{S})^{-1} \,, \\ &(\mathbf{ST})^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1}, \\ &\left(\mathbf{S}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{S}^T\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{C.31}$$

Tomando 3 vetores linearmente independentes $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, a magnitude do escalar $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ representa o volume do paralepípedo $\mathcal{P}$ determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. É possível mostrar que

$$\det\mathbf{S} = \frac{\mathbf{Su} \cdot (\mathbf{Sv} \times \mathbf{Sw})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})} \rightarrow |det\mathbf{S}| = \frac{\mathrm{vol}(\mathbf{S}(\mathcal{P}))}{\mathrm{vol}(\mathcal{P})},$$

sendo $\mathbf{S}(\mathcal{P})$ a imagem de $\mathcal{P}$ através de $\mathbf{S}$ e vol, o volume do paralepípedo $\mathcal{P}$. Esta relação fornece uma interpretação geométrica para o determinante de um tensor $\mathbf{S}$.

### C.1.11 Tensor ortogonal

Um *tensor ortogonal* é uma transformação linear sob a qual os vetores transformados preservam seus comprimentos e os ângulos entre si. Seja $\mathbf{Q}$ ortogonal, então $||\mathbf{Qu}|| = ||\mathbf{u}||$ e $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cos(\mathbf{Qu}, \mathbf{Qv})$. Logo, $\mathbf{Q}$ preserva o produto interno, i.e.,

$$\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{C.32}$$

Da definição de tensor transposto, tem-se

$$\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Qv}.$$

Assim,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Qv} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{Iv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Qv} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right) \mathbf{v} = 0.$$

Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são arbitrários, segue-se que

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}.$$

Por outro lado, o transposto do tensor identidade é o próprio tensor identidade, portanto

$$\left(\mathbf{Q}^\mathbf{T}\mathbf{Q}\right)^T = \mathbf{I}^T \Rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}.$$

Logo, a condição necessária e suficiente para que $\mathbf{Q}$ seja ortogonal é

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \tag{C.33}$$

ou seja,

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}. \tag{C.34}$$

Em representação matricial,

$$[\mathbf{Q}]\,[\mathbf{Q}]^T = [\mathbf{Q}]^T\,[\mathbf{Q}] = [\mathbf{I}]\,.$$

Um tensor ortogonal com determinante positivo é chamado *rotação*. Todo tensor ortogonal é uma rotação ou o produto de um rotação por $-\mathbf{I}$. Se $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ é uma rotação, então o conjunto de todos os vetores $\mathbf{v}$ tais que

$$\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

formam um subespaço unidimensional de $\mathcal{V}$ chamado eixo de $\mathbf{R}$. Em outras palavras, uma rotação $\mathbf{R}$ se dá em torno do eixo gerado pelo vetor $\mathbf{v}$.

De forma geral, a partir de (A.33), verifica-se que,

$$\det\left(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\right) = \det(\mathbf{I}) \Rightarrow \det(\mathbf{Q})\det\left(\mathbf{Q}^T\right) = 1 \Rightarrow (\det\mathbf{Q})^2 = 1 \Rightarrow \det\mathbf{Q} = \pm 1$$

Se $\det\mathbf{Q} = +1$, então, pela definição anterior, $\mathbf{Q}$ é uma rotação. Por outro lado, se $\det\mathbf{Q} = -1$, $\mathbf{Q}$ é uma reflexão.

**Exemplo C.10** *Uma rotação plana de um ângulo $\theta$ no sentido anti-horário é obtida aplicando-se a rotação $\mathbf{R}$ em torno do eixo $z$ a um vetor $\mathbf{v}$, ou seja, multiplicando o vetor $\mathbf{v}$ pela matriz $[\mathbf{R}]$ que tem a seguinte forma geral,*

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\,\theta & 0 \\ -sen\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Observe que*

$$\det\mathbf{R} = \det[\mathbf{R}] = \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = 1 > 0$$

*mostrando que $\mathbf{R}$ é de fato uma rotação.* □

**Exemplo C.11** *Verificar que os tensores dos Exemplos A.2 e A.4 são ortogonais e constituem-se, respectivamente, uma reflexão e umarotação.*

No primeiro caso, tem-se que,

$$[\mathbf{T}]\,[\mathbf{T}]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

revelando que $\mathbf{T}$ é um tensor ortogonal e como $\det\mathbf{T} = -1$, tem-se que $\mathbf{T}$ é uma reflexão.

Já no segundo exemplo, verifica-se que,

$$[\mathbf{R}]\,[\mathbf{R}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e como conseqüência $\mathbf{R}$ é o ortogonal, constituindo-se num rotação pois $\det\mathbf{R} = 1$. □

### C.1.12 Tensor positivo-definido

Um tensor $\mathbf{S}$ é *positivo-definido* se

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} > 0 \tag{C.35}$$

para todos os vetores $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

**Exemplo C.12** *Considere a transformação* $\mathbf{A}$ *cuja forma matricial para o sistema de coordenadas corrente seja a seguinte*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

*Observe que*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 > 0$$

*exceto para* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. *Dessa forma o tensor* $\mathbf{A}$ *é positivo-definido.* $\square$

### C.1.13 Vetor axial

Existe uma correspondência biunívoca entre vetores e tensores antissimétricos de modo que para cada tensor antissimétrico $\mathbf{W}$ corresponde um único vetor $\mathbf{w}$, denominado *vetor axial*, tal que

$$\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{C.36}$$

As componentes de $\mathbf{w}$ podem ser encontradas tomando-se $\mathbf{W}\mathbf{e}_j = \mathbf{w} \times \mathbf{e}_j$, pois

$$W_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{e}_j) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i).$$

Como $\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ e $\mathbf{W}$ é antissimétrico, tem-se que $W_{ij}$ deve ser igual a $-W_{ji}$ para que $\mathbf{w}$ exista. Desta forma, as componentes não nulas de $\mathbf{W}$ estão relacionadas às componentes de $\mathbf{w}$ como

$$\begin{aligned} W_{32} &= -W_{23} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{W}\mathbf{e}_2 = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_1 = w_1, \\ W_{13} &= -W_{31} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{W}\mathbf{e}_3 = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_2 = w_2, \\ W_{21} &= -W_{12} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{W}\mathbf{e}_1 = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_3 = w_3. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que

$$\mathbf{w} = W_{32}\mathbf{e}_1 + W_{13}\mathbf{e}_2 + W_{21}\mathbf{e}_3 \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{w} = -\left(W_{23}\mathbf{e}_1 + W_{31}\mathbf{e}_2 + W_{12}\mathbf{e}_3\right).$$

Somando as duas equações anteriores, obtém-se a seguinte expressão:

$$2\mathbf{w} = (W_{32} - W_{23})\mathbf{e_1} + (W_{13} - W_{31})\mathbf{e_2} + (W_{21} - W_{12})\mathbf{e_3},$$

a qual pode ser reescrita como

$$2\mathbf{w} = -e_{ijk}W_{jk}\mathbf{e}_i.$$

Observa-se que para um tensor antissimétrico $\mathbf{W}$, dado por

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

corresponde o vetor $\mathbf{w}$ cujas componentes são escritas como $w_1 = \alpha$, $w_2 = \beta$ e $w_3 = \gamma$.

**Exemplo C.13** *Dado*

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*decompor o tensor em partes simétrica e antissimétrica, encontrando para esta última parte o vetor axial. Verificar que* $\mathbf{Wa} = \mathbf{w} \times \mathbf{a}$ *para* $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.

Tem-se que $[\mathbf{T}] = [\mathbf{S}] + [\mathbf{W}]$ onde,

$$[\mathbf{S}] = \frac{1}{2}\left([\mathbf{T}] + [\mathbf{T}]^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{W}] = \frac{1}{2}\left([\mathbf{T}] - [\mathbf{T}]^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor axial $\mathbf{w}$ são dadas por,

$$\mathbf{w} = W_{32}\mathbf{e}_1 + W_{13}\mathbf{e}_2 + W_{21}\mathbf{e}_3 = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

Tomando agora $\mathbf{b} = \mathbf{Wa}$, tem-se,

$$\{\mathbf{b}\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$$

No entanto,

$$\mathbf{w} \times \mathbf{a} = (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{b}$$

□

### C.1.14 Leis de transformação para vetores e tensores

A Figura A.3 ilustra dois sistemas de coordenadas cartesianos formados pelos vetores unitários $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. Partindo-se de suas configurações originais, é possível fazer $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ coincidir com $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ através de uma rotação rígida, no caso em que os sistemas possuem a mesma orientação, ou de uma rotação seguida de uma reflexão, no caso em que suas orientações são distintas.

Dessa forma, observa-se que $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ estão relacionados por um tensor ortogonal $\mathbf{Q}$ da seguinte maneira

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{Q}^T\mathbf{e}_i = Q_{mi}\mathbf{e}_m \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}'_1 = Q_{11}\mathbf{e}_1 + Q_{21}\mathbf{e}_2 + Q_{31}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = Q_{12}\mathbf{e}_1 + Q_{22}\mathbf{e}_2 + Q_{32}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = Q_{13}\mathbf{e}_1 + Q_{23}\mathbf{e}_2 + Q_{33}\mathbf{e}_3 \end{array} \right. , \tag{C.37}$$

sendo $Q_{mi}Q_{mj} = Q_{mi}Q_{jm} = \delta_{ij}$, ou ainda, $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$. Verifica-se que $Q_{mi} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}'_i = \cos(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}'_i)$.

Tomando-se agora um vetor $\mathbf{a}$ qualquer, as suas componentes nos dois sistemas de coordenadas são escritas, respectivamente, como $a_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}$ e $a'_i = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{a}$. Uma vez que $a'_i = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{a} = Q_{mi}\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{a}$, tem-se

$$a'_i = Q_{mi}a_m, \tag{C.38}$$

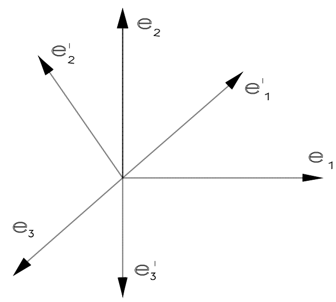


Figura C.3: Sistemas cartesianos retangulares.

ou em notação matricial

$$\left\{\begin{array}{c} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{array}\right\}_{\mathbf{e}_i'} = \left[\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{array}\right]_{\mathbf{e}_i'}^{\mathbf{e}_i} \left\{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\right\}_{\mathbf{e}_i} \rightarrow \{\mathbf{a}\}' = [\mathbf{Q}]^T \{\mathbf{a}\}. \tag{C.39}$$

As expressões anteriores constituem-se na lei de transformação das componentes de um mesmo vetor com respeito a diferentes bases cartesianas. É importante observar que $\{\mathbf{a}\}' = \{\mathbf{a}\}_{\mathbf{e}_i'}$ e $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{a}\}_{\mathbf{e}_i}$ são representações matriciais do mesmo vetor em bases distintas. Assim, a expressão (A.39) não corresponde à transformação linear $\mathbf{a}' = \mathbf{Q}^T\mathbf{a}$, a qual indica que $\mathbf{a}'$ é o vetor transformado de $\mathbf{a}$ através de $\mathbf{Q}^T$ ($\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}'$ são dois vetores diferentes enquanto que $\{\mathbf{a}\}$ e $\{\mathbf{a}\}'$ são duas matrizes que representam o mesmo vetor).

Considerando agora um tensor $\mathbf{T}$, suas componentes em relação às bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ são respectivamente, $T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j$ e $T_{ij}' = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j'$. Lembrando que $\mathbf{e}_i' = Q_{mi}\mathbf{e}_m$, tem-se

$$T_{ij}' = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j' = Q_{mi}\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{T} Q_{nj}\mathbf{e}_n = Q_{mi}Q_{nj}\left(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_n\right).$$

Logo,

$$T_{ij}' = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn} \tag{C.40}$$

ou matricialmente

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}],$$

$$\left[\begin{array}{ccc} T_{11}' & T_{12}' & T_{13}' \\ T_{21}' & T_{22}' & T_{23}' \\ T_{31}' & T_{32}' & T_{33}' \end{array}\right]_{\mathbf{e}_i'}^{\mathbf{e}_i'} = \left[\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{array}\right]_{\mathbf{e}_i'}^{\mathbf{e}_i} \left[\begin{array}{ccc} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array}\right]_{\mathbf{e}_i}^{\mathbf{e}_i} \left[\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{array}\right]_{\mathbf{e}_i}^{\mathbf{e}_i'}.$$

De maneira análoga,

$$T_{ij} = Q_{im}Q_{jn}T_{mn}' \tag{C.41}$$

ou ainda,

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{Q}] [\mathbf{T}]' [\mathbf{Q}]^T. \tag{C.42}$$

A equação (A.40) é a lei de transformação que relaciona componentes de um mesmo tensor com respeito a diferentes bases. Portanto, $[\mathbf{T}]$ e $[\mathbf{T}]'$ são diferentes matrizes para o mesmo tensor $\mathbf{T}$.

Uma vez que as componentes de um vetor ou tensor são conhecidas em $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, aplicando-se as equações (A.38) e (A.40), determinam-se suas componentes em relação a qualquer outra base $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$.

**Exemplo C.14** *Dado o tensor*

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{e}_i}^{\mathbf{e}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*encontrar as suas componentes em relação a base* $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ *obtida pela rotação de* $90°$ *em torno de* $\mathbf{e}_3$.

*Pela rotação dada,*

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$$

*Portanto, as únicas componentes não-nulas de* $\mathbf{Q}$ *são dadas por,*

$$Q_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = -1 \qquad Q_{21} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3 = 1 \qquad Q_{33} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = 1 \ \rightarrow [\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Por sua vez, tem-se a transformação,*

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}'_i}^{\mathbf{e}_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}^{\mathbf{e}_i} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{e}_i}^{\mathbf{e}'_i} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

### C.1.15 Autovetores e autovalores

Dado um tensor $\mathbf{S}$, seja $\mathbf{u}$ um vetor transformado por $\mathbf{S}$ num vetor paralelo a $\mathbf{u}$, isto é,

$$\mathbf{S}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \tag{C.43}$$

então $\mathbf{u}$ é um autovetor de $\mathbf{S}$ e $\lambda$ é o seu autovalor correspondente.

Verifica-se que se $(\lambda, \mathbf{u})$ é um autopar de $\mathbf{S}$, então qualquer vetor paralelo a $\mathbf{u}$ também é um autovetor de $\mathbf{S}$ com mesmo autovalor $\lambda$. Com efeito, tomando-se um escalar $\alpha$ tem-se que

$$\mathbf{S}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{S}\mathbf{u} = \alpha(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\alpha\mathbf{u}).$$

Dessa forma, um autovetor como definido a partir de (A.43) tem um tamanho arbitrário. Para evitar este inconveniente, convenciona-se tomar os autovetores como tendo comprimento unitário. Assim, pode-se redefinir (A.43) como a seguir

$$\mathbf{S}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}, \tag{C.44}$$

sendo $\mathbf{e}$ um vetor unitário. Como $\lambda\mathbf{e} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{e}$, tem-se

$$(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{e} = \mathbf{0},$$

com

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1.$$

Escrevendo $\mathbf{e}$ como combinação linear dos vetores da base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, obtém-se $\mathbf{e} = \alpha_i\mathbf{e}_i$. Assim, as expressões anterioriores, em termos de componentes, são dadas por

$$(S_{ij} - \lambda\delta_{ij})\,\alpha_j = 0 \rightarrow \begin{cases} (S_{11} - \lambda)\,\alpha_1 + S_{12}\alpha_2 + S_{13}\alpha_3 = 0 \\ S_{21}\alpha_1 + (S_{22} - \lambda)\,\alpha_2 + S_{23}\alpha_3 = 0 \\ S_{31}\alpha_1 + S_{32}\alpha_2 + (S_{33} - \lambda)\,\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \end{cases}. \tag{C.45}$$

Para que o sistema homogêneo (A.45) não tenha apenas a solução trivial ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$), o determinante da matriz desse sistema deve ser nulo, i.e.,

$$\det(\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{C.46}$$

Para um dado tensor $\mathbf{S}$, uma vez conhecidas as suas componentes $S_{ij}$ numa certa base, a expressão anterior é uma equação cúbica em $\lambda$, denominada *equação característica* de $\mathbf{S}$. As raízes $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ dessa equação são os autovalores de $\mathbf{S}$. Os respectivos autovetores de $\mathbf{S}$ são determinados substituindo cada um destes autovalores em (A.45) e resolvendo o sistema. Deve-se observar que as raízes do polinômio (A.46), ou seja, os autovalores de $\mathbf{S}$, podem ser:

- *reais e distintas;*
- *reais, sendo algumas repetidas;*
- *reais (distintas ou repetidas) e complexas;*
- *apenas complexas.*

O *espaço característico* de $\mathbf{S}$ correspondente a cada $\lambda$ é o subespaço de $\mathcal{V}$ que consiste de todos os vetores $\mathbf{v}$ que satisfazem a equação

$$\mathbf{S}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Se este espaço tem dimensão $n$, então diz-se que $\lambda$ tem multiplicidade $n$.

Verifica-se ainda que os autovalores do tensor $\mathbf{S}$ são independentes da base escolhida. De fato, dado o tensor $\mathbf{S}$ escrito numa base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, seus autovalores $\lambda$ e autovetores $\mathbf{e}$ satisfazem a relação A.44. Em forma matricial tem-se

$$[\mathbf{S}]\{\mathbf{e}\} = \lambda\{\mathbf{e}\}. \tag{C.47}$$

Representando $\mathbf{S}$ e $\mathbf{e}$ numa outra base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ e utilizando as leis de transformação para vetores e tensores, nota-se que

$$[\mathbf{S}]'\{\mathbf{e}\}' = [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{S}][\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^T\{\mathbf{e}\}.$$

Lembrando que $[\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^T$ resulta, pela relação A.33, no tensor identidade e que $\mathbf{S}$ satisfaz A.47, tem-se

$$[\mathbf{S}]'\{\mathbf{e}\}' = [\mathbf{Q}]^{\mathbf{T}}[\mathbf{S}]\{\mathbf{e}\} = \lambda[\mathbf{Q}]^{\mathbf{T}}\{\mathbf{e}\}.$$

Assim, empregando-se novamente a lei de transformação para vetores, chega-se a

$$[\mathbf{S}]'\{\mathbf{e}\}' = \lambda\{\mathbf{e}\}'.$$

Observa-se portanto que os autovalores $\lambda$ são os mesmos qualquer que seja a base escolhida para se representar o tensor $\mathbf{S}$ .

**Exemplo C.15** *Se com respeito a uma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a matriz $[\mathbf{T}]$ de um tensor é dada por,*

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

*Determinar os autovalores e os autovetores correspondentes.*

A equação característica é a seguinte,

$$|\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2-25\right) = 0$$

Logo, há três autovalores distintos, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ e $\lambda_3 = -5$.

Substituindo $\lambda_1$ no sistema $[\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I}]\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{0}\}$ tem-se,

$$\begin{cases} 0v_1 = 0 \\ v_2 + 4v_3 = 0 \\ 4v_2 - 5v_3 = 0 \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \end{cases}$$

Assim, $v_2 = v_3 = 0$ e $v_1 = \pm 1$. Portanto, o autovetor correspondente a $\lambda_1 = 2$ é $\mathbf{v}_1 = \pm\mathbf{e}_1$. Repetindo o procedimento para $\lambda_2 = 5$, tem-se,

$$\begin{cases} -3v_1 = 0 \\ -2v_2 + 4v_3 = 0 \\ 4v_2 - 8v_3 = 0 \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \end{cases}$$

Logo, $v_1 = 0, v_2 = 2/\sqrt{5}, v_3 = 1/\sqrt{5}$ e o autovetor correspondente é,

$$\mathbf{v}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\right)$$

Para o último autovalor $\lambda_3 = -5$, repetindo o mesmo procedimento anterior tem-se que o autovetor $\mathbf{v}_3$ *é dado por,*

$$\mathbf{v}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3\right)$$

□

Dado um tensor $\mathbf{S}$, é possível mostrar que o determinante de $\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I}$ admite a representação

$$\det\left(\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I}\right) = -\lambda^3 + \iota_1(\mathbf{S})\,\lambda^2 - \iota_2(\mathbf{S})\,\lambda + \iota_3(\mathbf{S}) \quad \forall\lambda \in \Re, \tag{C.48}$$

sendo

$$\iota_1(\mathbf{S}) = S_{11} + S_{22} + S_{33},$$

$$\iota_2(\mathbf{S}) = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} \end{vmatrix},$$

$$\iota_3(\mathbf{S}) = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}.$$

Como os autovalores de $\mathbf{S}$ não dependem da base adotada, os coeficientes da equação (A.48) devem ser os mesmos qualquer que seja a base. Dessa forma, o conjunto

$$\mathcal{J}_{\mathbf{S}} = \left(\iota_1(\mathbf{S}), \iota_2(\mathbf{S}), \iota_3(\mathbf{S})\right)$$

é chamado *lista dos invariantes principais*[1] de $\mathbf{S}$. Em termos do traço e do determinante, os invariantes são dados por

$$\begin{aligned}
\iota_1(\mathbf{S}) &= \mathrm{tr}\mathbf{S}, \\
\iota_2(\mathbf{S}) &= \tfrac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\mathbf{S})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{S})^2\right], \\
\iota_3(\mathbf{S}) &= \det\mathbf{S}.
\end{aligned}$$

No caso de $\mathbf{S}$ ser simétrico pode-se mostrar que

$$\begin{aligned}
\iota_1(\mathbf{S}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\
\iota_2(\mathbf{S}) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \\
\iota_3(\mathbf{S}) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3.
\end{aligned}$$

**Exemplo C.16** *Para o tensor do Exemplo A.15, determinar seus invariantes escalares e em seguida determinar seus autovalores a partir de (A.48).*

A matriz do tensor é a seguinte,

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

e portanto seus invariantes são,

$$\iota_1(\mathbf{T}) = 2 + 3 - 3 = 2$$

$$\iota_2(\mathbf{T}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -25$$

$$\iota_3(\mathbf{S}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -50$$

Estes valores fornecem a equação característica

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 25\lambda + 50 = 0$$

ou

$$(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0$$

De onde se obtém $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ e $\lambda_3 = -5$. $\square$

### C.1.16 Valores e direções principais de tensores simétricos

Entre os vários tipos de tensores estudados em mecânica do contínuo, destacam-se os tensores simétricos tais como tensores de deformação e tensão. Neste caso, o seguinte teorema é válido:

**Teorema C.1** *Dado um tensor simétrico com componentes reais tem-se:*

1. *Seus autovalores são números reais.*

2. *Seus espaços característicos gerados por seus autovetores são mutuamente ortogonais.*

[1] São chamados invariantes pois se mantém constantes no caso de mudanças de coordenadas por rotação.

Logo, para um tensor simétrico real sempre existem pelo menos 3 autovetores reais denominados *direções principais*. Para mostrar que as direções principais de um tensor simétrico são mutuamente perpendiculares, considere os autovetores $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ de um tensor $\mathbf{S}$ com seus respectivos autovalores $\lambda_1$ e $\lambda_2$. Assim,

$$\begin{cases} \mathbf{S}\mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{S}\mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_2 \end{cases}$$

ou ainda,

$$\lambda_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{S}\mathbf{n}_1 \tag{C.49}$$

$$\lambda_2 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{n}_2 \tag{C.50}$$

Pela definição de tensor transposto, tem-se $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{S}^T \mathbf{n}_1$. Como $\mathbf{S}$ é simétrico, vem $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{S}\mathbf{n}_1$. Subtraindo (A.50) de (A.49) segue-se que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

A partir daí, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, ou seja, $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ são ortogonais entre si. Portanto, se os autovalores são distintos, então as 3 direções principais são mutuamente perpendiculares.

Supondo agora que $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ são autovetores com mesmo autovalor $\lambda$, tem-se $\mathbf{S}\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_1$ e $\mathbf{S}\mathbf{n}_2 = \lambda \mathbf{n}_2$. Tomando-se escalares $\alpha$ e $\beta$, pode-se escrever $\mathbf{S}\,(\alpha \mathbf{n}_1 + \beta \mathbf{n}_2) = \alpha \mathbf{S}\mathbf{n}_1 + \beta \mathbf{S}\mathbf{n}_2 = \lambda\,(\alpha \mathbf{n}_1 + \beta \mathbf{n}_2)$. Portanto, a combinação linear $\alpha \mathbf{n}_1 + \beta \mathbf{n}_2$ é também um autovetor de $\mathbf{S}$ com autovalor $\lambda$. Assim, se existem dois autovetores com o mesmo autovalor, então existem infinitos autovetores (os quais formam um plano) que correspondem ao mesmo autovalor $\lambda$. Esta situação ocorre quando a equação característica possui uma raiz repetida (ou múltipla). Dessa forma, embora não únicas, existem ainda três direções principais mutuamente perpendiculares.

Finalmente, no caso em que existam 3 autovalores idênticos, é possível mostrar que qualquer vetor é um autovetor de $\mathbf{S}$. Logo, para qualquer tensor simétrico real $\mathbf{S}$, sempre existe pelo menos um conjunto de 3 vetores perpendiculares entre si.

Considerando os autovetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de $\mathbf{S}$ como vetores unitários nas direções principais, as componentes do tensor $\mathbf{S}$ em relação a base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ são dadas por

$$\begin{array}{ll} S_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot (\lambda_1 \mathbf{e}_1) = \lambda_1, & S_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot (\lambda_2 \mathbf{e}_2) = 0 = S_{21}, \\ S_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{S}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot (\lambda_2 \mathbf{e}_1) = \lambda_2, & S_{13} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \cdot (\lambda_3 \mathbf{e}_3) = 0 = S_{31}, \\ S_{33} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{S}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot (\lambda_3 \mathbf{e}_3) = \lambda_3, & S_{23} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{S}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot (\lambda_3 \mathbf{e}_3) = 0 = S_{32}. \end{array}$$

Logo,

$$[\mathbf{S}]_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

ou seja, a matriz do tensor $\mathbf{S}$, na base de autovetores, é diagonal contendo os autovalores de $\mathbf{S}$.

O teorema seguinte resume os resultados anteriores.

**Teorema C.2** *Seja* $\mathbf{S}$ *simétrico. Logo, exixte uma base ortogonal para* $\mathcal{V}$ *consistindo inteiramente de autovetores de* $\mathbf{S}$*. Mais ainda, nesta base* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *o tensor* $\mathbf{S}$ *tem a forma diagonal*

$$\mathbf{S} = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

*com* $\lambda_1$*,* $\lambda_2$*,* $\lambda_3$ *sendo os autovalores de* $\mathbf{S}$*.*