

Capítulo 5

TORÇÃO

5.1 Seções Circulares

Como no caso de barras, o eixo também é um elemento estrutural com uma dimensão longitudinal predominante. Assume-se nesta formulação que os eixos são circulares ou tubulares de seção constante. O interesse no estudo de eixos está relacionado apenas às ações de movimento originando torção das seções em torno da dimensão longitudinal. Na abordagem variacional, a formulação do problema de torção segue as mesmas etapas do caso de barra. Observa-se que os eixos de seção circular estão presentes em praticamente todos os sistemas mecânicos, vindo daí a importância do problema de torção. Na próxima seção, considera-se o caso de torção em seções genéricas, sendo a seção circular um caso particular.

5.1.1 Definição da Cinemática

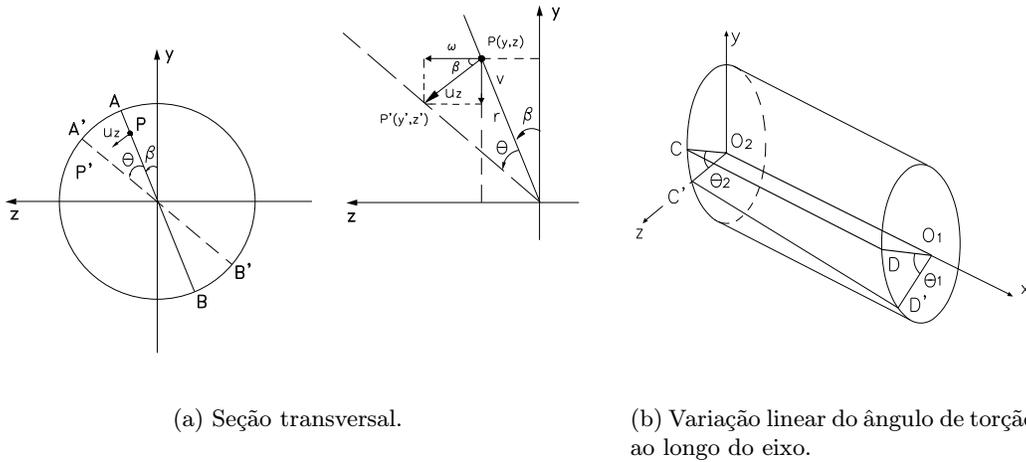
No caso da torção de eixos com seções transversais circulares ou tubulares, as seguintes hipóteses cinemáticas são feitas em relação às ações de movimento possíveis definindo o espaço vetorial \mathcal{V} :

- as seções transversais planas permanecem planas e normais ao eixo longitudinal x , como no caso da barra. Assume-se ainda que seções transversais paralelas permanecem a uma distância constante entre si, ou seja, não há deformação longitudinal, a qual está presente em seções não-circulares e origina o empenamento da seção (ver Seção 5.2).
- as ações de movimento produzem uma rotação das seções transversais em torno x , crescendo linearmente a partir de zero no centro da seção e atingindo o valor máximo na periferia. Em outras palavras, *cada seção transversal sofre uma rotação rígida constante*, como mostrado na Figura 5.1(a). Esta hipótese significa que dado um plano imaginário DO_1O_2C , ilustrado na Figura 5.1(b), este se move para $D'O_1O_2C'$ sob a ação da rotação.

Como cada seção sofre uma rotação rígida em torno do eixo longitudinal x , então, a rotação θ é constante para todos os pontos da seção. Dessa forma, θ é função escalar apenas da coordenada x , podendo-se escrever $\theta = \theta(x)$.

A posição de um ponto P na seção transversal x é dada por suas coordenadas (y, z) , as quais podem ser escritas em função do ângulo β e do raio r , ilustrados na Figura 5.1(a), como

$$\begin{aligned} y &= r \cos \beta, \\ z &= r \sin \beta, \end{aligned} \tag{5.1}$$



(a) Seção transversal.

(b) Variação linear do ângulo de torção ao longo do eixo.

Figura 5.1: Cinemática de torção circular.

sendo a coordenada radial r dada por $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ e $\tan \beta = \frac{y}{z}$. Após a rotação θ da seção x , o ponto P se move para a posição final P' , cujas coordenadas (y', z') são dadas por (ver Figura 5.1(a))

$$\begin{aligned} y' &= r \cos(\beta + \theta), \\ z' &= r \sin(\beta + \theta). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Desta maneira, o ponto P tem as componentes de deslocamento v e w , respectivamente, nas direções y e z do sistema de referência adotado ao se mover para a posição P' . Estas componentes são dadas pelas diferenças das coordenadas final (y', z') e inicial (y, z) (ver Figura 5.1(a)), isto é,

$$\begin{aligned} v &= y' - y, \\ w &= z' - z. \end{aligned}$$

Substituindo as equações em (5.2) na expressão anterior vem que

$$\begin{aligned} v &= r \cos(\beta + \theta) - y, \\ w &= r \sin(\beta + \theta) - z. \end{aligned}$$

Desenvolvendo as relações trigonométricas anteriores, obtém-se

$$\begin{aligned} v &= r \cos \beta \cos \theta - r \sin \beta \sin \theta - y, \\ w &= r \sin \beta \cos \theta + r \cos \beta \sin \theta - z. \end{aligned}$$

Mas a partir da equação (5.1), tem-se que $r \cos \beta = y$ e $r \sin \beta = z$. Portanto

$$\begin{aligned} v &= y \cos \theta - z \sin \theta - y, \\ w &= z \cos \theta + y \sin \theta - z. \end{aligned}$$

Assumindo o caso de pequenas rotações, ou seja, para θ pequeno, as simplificações $\cos \theta \approx 1$ e $\sin \theta \approx \theta$ são válidas. Logo, as expressões anteriores se reduzem a

$$\begin{aligned} v &= y(1) - z(\theta) - y, \\ w &= z(1) + y(\theta) - z, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} v &= -z\theta, \\ w &= y\theta. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Logo, devido a torção de um ângulo θ na seção transversal x , cada ponto P com coordenadas y e z apresenta as componentes de deslocamento v e w . Como não ocorre empenamento da seção, a componente de deslocamento na direção x é nula, ou seja, $u = 0$. Observe ainda que as componentes v e w variam linearmente com as coordenadas z e y , como ilustrado nas Figuras 5.2(b) e 5.2(e) para uma seção circular cheia de diâmetro d . Neste caso, os deslocamentos v e w são nulos no centro da seção transversal e atingem o valor máximo na extremidade do eixo onde $\sqrt{y^2 + z^2} = \frac{d}{2}$. O sinal negativo em v é compatível com o sentido da rotação, ou seja, ao se girar a seção segundo a direção positiva do eixo x , o ponto P se move para baixo, em sentido contrário à direção positiva do eixo y do sistema de referência adotado (ver Figura 5.2(a)). Caso a rotação θ seja negativa, ou seja, contrária à direção positiva do eixo x , o ponto P se move para cima fazendo com que v seja positivo e w negativo (ver Figura 5.2(d)). As Figuras 5.2(c) e 5.2(f) consideram o caso de um eixo circular vazado com diâmetros interno d_i e externo d_e . Neste caso, as componentes de deslocamento v e w são mínimas no diâmetro interno onde $\sqrt{y^2 + z^2} = \frac{d_i}{2}$ e máximas na extremidade da seção pois $\sqrt{y^2 + z^2} = \frac{d_e}{2}$.

De acordo com as hipóteses anteriores adotadas, o ângulo de torção θ é constante numa mesma seção, mas varia entre seções, o que pode ser denotado como $\theta = \theta(x)$. As componentes de deslocamento dadas em (5.3) são válidas para um ponto P com coordenadas (y, z) na seção x . Para indicar a cinemática de todos os pontos do eixo, pode-se reescrever (5.3) incluindo a dependência explícita do ângulo de torção θ com a coordenada x seção, ou seja, $\theta = \theta(x)$. Logo

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= -z\theta(x), \\ w(x, y, z) &= y\theta(x). \end{aligned} \quad (5.4)$$

A coordenada x permite localizar a seção e as coordenadas y e z indicam o ponto P considerado na seção x .

Lembrando que o deslocamento na direção longitudinal é nulo, ou seja, $u(x, y, z) = 0$, tem-se que a cinemática de um eixo circular é dado por um campo vetorial $\mathbf{u}(x, y, z)$ com as seguintes componentes

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -z\theta(x) \\ y\theta(x) \end{Bmatrix}. \quad (5.5)$$

Os índices 1, 2, 3 são empregados para expressar a equação anterior em notação indicial caso seja necessário. Emprega-se a denominação campo vetorial para $\mathbf{u}(x, y, z)$, pois a cinemática de cada ponto do eixo é descrito por um vetor, cujas componentes dependem das suas coordenadas (x, y, z) . Como o eixo é contínuo, existem infinitos pontos, ou seja, tem-se infinitos vetores descrevendo a cinemática do eixo. Por este motivo, usa-se o conceito de campo vetorial para descrever estes infinitos vetores.

A partir da cinemática dada em (5.5), pode-se definir uma componente de deslocamento tangencial $\mathbf{u}_t(x, y, z)$ para cada ponto P do eixo com coordenadas (x, y, z) (ver Figura 5.1(a)). Para isto, basta somar vetorialmente $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$, ou seja,

$$\mathbf{u}_t(x, y, z) = v(x, y, z)\mathbf{e}_j + w(x, y, z)\mathbf{e}_k, \quad (5.6)$$

sendo \mathbf{e}_j e \mathbf{e}_k os versores nas direções y e z . O módulo de $\mathbf{u}_t(x, y, z)$, indicado como $u_t(x, y, z)$, é dado substituindo $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ indicado em (5.5). Portanto

$$u_t(x, y, z) = \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right) \theta(x), \quad (5.7)$$

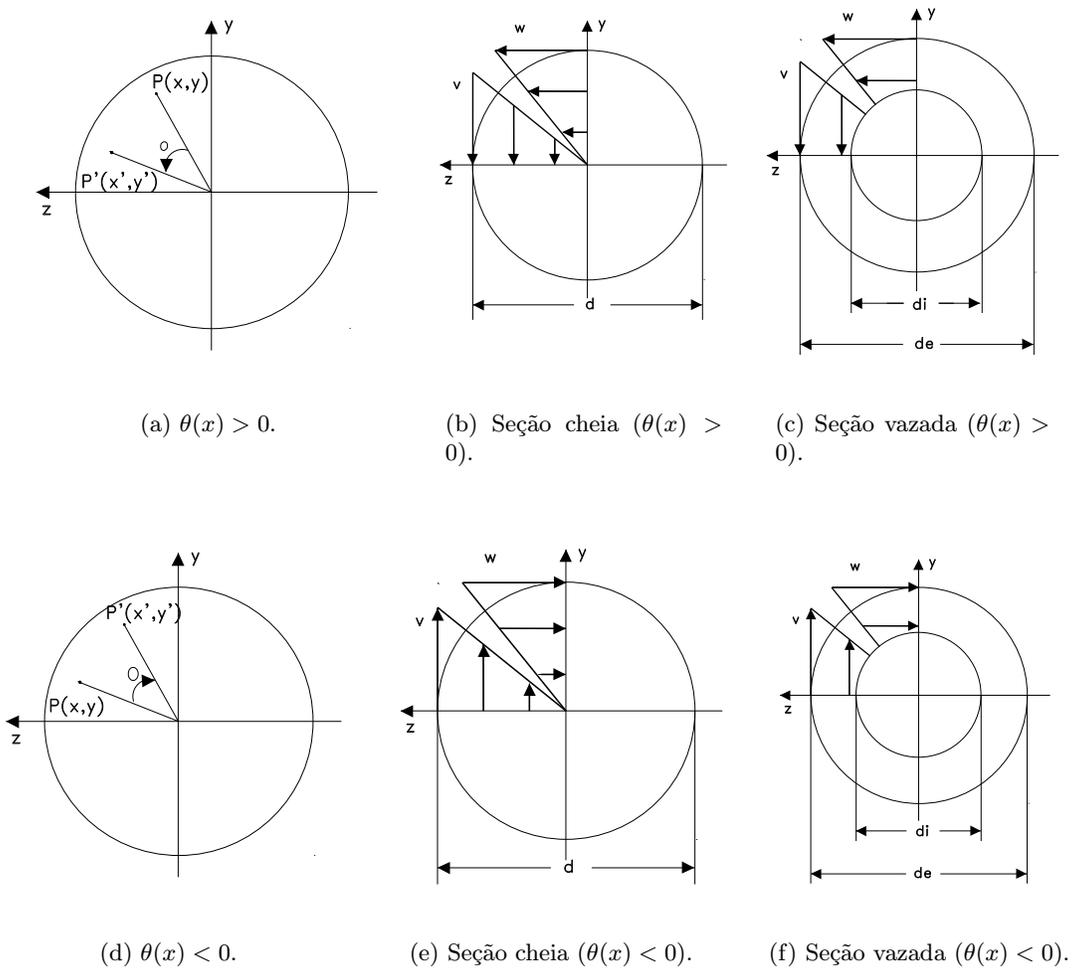


Figura 5.2: Componentes transversais de deslocamento na torção circular.

ou lembrando que $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, tem-se que

$$u_t(x, y, z) = r\theta(x). \quad (5.8)$$

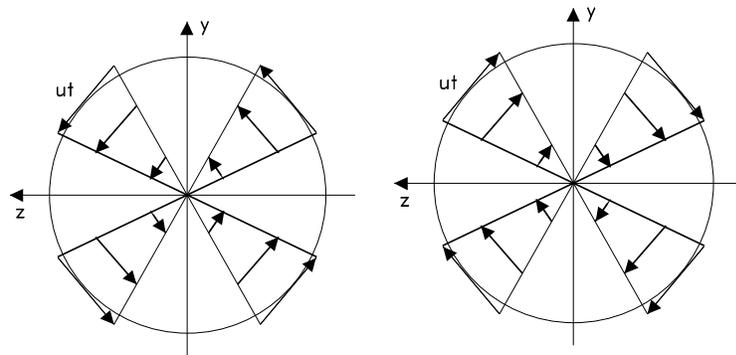
O deslocamento tangencial u_t pode ser obtido diretamente a partir da Figura 5.3(a) empregando um sistema de coordenadas polar na seção transversal do eixo. Neste caso, a posição do ponto P é expressa em função das coordenadas radial r e tangencial β . Logo, esta posição é dada pelo arco AP sendo igual a $r\beta$ para o caso de β pequeno. Analogamente, a posição final P' é dada pelo arco AP' , ou seja, $r(\beta + \theta)$. Portanto, o deslocamento tangencial será simplesmente a diferença das posições inicial P e final P'

$$u_t = r(\beta + \theta) - r\beta,$$

ou seja,

$$u_t(x, r, \theta) = r\theta(x). \quad (5.9)$$

Novamente, $u_t(x)$ varia linearmente na seção transversal, sendo zero no centro da seção cheia e máximo na periferia. A Figura 5.3 ilustra o comportamento do deslocamento tangencial para ângulos de torção positivo e negativo. O caso de seções vazadas é análogo.



(a) Deslocamento tangencial.

(b) $\theta(x) > 0$.

(c) $\theta(x) < 0$.

Figura 5.3: Comportamento do deslocamento tangencial na seção transversal do eixo.

O conjunto \mathcal{V} das ações cinematicamente possíveis consiste dos campos de deslocamento $\mathbf{u}(x, y, z)$ da forma (5.5), sendo $\theta(x)$ uma função suave de x . Portanto

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u}, u_1 = 0, u_2 = -z\theta(x), v_3 = y\theta(x) \text{ e } \theta(x) \text{ é uma função suave}\}. \quad (5.10)$$

Para um eixo livre, todos os elementos $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ são também ações *admissíveis*, pois não há vínculos físicos impedindo o movimento de torção nas extremidades. Quando alguma restrição está presente, somente o subconjunto $Kin_{\mathbf{v}}$ de \mathcal{V} , formado pelas funções respeitando as restrições cinemáticas, constitui as ações de movimento admissíveis.

5.1.2 Deformação

No caso do problema de barra, a componente de deformação longitudinal $\varepsilon_{xx}(x)$ está relacionada a uma ação de estiramento $u(x)$ da barra. Desta forma, $\varepsilon_{xx}(x)$ representa fisicamente uma variação específica do comprimento da barra. No caso de torção, as ações de movimento são dadas a partir do ângulo de torção

$\theta(x)$. Como $\theta(x)$ varia em cada seção transversal, tem-se uma variação linear do ângulo de torção ao longo do comprimento do eixo (ver Figura 5.1(b)). Assim, no problema de torção circular, a deformação será angular devido à variação de θ e não longitudinal como no caso da barra. Observa-se que se todas as seções sofrerem uma mesma rotação θ , o eixo apresentará uma rotação de corpo rígido em torno do eixo x , como será visto na próxima seção, não havendo assim deformação do eixo.

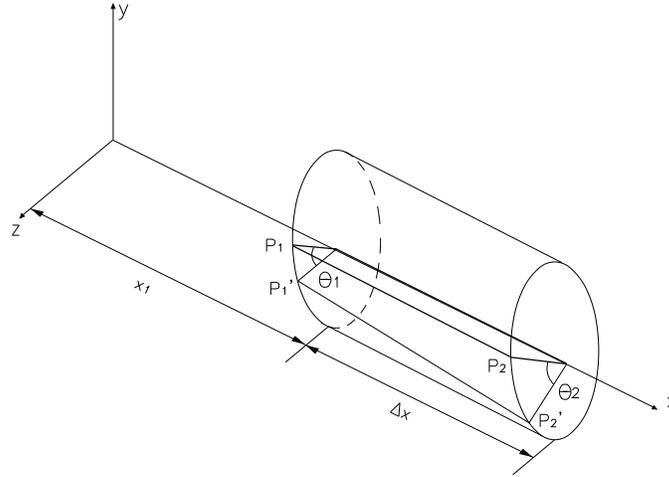


Figura 5.4: Análise da deformação na torção circular.

Para caracterizar a deformação no eixo devido ao ângulo de torção $\theta(x)$, comparam-se os deslocamentos v e w de dois pontos em duas seções transversais que apresentam rotações distintas para uma torção do eixo. Para isso, considere a Figura 5.4 ilustrando as seções localizadas à distâncias x e $x + \Delta x$ da origem do sistema de referência. Considere então os pontos P_1 e P_2 com coordenadas (x, y, z) e $(x + \Delta x, y, z)$ respectivamente. Logo, antes da torção do eixo estes pontos possuem as mesmas coordenadas transversais y e z . Após a torção do eixo, as seções x e $x + \Delta x$ apresentam, respectivamente, rotações rígidas θ_1 e θ_2 , sendo $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ a variação do ângulo de torção entre estas duas seções transversais. Neste caso, os pontos P_1 e P_2 assumem as posições finais P'_1 e P'_2 . Os deslocamentos transversais v e w apresentados por estes pontos são dados a partir da equação (5.5), respectivamente, por

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= -z\theta(x) = -z\theta_1 & w(x, y, z) &= y\theta(x) = y\theta_1 \\ v(x + \Delta x, y, z) &= -z\theta(x + \Delta x) = -z\theta_2 & w(x + \Delta x, y, z) &= y\theta(x + \Delta x) = y\theta_2 \end{aligned}$$

Associado às componentes de deslocamento transversal v e w , tem-se as respectivas componentes de deformação angular γ_{xy} e γ_{xz} . A letra γ é usada para indicar uma deformação angular, enquanto ε representa uma deformação longitudinal. O índice x representa a direção normal ao plano, ou seja, como as deformações ocorrem na seções transversais, observa-se que o eixo x é normal a cada seção. Os índices y e z indicam a direção da deformação. Logo, γ_{xy} é uma deformação angular no plano x na direção do eixo y . Analogamente, γ_{xz} é uma componente de deformação angular no plano x na direção do eixo z .

Para se obter as componentes de deformação angular γ_{xy} e γ_{xz} , consideram-se as diferenças dos deslocamentos transversais v e w dos pontos P_1 e P_2 divididos pela distância Δx entre as seções e toma-se o limite para Δx tendendo a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x}, \\ \gamma_{xz} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w(x + \Delta x, y, z) - w(x, y, z)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Denotando $v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z) = \Delta v$ e $w(x + \Delta x, y, z) - w(x, y, z) = \Delta w$ como as variações nos deslocamentos transversais entre os pontos P_1 e P_2 , respectivamente, nas direções y e z e utilizando a definição de derivada vem que

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv(x, y, z)}{dx}, \\ \gamma_{xz} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw(x, y, z)}{dx}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Estas componentes de deformação podem ser escritas em termos do ângulo de torção, bastando para isto substituir v e w dados em (5.4)

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{dv(x, y, z)}{dx} = \frac{d}{dx}(-z\theta(x)), \\ \gamma_{xz} &= \frac{dw(x, y, z)}{dx} = \frac{d}{dx}(y\theta(x)),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(x, y, z) &= -z \frac{d\theta(x)}{dx}, \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &= y \frac{d\theta(x)}{dx}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Supondo que as dimensões estejam em metros e o ângulo de torção em radianos, observa-se que γ_{xy} tem como unidade

$$[\gamma_{xy}] = m \frac{rd}{m} = rd,$$

ou seja, γ_{xy} é dado também em radianos e representa uma deformação angular.

De forma análoga ao campo de deslocamentos tangencial, define-se também uma componente de deformação angular na direção tangencial indicada por γ_t . Neste caso, os deslocamentos tangenciais dos pontos P_1 e P_2 são dados empregando a equação (5.9). Assim, a deformação tangencial é determinada como

$$\gamma_t(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_t(x + \Delta x, r, \theta_2) - u_t(x, r, \theta_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r\theta_2 - r\theta_1}{\Delta x} = r \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta x},\tag{5.13}$$

Portanto, empregando a definição de derivada, chega-se a expressão final para a deformação tangencial γ_t

$$\gamma_t(x, r, \theta) = r \frac{d\theta(x)}{dx}.\tag{5.14}$$

Portanto, a deformação tangencial também varia linearmente com a coordenada radial r na seção transversal do eixo. Isto é esperado, pois o campo de deslocamentos tangencial (5.9) também varia linearmente na seção.

A Figura 5.5 ilustra as componentes de deformação angular γ_{xy} , γ_{xz} e γ_t . A seguinte relação é válida

$$\gamma_t = \gamma_{xy} + \gamma_{xz}.\tag{5.15}$$

O espaço \mathcal{W} das ações de deformação compatíveis com a cinemática de torção em seções circulares é constituído pelas funções contínuas $\gamma_{xy}(x)$ e $\gamma_{xz}(x)$. Observa-se que o operador de deformação D , relacionando os espaços \mathcal{V} das ações de movimento possíveis e \mathcal{W} das ações de deformação compatíveis

Figura 5.5: Componentes de deformação γ_{xy} , γ_{xz} e γ_t num eixo circular.

com a cinemática definida em \mathcal{V} , é dado por $D = \frac{d}{dx}$. Logo, aplicando $D = \frac{d}{dx}$ a uma ação de movimento tangencial $\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}$ tem-se as respectivas componentes de deformação, ou seja,

$$D\mathbf{u} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{xy}(x) \\ \gamma_{xz}(x) \end{bmatrix}.$$

O operador D pode ainda ser indicado como

$$D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \rightarrow \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 0 \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_{xy}(x) \\ \gamma_{xz}(x) \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Considerando a componente tangencial de deslocamento u_t , o espaço \mathcal{W} das ações de deformação compatíveis é constituído por funções contínuas $\gamma_t(x)$ representando a deformação tangencial. Neste caso, o operador de deformação D também é dado por $D = \frac{d}{dx}$, de tal forma que

$$D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \\ u_t(x, r, \theta) = r\theta(x) \rightarrow \frac{d[r\theta(x)]}{dx} = \gamma_t(x). \quad (5.17)$$

5.1.3 Movimentos Rígidos

Os movimentos rígidos são obtidos impondo-se que a deformação no eixo deve ser nula. Para isso, basta impor que as componentes $\gamma_{xy}(x)$ e $\gamma_{xz}(x)$ sejam simultaneamente nulas. Logo

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(x, y, z) &= -z \frac{d\theta(x)}{dx} = 0, \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &= y \frac{d\theta(x)}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A única condição para satisfazer as relações anteriores é que $\frac{d\theta(x)}{dx} = 0$ para toda seção transversal do eixo. Isto implica que θ deve ser uma rotação constante em todas as seções. Assim, o plano DO_1O_2C

ilustrado na Figura 5.1(b) sofre apenas uma rotação rígida sem se deformar como mostrado na Figura 5.6. Logo, as ações de movimento rígido são aquelas nas quais todas as seções transversais sofrem a mesma rotação rígida.

Portanto, o conjunto $\mathcal{N}(D)$ é composto das ações de movimento dadas em (5.5) sendo θ constante. Define-se, então, o conjunto $\mathcal{N}(D)$ como

$$\mathcal{N}(D) = \{\mathbf{u}; \mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \theta(x) = \theta \text{ constante}\}. \quad (5.19)$$

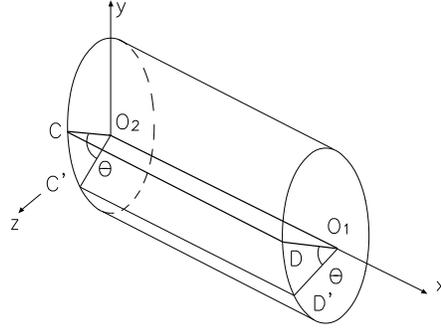


Figura 5.6: Movimento rígido na torção circular.

5.1.4 Potência Interna

A potência interna permite associar as componentes de deformação $\gamma_{xy}(x)$ e $\gamma_{xz}(x)$ com as respectivas componentes de tensão $\tau_{xy}(x)$ e $\tau_{xz}(x)$ representando as forças internas no eixo. Como a deformação é angular, $\tau_{xy}(x)$ e $\tau_{xz}(x)$ são denominadas tensões de cisalhamento atuantes no plano x nas direções y e z , respectivamente. Observa-se que como se tem duas componentes de deformação, associa-se a cada uma delas a sua respectiva componente de tensão. Para um ponto P qualquer no eixo, a relação $\tau_{xy}(x)\gamma_{xy}(x) + \tau_{xz}(x)\gamma_{xz}(x)$ representa a densidade de potência interna no ponto. Deve-se somar estas contribuições para cada ponto do eixo. Como o eixo é contínuo, ou seja, possui infinitos pontos, esta soma é escrita como uma integral ao longo do volume V do eixo, ou seja,

$$P_i = - \int_v [\tau_{xy}(x, y, z)\gamma_{xy}(x, y, z) + \tau_{xz}(x, y, z)\gamma_{xz}(x, y, z)] dV. \quad (5.20)$$

Como mencionado anteriormente, o sinal negativo é introduzido apenas por conveniência quando da aplicação do PPV.

Substituindo as expressões para as componentes de deformação dadas em (5.12), obtem-se

$$\begin{aligned} P_i &= - \int_v \left[\tau_{xy}(x, y, z) \left(-z \frac{d\theta(x)}{dx} \right) + \tau_{xz}(x, y, z) \left(y \frac{d\theta(x)}{dx} \right) \right] dV \\ &= - \int_v [-z\tau_{xy}(x, y, z) + y\tau_{xz}(x, y, z)] \frac{d\theta(x)}{dx} dV. \end{aligned}$$

A integral de volume anterior pode ser reescrita como integrais ao longo do comprimento L do eixo e da área A da seção transversal da seguinte forma

$$P_i = - \int_0^L \left(\int_A [-z\tau_{xy}(x, y, z) + y\tau_{xz}(x, y, z)] dA \right) \frac{d\theta(x)}{dx} dx. \quad (5.21)$$

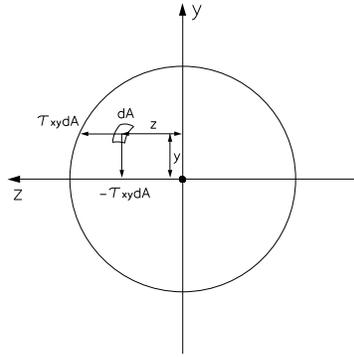


Figura 5.7: Resultante em termos de momento torçor na seção transversal do eixo.

A integral ao longo da área resulta num momento ao longo do eixo x . Supondo que as unidades de comprimento sejam dadas em m e as tensões em N/m^2 , o integrando estará dado em N/m , o qual após a integração fornecerá um termo em Nm , ou seja, em unidades de momento. Para interpretar esta integral, considere a Figura 5.7 mostrando um elemento de área infinitesimal dA distando y e z , respectivamente, dos eixos z e y do sistema de referência adotado. Observe que τ_{xy} e τ_{xz} são as componentes de tensão no plano x (o eixo x é normal às seções do eixo) nas direções dos eixos y e z , respectivamente. Por sua vez, os produtos $-\tau_{xy}dA$ e $\tau_{xz}dA$ indicam, respectivamente, resultantes de forças internas no elemento de área nas direções $-y$ e z . Da mesma forma, os produtos $-z\tau_{xy}dA$ e $y\tau_{xz}dA$ representam momentos na direção positiva do eixo x , os quais somados fornecem o integrando $-z\tau_{xy} + y\tau_{xz}$ na área da seção. Por este motivo, denomina-se

$$M_x(x) = \int_A [-z\tau_{xy}(x, y, z) + y\tau_{xz}(x, y, z)] dA \quad (5.22)$$

como *momento longitudinal ou torçor na seção transversal*. Observe que o momento torçor varia em cada seção x do eixo, de forma análoga ao ângulo de torção $\theta(x)$.

Assim, substituindo (5.22) em (5.21), pode-se reescrever a expressão para a potência interna como

$$P_i = - \int_0^L M_x(x) \frac{d\theta(x)}{dx} dx. \quad (5.23)$$

Portanto, o espaço \mathcal{W}' dos esforços internos é constituído por funções escalares contínuas $M_x(x)$ caracterizando o momento torçor em cada seção transversal x do eixo.

De forma análoga ao caso de barra, pode-se integrar a expressão da potência interna por partes, aplicando a regra dada em (4.13), resultando em

$$P_i = - \int_0^L M_x(x) \frac{d\theta(x)}{dx} dx = - M_x(x)\theta(x)|_0^L + \int_0^L \frac{dM_x(x)}{dx} \theta(x) dx \quad (5.24)$$

$$= - [M_x(L)\theta(L) - M_x(0)\theta(0)] + \int_0^L \frac{dM_x(x)}{dx} \theta(x) dx. \quad (5.25)$$

Logo, os esforços internos compatíveis com a cinemática de torção circular são caracterizados por momentos torçores concentrados $M_x(L)$ e $M_x(0)$ nas extremidades do eixo, além de um momento torçor distribuído $\frac{dM_x(x)}{dx}$ no seu interior. Estes esforços são ilustrados na Figura 5.8(a).

A potência interna pode ser escrita em função da componente de deformação angular γ_t , ou seja,

$$P_i = - \int_v \tau_t(x, r, \theta) \gamma_t(x, r, \theta) dV, \quad (5.26)$$

sendo $\tau_t(x, r, \theta)$ a tensão de cisalhamento ao longo da direção tangencial num ponto de coordenadas polares (r, θ) . Substituindo (5.14), a expressão anterior pode ser reescrita, de forma análoga a (5.21), como

$$P_i = - \int_0^L \left(\int_A r \tau_t(x, r, \theta) dA \right) \frac{d\theta(x)}{dx} dx. \quad (5.27)$$

Neste caso, o momento torçor é dado pela integral ao longo da área A em função da tensão de cisalhamento tangencial, ou seja,

$$M_x(x) = \int_A r \tau_t(x, r, \theta) dA. \quad (5.28)$$

A expressão anterior pode ser integrada resultando em

$$M_x(x) = r \tau_t(x, r, \theta) A(x),$$

ou ainda

$$M_x(x) = \frac{\tau_t(x, r, \theta) I_p(x)}{r}, \quad (5.29)$$

sendo $I_p(x)$ o momento de inércia polar da seção transversal.

Esta equação será empregada ao se discutir o ensaio de torção para caracterizar as propriedades de um corpo de prova submetido à torção.

Observa-se ainda que as componentes de tensão τ_{xy} , τ_{xz} e τ_t estão relacionadas de forma análoga às componentes de deformação angular γ_{xy} , γ_{xz} e γ_t , ou seja,

$$\tau_t = \tau_{xy} + \tau_{xz}. \quad (5.30)$$

5.1.5 Aplicação do PPV

Deseja-se caracterizar os esforços externos f compatíveis com a cinemática definida para a torção de eixos circulares. Para isso, aplica-se o PPV discutido na Seção 3.4. Este princípio estabelece que o estado de equilíbrio de um corpo na sua posição deformada pode ser avaliado introduzindo uma ação de movimento virtual.

Assim, suponha que um eixo tenha sofrido uma torção e se encontra em equilíbrio na sua configuração deformada. Para avaliar este estado de equilíbrio, introduz-se uma ação de torção virtual $\hat{\theta}(x)$ a partir da posição deformada. Se o eixo está realmente em equilíbrio nesta configuração, as potências externa e interna associadas a qualquer ação virtual $\hat{\theta}(x)$ devem ser iguais, ou seja,

$$P_e + P_i = 0.$$

Como os esforços externos f não foram ainda caracterizados, denota-se a potência externa como $P_e = \langle f, \hat{\theta} \rangle$. Logo, substituindo a potência interna dada em (5.23) na expressão anterior vem que

$$\langle f, \hat{\theta} \rangle - \int_0^L M_x(x) \frac{d\hat{\theta}(x)}{dx} dx = 0. \quad (5.31)$$

Considerando a expressão para a potência interna (5.24) após a integração por partes, reescreve-se o PPV como

$$\langle f, \hat{\theta} \rangle - [M_x(L)\hat{\theta}(L) - M_x(0)\hat{\theta}(0)] + \int_0^L \frac{dM_x(x)}{dx} \hat{\theta}(x) dx = 0. \quad (5.32)$$

Este é o enunciado integral descrevendo o equilíbrio do eixo livre de restrições, fornecendo ainda uma representação dos esforços externos compatíveis com o modelo cinemático do eixo.

5.1.6 Caracterização dos Esforços Externos

Como mencionado na seção anterior, o PPV representa o equilíbrio das potências externa e interna para qualquer ação virtual $\hat{\theta}(x)$ a partir da posição deformada do eixo. Assim, os esforços externos presentes no eixo devem ser tais que a potência gerada pelos mesmos durante uma rotação virtual $\hat{\theta}(x)$ equilibre a potência interna dos esforços internos para a mesma ação virtual.

Logo, para caracterizar os esforços externos compatíveis com os esforços internos e conseqüentemente com a cinemática do eixo, faz-se uma análise da expressão (5.32) do PPV. Logo, para equilibrar os termos $M_x(L)\hat{\theta}(L)$ e $M_x(0)\hat{\theta}(0)$ da potência interna, tem-se os respectivos termos $T_L\hat{\theta}(L)$ e $T_0\hat{\theta}(0)$ na expressão da potência externa, sendo T_L e T_0 os torques externos presentes nas extremidades $x = L$ e $x = 0$ do eixo. Além disso, para equilibrar o termo $\frac{dM_x(x)}{dx}$, deve existir uma densidade de torque externo distribuído, denotada por $t(x)$, cuja potência $\int_0^L t(x)\hat{\theta}(x) dx$ associada a uma rotação virtual arbitrária $\hat{\theta}(x)$, equilibra a potência interna $\int_0^L \frac{dM_x(x)}{dx}\hat{\theta}(x) dx$. Logo, o termo f em (5.32) é dado por

$$f: \begin{cases} T_0 & \rightarrow \text{torque aplicado em } x = 0 \\ T_L & \rightarrow \text{torque aplicada em } x = L \\ t & \rightarrow \text{densidade de torque por unidade de comprimento} \end{cases} . \quad (5.33)$$

Estes esforços externos estão ilustrados na Figura 5.8(b).

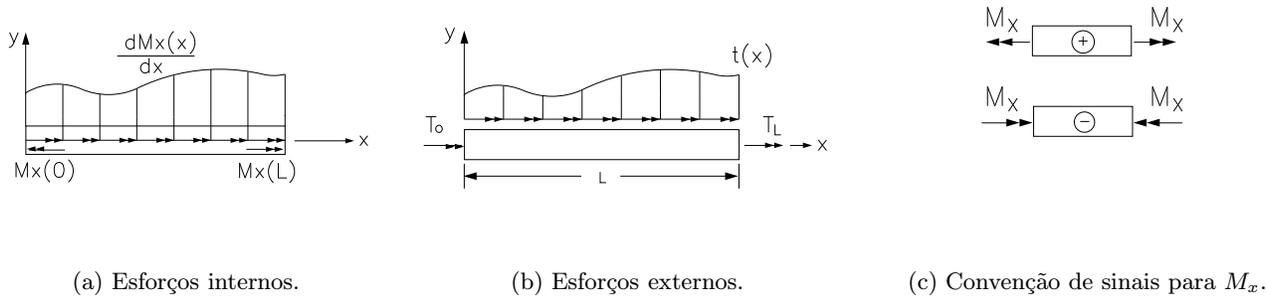


Figura 5.8: Esforços internos e externos e convenção de sinais na torção circular.

A partir de (5.33), obtém-se a expressão da potência externa das forças f para qualquer ação virtual $\hat{\theta}(x) \in \mathcal{V}$

$$P_e = \langle f, \hat{\theta} \rangle = T_0\hat{\theta}(0) + T_L\hat{\theta}(L) + \int_0^L t(x)\hat{\theta}(x) dx. \quad (5.34)$$

Substituindo (5.34) no enunciado do PPV (5.32), obtém-se

$$T_0\hat{\theta}(0) + T_L\hat{\theta}(L) + \int_0^L t(x)\hat{\theta}(x) dx - [M_x(L)\hat{\theta}(L) - M_x(0)\hat{\theta}(0)] + \int_0^L \frac{dM_x(x)}{dx}\hat{\theta}(x) dx = 0.$$

Rearranjando a expressão anterior vem que

$$[M_x(0) + T_0]\hat{\theta}(0) + [-M_x(L) + T_L]\hat{\theta}(L) - \int_0^L \left[\frac{dM_x(x)}{dx} + t(x) \right] \hat{\theta}(x) dx = 0 \quad (5.35)$$

Para que a equação (5.35) seja válida para qualquer ação $\hat{\theta}(x) \in \mathcal{V}$, os termos entre os colchetes devem ser todos simultaneamente nulos, resultando em

$$\begin{cases} \frac{dM_x(x)}{dx} + t(x) = 0 & \text{em } x \in (0, L) \\ M_x(0) = -T_0 & \text{em } x = 0 \\ M_x(L) = T_L & \text{em } x = L \end{cases} \quad (5.36)$$

A expressão anterior define a forma local do problema de torção circular livre de restrições cinemáticas. Tem-se uma equação diferencial em termos do momento torçor e duas condições de contorno. Este conjunto (equação diferencial + condições de contorno) define o Problema de Valor de Contorno (PVC) para a torção circular.

Resolvendo-se a equação diferencial, obtém-se o momento torçor $M_x(x)$ ao longo do comprimento do eixo. A Figura 5.8(c) ilustra a convenção de sinais para M_x . Pode-se traçar o diagrama de esforço solicitante para o momento torçor $M_x(x)$ de forma análoga ao realizado para a força normal $N_x(x)$ no caso de barra.

A partir da equação (5.36), define-se o operador de equilíbrio D^* entre os esforços externos e internos. Este operador pode ser escrito como

$$D^*M_x(x) = \begin{cases} -\frac{d}{dx}M_x(x) & \text{em } x \in (0, L) \\ -M_x(x)|_{x=0} & \text{em } x = L \\ M_x(x)|_{x=L} & \text{em } x = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

O operador D^* mapeia os espaços vetoriais dos esforços internos \mathcal{W}' e externos \mathcal{V}' . Neste caso, o espaço vetorial dos esforços externos \mathcal{V}' é caracterizado por uma função escalar contínua $t(x)$ indicando o torque distribuído sobre o eixo e torques concentrados T_0 e T_L nas extremidades do eixo tratados como condições de contorno do problema. Portanto, denota-se \mathcal{D}^* como

$$D^* : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}'$$

$$M_x(x) \rightarrow D^*M_x(x) = \begin{cases} -\frac{d}{dx}M_x(x) = t(x) & \text{em } x \in (0, L) \\ -M_x(x)|_{x=0} = T_0 & \text{em } x = L \\ M_x(x)|_{x=L} = T_L & \text{em } x = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

Se $\hat{\theta}(x)$ for uma ação de movimento virtual rígida, então a potência interna é nula. Neste caso, o PPV estabelece que para qualquer ação virtual rígida $\hat{\theta}(x) \in \mathcal{N}(D)$, a potência externa dada em (5.34) é nula para um eixo em equilíbrio, ou seja,

$$T_0\hat{\theta}(0) + T_L\hat{\theta}(L) + \int_0^L t(x)\hat{\theta}(x) dx = 0. \quad (5.39)$$

As ações rígidas para o eixo, são rotações constantes em torno do eixo x . Logo, tem-se $\hat{\theta}(x) = \hat{\theta} = \text{cte}$ e substituindo na expressão anterior vem que

$$\left(T_0 + T_L + \int_0^L t(x) dx \right) \hat{\theta} = 0.$$

A partir daí, obtém-se a condição de equilíbrio da barra, estabelecendo que a resultante dos torques externos deve ser nula, isto é,

$$T_0 + T_L + \int_0^L t(x) dx = 0. \quad (5.40)$$

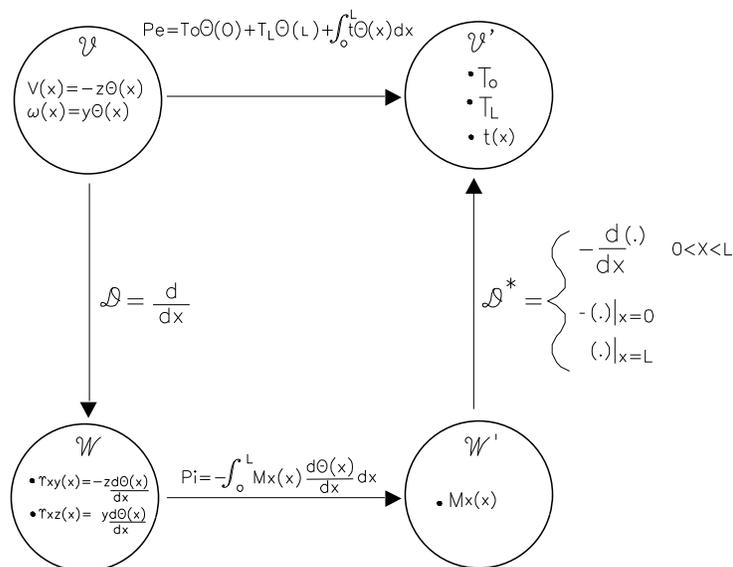


Figura 5.9: Formulação variacional do problema de torção circular.

Deve-se observar que o problema da torção de eixos, uma vez equacionado, é algebricamente idêntico ao problema da tração/compressão de barras. A Figura 5.9 ilustra a formulação variacional do problema de torção.

Antes de se efetuar o último passo da formulação variacional, ou seja, a aplicação da equação constitutiva deve-se definir o comportamento de um material elástico linear quando submetido a uma torção.

5.1.7 Ensaio de Torção

De forma análoga ao ensaio de tração/compressão numa barra, pode-se efetuar um ensaio de torção visando caracterizar o comportamento de uma material quando submetido a torção. Para isso, toma-se um corpo de prova de comprimento L e com secção circular constantes com momento de inércia polar I_p . Fixa-se o mesmo numa extremidade e aplicam-se sucessivamente valores crescentes de torque externo T na outra extremidade, como ilustrado na Figura 5.10.

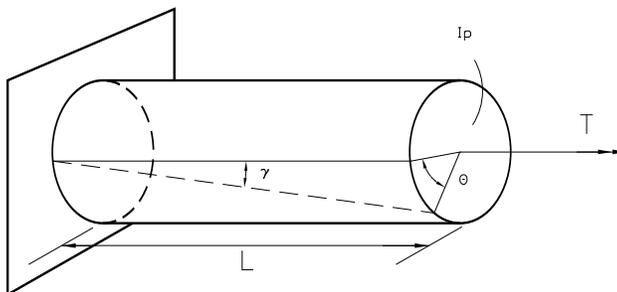


Figura 5.10: Corpo de prova submetido a ensaio de torção.

Como aplica-se apenas o torque concentrado T , o momento torçor em cada seção transversal x é constante com intensidade $M_x(x) = T$. Da mesma maneira, a tensão de cisalhamento tangencial $\tau_t(x) =$

τ_t também será constante. A partir da expressão (5.29), tem-se que

$$\tau_t = \frac{T}{I_p} r. \quad (5.41)$$

A distorção ou deformação angular tangencial apresentada pelo eixo ao longo de seu comprimento é determinada integrando-se a equação (5.14). Para um ângulo de torção θ , tem-se que

$$\int_0^L \gamma_t dx = \int_0^\theta r d\theta,$$

ou seja,

$$\gamma_t = \frac{r\theta}{L}. \quad (5.42)$$

Portanto, para cada valor de torque T aplicado, mede-se o ângulo de torção θ . A partir daí, calculam-se a tensão tangencial τ_t e a distorção γ_t empregando, respectivamente, as equações (5.41) e (5.42). Levanta-se então um gráfico $\tau_t \times \gamma_t$, o qual é denominado diagrama de ensaio de torção. O comportamento deste diagrama para um material dútil está ilustrado na Figura 5.11.

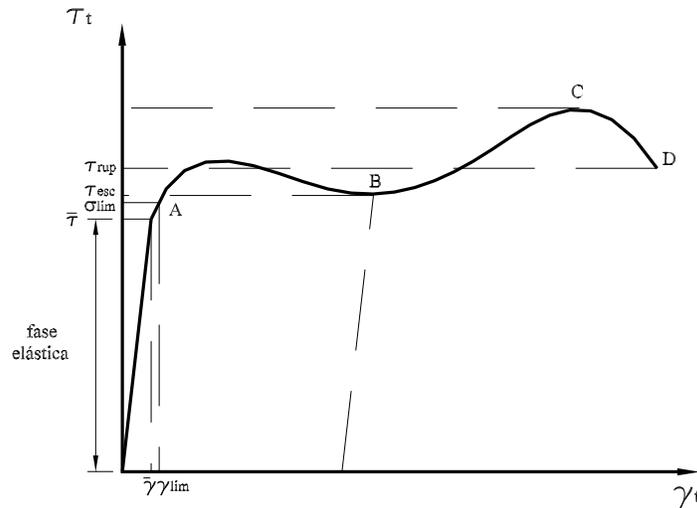


Figura 5.11: Diagrama de ensaio de torção.

Valores de tensão no intervalo $0 \leq \tau_t \leq \tau_{lim}$ caracterizam a fase elástica do material, sendo τ_{lim} a tensão de cisalhamento limite de proporcionalidade. Em geral, deseja-se dimensionar os eixos de tal forma que os mesmos permaneçam na fase elástica, ou seja, a tensão máxima τ_t^{max} deve estar no intervalo $0 \leq \tau_t^{max} \leq \tau_{lim}$. Como para alguns materiais, torna-se difícil determinar com exatidão a tensão limite τ_{lim} , emprega-se a tensão de cisalhamento admissível $\bar{\tau}$ para definir a fase elástica. A tensão $\bar{\tau}$ é dada a partir da tensão cisalhante de escoamento τ_{esc} e de um coeficiente de segurança k , ou seja,

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_{esc}}{k}. \quad (5.43)$$

Assim, a fase elástica passa a ser caracterizada por valores de tensão no intervalo $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$. O valor máximo de tensão de cisalhamento é denominado tensão última τ_{ult} , enquanto a tensão na qual a ruptura ocorre é denominada tensão de cisalhamento de ruptura e indicada por τ_{rup} .

Pode-se relacionar as tensões de escoamento a tração σ_{esc} e ao cisalhamento τ_{esc} . Experimentalmente, verifica-se que

$$\tau_{esc} \approx [0,55. \text{ a } 0,60] \sigma_{esc}. \quad (5.44)$$

Dividindo os dois lados da equação anterior pelo coeficiente de segurança k vem que

$$\frac{\tau_{esc}}{k} \approx [0,55. \text{ a } 0,60] \frac{\sigma_{esc}}{k},$$

ou seja,

$$\bar{\tau} \approx [0,55. \text{ a } 0,60] \bar{\sigma}. \quad (5.45)$$

Como será visto posteriormente, a seguinte relação teórica é válida entre as tensões normal e de cisalhamento admissíveis

$$\bar{\tau} = 0,57\bar{\sigma}. \quad (5.46)$$

A partir do coeficiente angular da reta na fase linear do diagrama de ensaio de torção, define-se uma propriedade do material denominada *Módulo de Elasticidade Transversal*, o qual é denotado pela letra G . Logo, a equação da reta que define a fase elástica é dada por

$$\tau_t = G\gamma_t. \quad (5.47)$$

Esta equação é denominada *Lei de Hooke* para o caso de torção. Observa-se que a mesma relação é válida quando se tomam as componentes cartesianas das tensões (τ_{xy} , τ_{xz}) e deformações (γ_{xy} , γ_{xz}) de cisalhamento, isto é,

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \text{e} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}. \quad (5.48)$$

A partir do coeficiente de Poisson ν , tem-se a seguinte relação entre os módulos de elasticidade longitudinal E e transversal G

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.49)$$

Por exemplo, tomando-se o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do aço ($E = 21 \times 10^5 \text{ Kgf/cm}^2$ e $\nu = 0,3$) tem-se que o módulo de elasticidade transversal do aço possui o seguinte valor

$$G = \frac{21 \times 10^5}{2(1 + 0,3)} = 8,08 \times 10^5 \text{ Kgf/cm}^2.$$

Substituindo (5.41) e (5.42) em (5.47), obtém-se

$$T = \frac{GI_p}{L}\theta. \quad (5.50)$$

O termo $\frac{GI_p}{L}$ é denominado rigidez à torção do eixo. De forma análoga a uma barra, um eixo de material elástico linear comporta-se como uma mola torcional com constante $k_t = \frac{GI_p}{L}$.

5.1.8 Aplicação da Equação Constitutiva

Definida a lei de Hooke (5.47) para um material elástico linear isotrópico submetido à torção, pode-se efetuar o último passo da formulação variacional, ou seja, a aplicação da equação constitutiva à equação de equilíbrio (5.36).

Para isso, substitui-se (5.14) em (5.47), obtendo-se

$$\tau_t(x, r, \theta) = G(x) \frac{d\theta(x)}{dx} r. \quad (5.51)$$

Por sua vez, substituindo a expressão anterior em (5.28), vem que

$$M_x(x) = G(x) \frac{d\theta(x)}{dx} \int_A r^2 dA. \quad (5.52)$$

A integral anterior representa o momento de inércia polar $I_p(x)$ da seção transversal circular x do eixo. Lembrando que $r^2 = y^2 + z^2$ vem que

$$I_p(x) = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA. \quad (5.53)$$

Portanto, a expressão do momento torçor para um eixo de material elástico segundo a lei de Hooke é dado por

$$M_x(x) = G(x) I_p(x) \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (5.54)$$

A partir daí, substituindo esta relação na equação diferencial do momento torçor (5.36), obtém-se a equação diferencial do eixo em termo do ângulo de torção $\theta(x)$

$$\frac{d}{dx} \left(G(x) I_p(x) \frac{d\theta(x)}{dx} \right) + t(x) = 0. \quad (5.55)$$

Para um eixo de mesma seção transversal e mesmo material tem-se que $G(x) = G$ e $I_p(x) = I_p$ são constantes. Logo, a equação diferencial anterior pode ser simplificada da seguinte forma

$$G I_p \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + t(x) = 0. \quad (5.56)$$

Logo, observa-se que para o caso de material elástico linear isotrópico, obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem, a qual deve ser integrada duas vezes para se obter uma função descrevendo o ângulo de torção $\theta(x)$ no eixo. A primeira integração fornece o momento torçor $M_x(x) = G(x) I_p(x) \frac{d\theta(x)}{dx}$. Observa-se que as condições de contorno agora podem ser dadas tanto em termos de torques concentrados e vinculações presentes nas extremidades do eixo como ilustrado na Figura 5.12. Por sua vez, estas restrições cinemáticas em termo dos ângulo de torção são incluídas na definição do espaço de ações admissíveis Kin_v .

Observa-se que para seção circular de diâmetro d , tem-se $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$. Analogamente, para uma seção circular vazada de diâmetros interno d_i e externo d_e , o momento de inércia polar é dado por $I_p = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{32}$.

A partir de (5.54), tem-se que

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M_x(x)}{G(x) I_p(x)}, \quad (5.57)$$

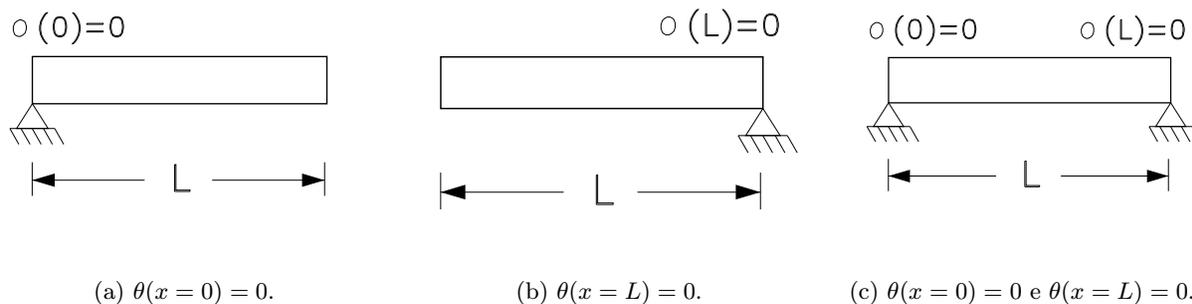


Figura 5.12: Condições de contorno em termos do ângulo de torção.

a qual substituída em (5.51), permite obter a expressão da tensão tangencial em termos do momento torçor

$$\tau_t(x, r, \theta) = \frac{M_x(x)}{I_p(x)} r. \quad (5.58)$$

Logo, verifica-se uma variação linear da tensão de cisalhamento na seção transversal do eixo revelando que a distribuição de tensão é compatível cinematicamente com o campo de deslocamento tangencial. Observa-se que o valor máximo da tensão de cisalhamento ocorre na extremidade da seção onde $r = \frac{d}{2}$. A Figura ilustra o comportamento linear da tensão de cisalhamento tangencial.

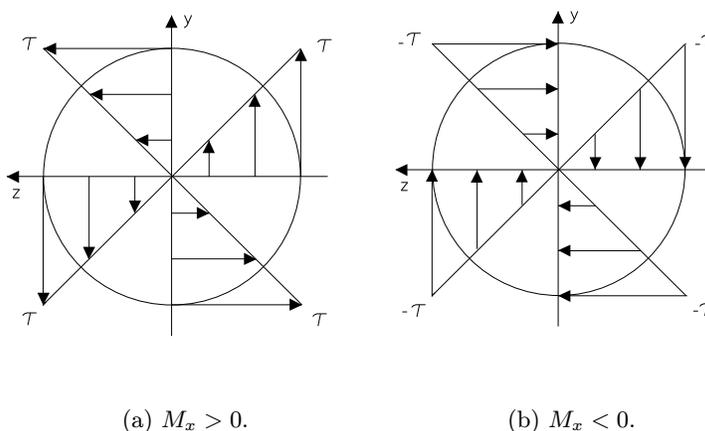


Figura 5.13: Distribuição da tensão de cisalhamento na seção de um eixo.

As mesmas equações diferenciais são obtidas tomando-se as componentes cartesianas das tensões (τ_{xy} , τ_{xz}) e deformações (γ_{xy} , γ_{xz}), bastando para isso empregar as expressões (5.48) juntamente com (5.12) e (5.22). Da mesma maneira, obtém-se que

$$\tau_{xy}(x, y, z) = -\frac{M_x(x)}{I_p(x)} z \quad \text{e} \quad \tau_{xz}(x, y, z) = \frac{M_x(x)}{I_p(x)} y. \quad (5.59)$$

5.1.9 Verificação e Dimensionamento de Eixos Circulares

Dimensionar um eixo significa calcular a dimensão mínima da área da seção transversal de tal forma que o eixo permaneça na fase elástica. O dimensionamento considerado aqui será baseado no valor máximo da tensão de cisalhamento ao longo do eixo. De forma análoga ao caso de barra, consideram-se os seguintes passos no dimensionamento à tensão máxima:

1. determina-se a função e o respectivo diagrama de momento torçor $M_x(x)$ através da integração da equação diferencial (5.55).
2. Com base neste diagrama, determina-se a seção mais solicitada, ou seja, a seção onde atua o maior valor do momento torçor em módulo, sendo este valor denotado M_x^{\max} .
3. Aplicando-se a expressão (5.58), tem-se que a tensão máxima τ_t^{\max} ocorre no contorno da seção mais solicitada com $r = \frac{d}{2}$. Logo,

$$\tau_t^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{I_p} \frac{d}{2}. \quad (5.60)$$

Como não se conhece as dimensões da seção transversal ainda, agrupam-se os termos da expressão anterior envolvendo estas dimensões no módulo de resistência torção W_x dado por

$$W_x = I_p \frac{2}{d}. \quad (5.61)$$

Desta forma, pode-se reescrever a expressão (5.60) como

$$\tau_t^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x}. \quad (5.62)$$

4. A condição que o eixo permaneça na fase elástica significa que a tensão de cisalhamento máxima deve ser inferior a tensão de cisalhamento admissível $\bar{\tau}$, ou seja,

$$\tau_t^{\max} \leq \bar{\tau}. \quad (5.63)$$

O módulo de resistência à torção mínimo é obtido, tomando-se a igualdade na expressão anterior, isto é,

$$W_x = \frac{M_x^{\max}}{\bar{\tau}}. \quad (5.64)$$

Conhecida W_x , determinam-se as dimensões da seção transversal. Por exemplo, para um eixo de diâmetro d , vem que

$$W_x = I_p \frac{2}{d} = I_p = \frac{\pi d^4}{32} \frac{2}{d}.$$

Portanto

$$d = \left(\frac{16W_x}{\pi} \right)^{1/3}. \quad (5.65)$$

No caso de verificação de um eixo, as dimensões da seção transversal são conhecidas e deseja-se verificar se o eixo permanece na fase elástica quando submetida a um certo carregamento. Para isto calcula-se a tensão normal máxima τ_t^{\max} usando (5.62). Com esta tensão máxima, basta verificar se a mesma é menor que a tensão admissível, ou seja

$$\tau_t^{\max} \leq \bar{\tau}. \quad (5.66)$$

Neste caso, diz-se que o eixo permanece na fase elástica. Caso a condição não seja válida, deve-se redimensionar o eixo aplicando o procedimento anterior.

5.1.10 Exercício Resolvido

1. Considere o eixo ilustrado na Figura 5.14 de seção circular com diâmetro d submetido ao carregamento indicado. Pede-se: a) determinar o diâmetro mínimo d para que o eixo permaneça na fase elástica; b) determinar a equação do ângulo de torção; c) suponha agora que a seção do eixo seja circular vazada com diâmetros interno d_i e externo d_e , com $d_i/d_e = 0,8$. Pede-se determinar os diâmetros d_i e d_e ; d) para esta nova seção, determinar a equação do ângulo de torção; e) baseado nos resultados obtidos, determinar qual eixo é mais pesado e qual sofre a maior rotação. Dados: $L = 2m$, $M_t = 1000Nm$, $\bar{\tau} = 50MPa$, $G = 80GPa$, $t_o = 1600Nm/m$.

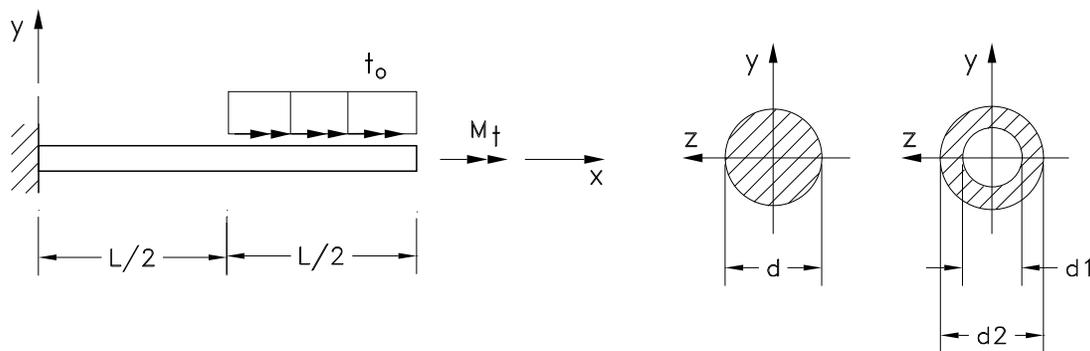


Figura 5.14: Eixo com seções circulares cheia e vazada.

- (a) Equação do carregamento: $t(x) = t_o < x - \frac{L}{2} >^0$
- (b) Condições de contorno: $\theta(x=0) = 0$ $M_x(x=L) = M_t$
- (c) Integração da equação diferencial: $GI_p \frac{d^2\theta}{dx^2} = -t(x) = -t_o < x - \frac{L}{2} >^0$
 - 1ª integração: momento torçor
 $M_x(x) = GI_p \frac{d\theta(x)}{dx} = -t_o < x - \frac{L}{2} >^1 + C_1$
 - 2ª integração: ângulo de torção
 $GI_p \theta(x) = -\frac{t_o}{2} < x - \frac{L}{2} >^2 + C_1 x + C_2$
- (d) Determinação das constantes de integração
 $GI_p \theta(x=0) = (0) + C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$
 $M_x(x=L) = -t_o < L - \frac{L}{2} >^1 + C_1 = M_t \rightarrow C_1 = M_t + t_o \frac{L}{2}$
- (e) Equações finais
 - momento torçor
 $M_x(x) = -t_o < x - \frac{L}{2} >^1 + M_t + t_o \frac{L}{2} = -1600 < x - 1 >^1 + 2600$

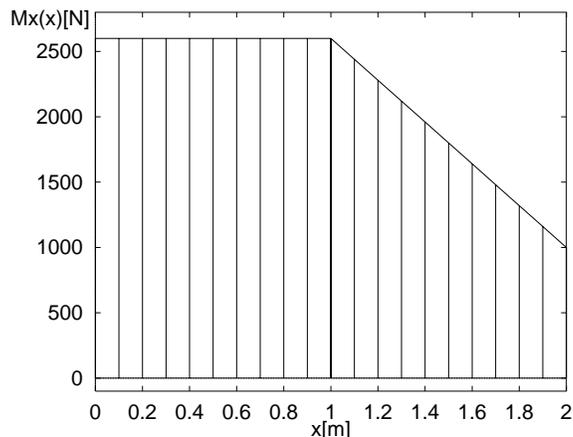
- ângulo de torção

$$\theta(x) = \frac{1}{GI_p} \left(-\frac{t_0}{2} < x - \frac{L}{2} >^2 + M_t + t_0 \frac{L}{2} x \right) = \frac{1}{GI_p} (-800 < x - 1 >^2 + 2600x)$$

(f) Diagrama do momento torçor

$$M_x(x \rightarrow 0^+) = 2600Nm \quad M_x(x \rightarrow 1^-) = 2600Nm$$

$$M_x(x \rightarrow 1^+) = 2600Nm \quad M_x(x \rightarrow 2^-) = 1000Nm$$



(g) Seção mais solicitada: $M_x(x \rightarrow 0^+) = 2600Nm$

(h) Dimensionamento

- Seção circular

$$\text{momento de inércia da seção: } I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\text{dimensionamento a tensão: } \tau = \left(\frac{M_x}{I_p} \right) \left(\frac{d}{2} \right) = M_x \frac{16}{\pi d^3} = \bar{\tau} \rightarrow d = \left(M_x \frac{16}{\pi \bar{\tau}} \right)^{\frac{1}{3}} = 6,42cm$$

- Seção circular vazada ($d_1, d_2 =$ diâmetros interno e externo)

$$\text{dimensionamento a tensão: } \tau = \left(\frac{M_x}{I_p} \right) \left(\frac{d_2}{2} \right) = \frac{M_x}{W_x} = \bar{\tau}$$

$$\text{módulo de resistência à torção: } W_x = \frac{M_x}{\bar{\tau}} = 5,2 \times 10^{-5} m^3$$

Portanto,

$$W_x = \frac{I_p}{\frac{d_2}{2}} = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) \frac{2}{d_2} = \frac{\pi}{16d_2} (d_2^4 - d_1^4)$$

Por sua vez, a relação entre os diâmetros é dada por $\frac{d_1}{d_2} = 0,8$. Substituindo na expressão anterior vem que,

$$W_x = \frac{\pi}{16d_2} [d_2^4 - (0,8d_2)^4] = 5,2 \times 10^{-5}$$

Logo, $d_2 = 7,65cm$ e $d_1 = 6,12cm$.

(i) Equação do ângulo de torção

- Seção circular

$$\text{momento de inércia: } I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (6,42 \times 10^{-2})^4 = 1,67 \times 10^{-6} m^4$$

Por sua vez, tem-se que $GI_p = 133422,78$. Logo,

$$\theta_c(x) = 7,49 \times 10^{-6} (-800 < x - 1 >^2 + 2600x)$$

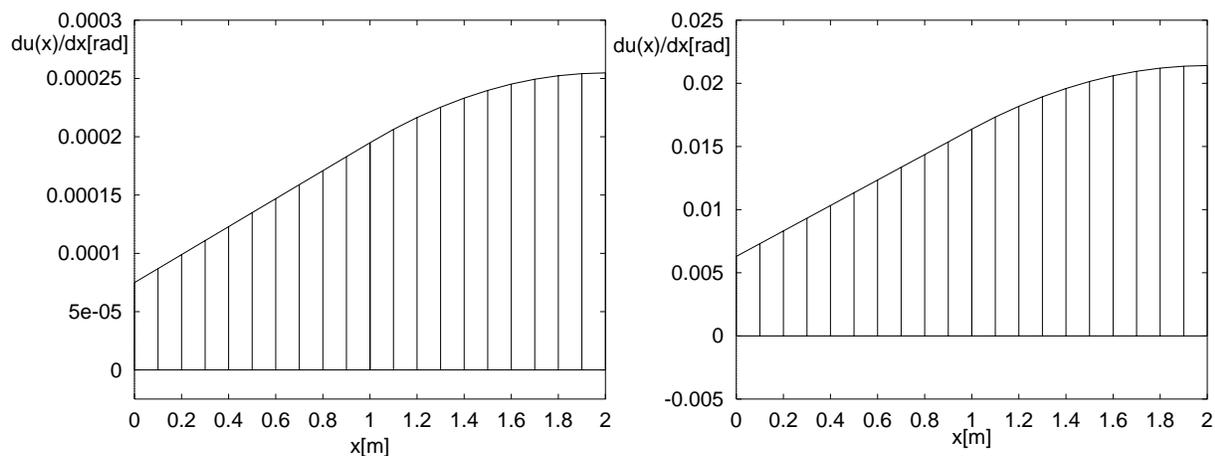
- Seção circular vazada

$$\text{momento de inércia: } I_p = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32} [(7,65 \times 10^{-2})^4 - (6,12 \times 10^{-2})^4] = 1,98 \times 10^{-6} m^4$$

Neste caso, $GI_p = 158811,51$. Portanto,

$$\theta_v(x) = 6,30 \times 10^{-6} (-800 < x - 1 >^2 + 2600x)$$

Abaixo ilustram-se os gráficos dos ângulos de torção para os casos de seção cheia e vazada.



(j) Relação entre os pesos

As massas m_c e m_v dos eixos de seções circulares cheia e vazada são dadas, respectivamente, por $m_c = \rho V_c$ e $m_v = \rho V_v$, sendo ρ a densidade do material; V_c e V_v os volumes das seções. Desta maneira, a relação entre as massas é a seguinte,

$$\frac{m_c}{m_v} = \frac{V_c}{V_v} = \frac{L(\frac{\pi}{4})d^2}{L(\frac{\pi}{4})(d_2^2 - d_1^2)} = \frac{d^2}{(d_2^2 - d_1^2)} = \frac{6,42^2}{7,65^2 - 6,12^2} = 1,95$$

onde L é o comprimento dos eixos. Desta maneira, como esperado, a massa do eixo de seção cheia é superior a do eixo com seção vazada.

(k) Relação entre as rotações

A partir das expressões para as rotações tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\theta_c}{\theta_v} = \frac{7,49}{6,30} = 1,19$$

Assim, apesar da massa do eixo com seção cheia ser superior ao eixo vazado, a sua rotação é cerca de 20% superior.

5.2 Torção de Seções Genéricas

Na seção anterior, considerou-se o problema de torção em eixos de seção circular. A cinemática do problema foi caracterizada por uma rotação rígida de cada seção transversal, as quais permaneciam ortogonais ao eixo x do sistema de referência após as rotações rígidas. O problema de torção é muito comum também em seções não-circulares. Neste caso, cada seção sofre uma rotação rígida de forma análoga à seção circular, mas agora tem-se um empenamento das seções transversais, ou seja, as mesmas não permanecem ortogonais ao eixo x , como ilustrado na Figura 5.15 para um eixo de seção quadrada. A formulação da torção em seções gerais foi desenvolvida pelo matemático francês Saint-Venant, sendo por isso conhecida como problema de Saint-Venant. A seguir apresenta-se a formulação deste problema considerando os passos da formulação variacional.

5.2.1 Definição da Cinemática

As hipóteses de Saint-Venant para o problema de torção em seções genéricas são as seguintes:

Figura 5.15: Empenamento da seção num eixo de seção quadrada.

- cada seção transversal sofre uma rotação rígida $\theta = \theta(x)$ como no caso da torção circular,
- o deslocamento u na direção longitudinal não depende de x , o que implica que todas as seções tem o mesmo deslocamento ou empenamento $u(x) = \varphi(y, z)$. A função $\varphi(y, z)$ descreve o empenamento da seção e a sua forma específica será obtida a partir da solução do problema.

A Figura 5.16(a) ilustra a seção quadrada do eixo da Figura 5.15. Observa-se que apesar de se considerar uma seção quadrada, a formulação aqui apresentada é válida para qualquer tipo de seção transversal, incluindo o caso circular. Devido a rotação $\theta = \theta(x)$ da seção, o ponto P com coordenadas (y, z) assume a posição P' de coordenadas (y', z') de forma análoga ao caso circular. Assim, devido à rotação rígida $\theta(x)$ da seção x em relação ao eixo x do sistema de referência adotado, tem-se os deslocamentos $v(x) = -z\theta(x)$ e $w(x) = y\theta(x)$, respectivamente, nas direções y e z . Mas devido ao empenamento da seção, o ponto P' apresenta um deslocamento longitudinal $u(x)$, assumindo a posição final P'' ilustrada na Figura 5.16(b). Este deslocamento é dado pela função de empenamento $\varphi(y, z)$ de acordo com as hipóteses de Saint-Venant, ou seja, $u(x) = \varphi(y, z)$.

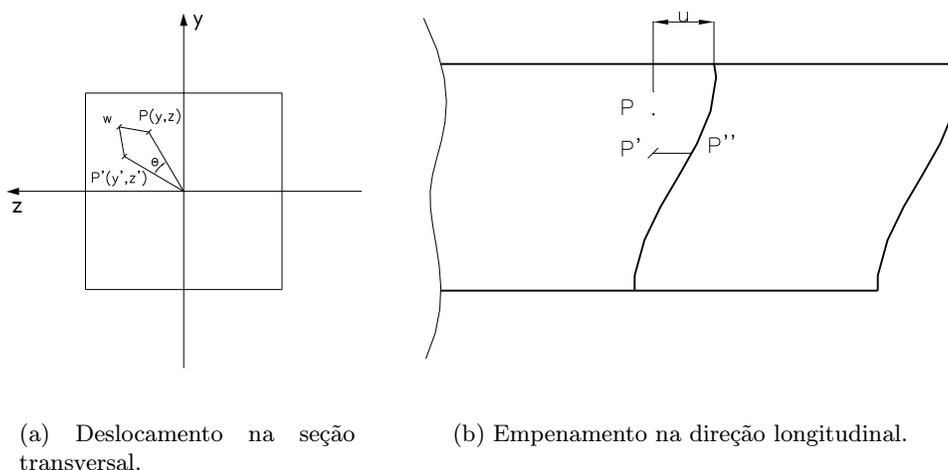


Figura 5.16: Cinemática da torção em seções genéricas.

Assim, a cinemática de torção em seções genéricas é dada pelas 3 componentes de deslocamento

$$u(x, y, z) = \varphi(y, z), \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned}v(x, y, z) &= -z\theta(x), \\w(x, y, z) &= y\theta(x).\end{aligned}$$

Novamente, a coordenada x permite localizar a seção e as coordenadas y e z indicam o ponto P considerado na seção x . As componentes de deslocamento anteriores constituem o campo vetorial de deslocamento $\mathbf{u}(x, y, z)$ dado por

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi(y, z) \\ -z\theta(x) \\ y\theta(x) \end{Bmatrix}. \quad (5.68)$$

Observa-se que se o empenamento é nulo, ou seja, $\varphi(y, z) = 0$, tem-se a mesma cinemática da torção circular. Este fato reforça o comentário anterior que a formulação apresentada nesta seção é válida para seções genéricas incluindo a circular como caso particular.

O conjunto \mathcal{V} das ações cinematicamente possíveis consiste dos campos de deslocamento $\mathbf{u}(x, y, z)$ da forma (5.5), sendo $\theta(x)$ uma função suave de x . Portanto

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u}, u_1 = \varphi(y, z), u_2 = -z\theta(x), u_3 = y\theta(x) \text{ e } \theta(x) \text{ é uma função suave}\}. \quad (5.69)$$

Para um eixo livre, todos os elementos $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ são também ações *admissíveis*, pois não há vínculos físicos impedindo o movimento de torção nas extremidades. Quando alguma restrição está presente, somente o subconjunto Kin_v de \mathcal{V} , formado pelas funções respeitando as restrições cinemáticas, constitui as ações de movimento admissíveis.

5.2.2 Deformação

De forma análoga ao caso de torção circular, consideram-se duas seções quaisquer localizadas à distâncias x e $x + \Delta x$ da origem do sistema de referência, conforme ilustrado na Figura 5.17. Como ocorre um deslocamento axial da seção devido ao empenamento, pode-se imaginar que exista uma deformação longitudinal $\varepsilon_{xx}(x)$ no eixo, de forma análoga ao problema de barra. No entanto, uma das hipóteses de Saint-Venant diz que a função de empenamento $\varphi(y, z)$ é a mesma para todas as seções e conseqüentemente $\varepsilon_{xx}(x) = 0$. Para verificar isto, basta tomar a variação do deslocamento axial $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ dividida pela distância Δx entre as seções e tomar o limite para Δx tendendo a zero, ou seja, aplicar a definição de $\varepsilon_{xx}(x)$ usada no caso de barra. Logo

$$\varepsilon_{xx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}. \quad (5.70)$$

Como o empenamento não varia ao longo de x , tem-se $u(x + \Delta x) = u(x) = \varphi(y, z)$ e portanto

$$\varepsilon_{xx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(y, z) - \varphi(y, z)}{\Delta x} = 0, \quad (5.71)$$

comprovando a afirmação anterior que a deformação longitudinal é nula.

Para determinar as componentes de deformação angular γ_{xy} e γ_{xz} , considere os pontos P_1 e P_2 com coordenadas (x, y, z) e $(x + \Delta x, y, z)$ ilustrados ao longo do eixo na Figura 5.18(a). Devido às rotações rígidas θ_1 e θ_2 das seções x e $x + \Delta x$, estes pontos assumem as posições P'_1 e P'_2 como ilustrado na Figura 5.18(b) considerando a seção transversal do eixo. Este efeito é análogo ao caso da torção circular e para determinar o efeito da variação angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ nos deslocamentos transversais v e w , basta tomar a diferença destes deslocamentos nas duas seções transversais. Mas conforme ilustrado nas Figuras 5.18(a) e 5.18(c), o empenamento da seção também provoca uma variação dos deslocamentos transversais v e w , fazendo com que os pontos P'_1 e P'_2 assumam as posições finais P''_1 e P''_2 .

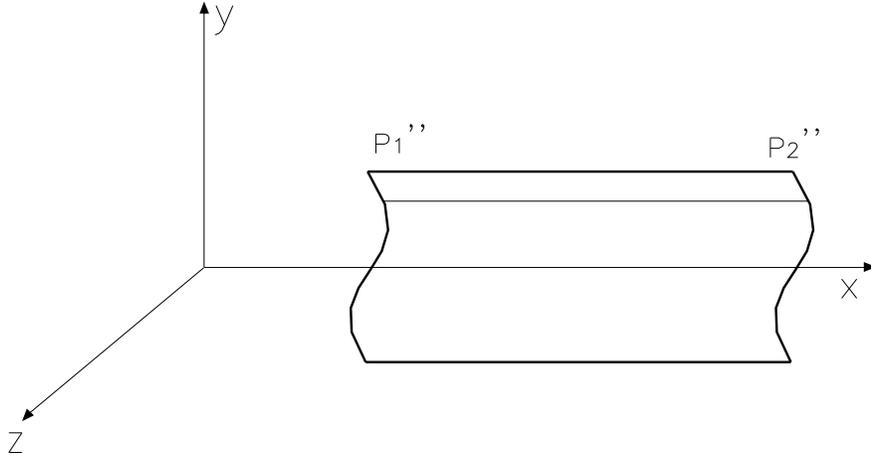


Figura 5.17: Efeito do ângulo de torção.

Portanto, para determinar a componente de deformação angular γ_{xy} deve-se somar a variação $v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)$ e devido à $\Delta\theta$ com aquela devido ao empenamento dada por $\varphi(y + \Delta y, z) - \varphi(y, z)$, tomando os limites para Δx e Δy tendendo a zero. Logo

$$\gamma_{xy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\varphi(y + \Delta y, z) - \varphi(y, z)}{\Delta y}.$$

Utilizando as definições de derivada total para o primeiro termo e de derivada parcial para o segundo termo (pois φ é uma função de duas variáveis) tem-se a componente angular γ_{xy}

$$\gamma_{xy}(x) = \frac{dv(x)}{dx} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}. \quad (5.72)$$

Substituindo a componente $v(x)$ dada em (5.68) vem que

$$\gamma_{xy}(x) = -z \frac{d\theta(x)}{dx} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}. \quad (5.73)$$

Para determinar γ_{xz} , procede-se de forma análoga somando-se a variação $w(x + \Delta x, y, z) - w(x, y, z)$ e devido à $\Delta\theta$ com aquela devido ao empenamento dada por $\varphi(y, z + \Delta z) - \varphi(y, z)$ e tomando-se os limites para Δx e Δz tendendo a zero, ou seja,

$$\gamma_{xz} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w(x + \Delta x, y, z) - w(x, y, z)}{\Delta x} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\varphi(y, z + \Delta z) - \varphi(y, z)}{\Delta z},$$

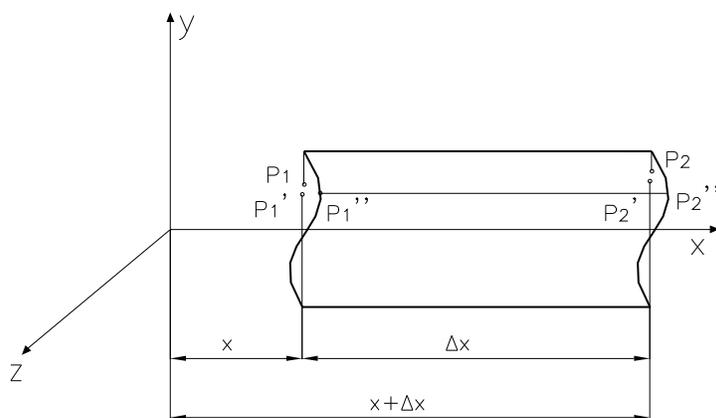
e portanto

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{dw(x)}{dx} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z}. \quad (5.74)$$

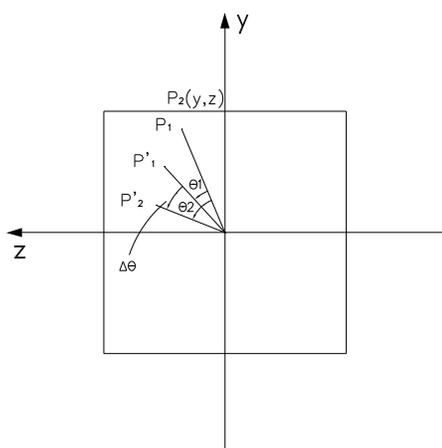
Substituindo a componente $w(x)$ dada em (5.68) vem que

$$\gamma_{xz}(x) = y \frac{d\theta(x)}{dx} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z}. \quad (5.75)$$

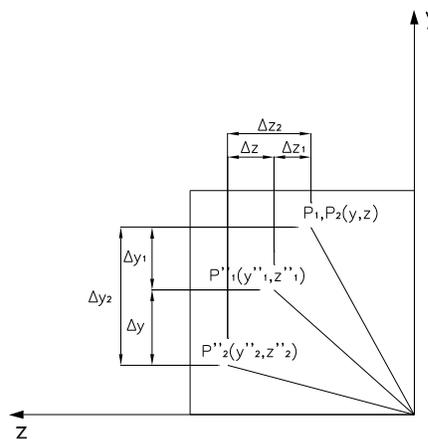
O espaço \mathcal{W} das ações de deformação compatíveis com a cinemática de torção em seções circulares é constituído pelas funções contínuas $\gamma_{xy}(x)$ e $\gamma_{xz}(x)$. Observa-se que o operador de deformação D ,



(a) Empenamento na seção transversal.



(b) Torção na seção transversal.



(c) Efeito do empenamento.

Figura 5.18: Deformação angular na torção em seções genéricas.

relacionando os espaços \mathcal{V} das ações de movimento possíveis e \mathcal{W} das ações de deformação compatíveis com a cinemática definida em \mathcal{V} , é indicado neste de forma matricial como

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{d}{dx} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}, \quad (5.76)$$

de tal forma que

$$D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi(y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{d}{dx} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_{xy}(x) \\ \gamma_{xz}(x) \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

5.2.3 Movimentos Rígidos

Para determinar os movimentos de corpo rígido, basta impor que as componentes de deformação $\gamma_{xy}(x)$ e $\gamma_{xz}(x)$ sejam simultaneamente nulas, ou seja,

$$\gamma_{xy} = -z \frac{d\theta(x)}{dx} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = 0,$$

$$\gamma_{xz} = y \frac{d\theta(x)}{dx} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} = 0.$$

Integrando as expressões anteriores, respectivamente, em relação a y e z obtém-se

$$\varphi(y, z) = yz \frac{d\theta(x)}{dx} + f(z),$$

$$\varphi(y, z) = -yz \frac{d\theta(x)}{dx} + g(y),$$

sendo $f(z)$ e $g(y)$ funções obtidas pelo processo de integração. Igualando as expressões anteriores vem que

$$yz \frac{d\theta(x)}{dx} + f(z) = -yz \frac{d\theta(x)}{dx} + g(y),$$

ou ainda

$$2yz \frac{d\theta(x)}{dx} + [f(z) - g(y)] = 0$$

Para satisfazer a relação acima, deve-se ter $\frac{d\theta(x)}{dx} = 0$, implicando que $\theta(x) = \theta$ é constante para toda seção transversal do eixo. Além disso, as funções $f(z)$ e $g(y)$ devem ser constantes, ou seja, $f(z) = g(y) = C$, sendo C uma constante. Logo, $f(z) - g(y) = 0$, implicando que a função de empenamento, e conseqüentemente o deslocamento axial $u(x)$, devem ser igual a esta mesma constante, isto é, $\varphi(y, z) = C$. Assim, os movimentos de corpo rígido de um eixo de seção genérica é composto de uma rotação rígida em torno do eixo x e uma translação ao longo de x . A Figura 5.19 ilustra uma rotação de 90 graus em torno e uma translação igual a constante C , ou seja, $u(x) = C$.

Portanto, o conjunto $\mathcal{N}(D)$ é composto das ações de movimento dadas em (5.68) sendo θ constante e $u(x) = C$. Define-se, então, o conjunto $\mathcal{N}(D)$ como

$$\mathcal{N}(D) = \{\mathbf{u}; \mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \theta(x) = \theta \text{ constante e } u(x) = C\}. \quad (5.78)$$

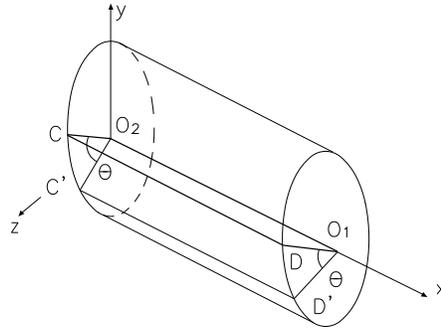


Figura 5.19: Exemplo de movimento rígido na torção genérica (rotação de 90 graus e translação em x).

5.2.4 Potência Interna

De forma análoga ao caso de torção circular, tem-se as componentes de tensão de cisalhamento $\tau_{xy}(x)$ e $\tau_{xz}(x)$ associadas às componentes de deformação angular $\gamma_{xy}(x)$ e $\gamma_{xz}(x)$. Estas componentes de tensão representam o estado das forças internas nas direções y e z para cada ponto do eixo. A potência interna permite associar as componentes de deformação $\gamma_{xy}(x)$ e $\gamma_{xz}(x)$ com as respectivas componentes de tensão $\tau_{xy}(x)$ e $\tau_{xz}(x)$. Para um ponto P qualquer no eixo, a relação $\tau_{xy}(x)\gamma_{xy}(x) + \tau_{xz}(x)\gamma_{xz}(x)$ representa a densidade de potência interna no ponto. Deve-se somar estas contribuições para cada ponto do eixo. Como o eixo é contínuo, ou seja, possui infinitos pontos, esta soma é escrita como uma integral ao longo do volume V do eixo. Logo, a potência interna é dada por

$$P_i = - \int_V [\tau_{xy}(x, y, z)\gamma_{xy}(x, y, z) + \tau_{xz}(x, y, z)\gamma_{xz}(x, y, z)] dV. \quad (5.79)$$

Substituindo as componentes de deformação dadas em (5.73) e (5.75), obtém-se

$$\begin{aligned} P_i &= - \int_V \left[\tau_{xy}(x, y, z) \left(-z \frac{d\theta(x)}{dx} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} \right) + \tau_{xz}(x, y, z) \left(y \frac{d\theta(x)}{dx} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} \right) \right] dV \\ &= - \int_V [-z\tau_{xy}(x, y, z) + y\tau_{xz}(x, y, z)] \frac{d\theta(x)}{dx} dV - \int_V \left[\tau_{xy}(x, y, z) \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} + \tau_{xz}(x, y, z) \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} \right] dV. \end{aligned}$$

A integral de volume anterior pode ser reescrita como integrais ao longo do comprimento L do eixo e da área A da seção transversal, ou seja,

$$P_i = - \int_0^L \left[\int_A (-z\tau_{xy} + y\tau_{xz}) dA \right] \frac{d\theta(x)}{dx} dx - \int_0^L \left[\int_A \left(\tau_{xy} \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} \right) dA \right] dx. \quad (5.80)$$

A primeira integral de área na expressão anterior representa o momento torçor na seção, de forma análoga ao caso de torção circular (ver equação (5.22)). A segunda integral ao longo do comprimento do eixo é igual a L , ou seja, $\int_0^L dx = L$. Logo, a potência interna passa ser dada por

$$P_i = - \int_0^L M_x(x) \frac{d\theta(x)}{dx} dx - L \int_A \left(\tau_{xy}(x) \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} + \tau_{xz}(x) \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} \right) dA. \quad (5.81)$$

Observe que se não ocorre o empenamento da seção, obtém-se a mesma expressão (5.23) para o caso de torção circular. Antes de prosseguir, torna-se necessário analisar o significado físico do integrando na

área da seção transversal da equação (5.81). Supondo que as componentes de tensão estejam dadas em N/m^2 e os comprimentos em m , o integrando terá como unidades

$$\left[\tau_{xy}(x) \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} + \tau_{xz}(x) \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} \right] = \frac{N}{m^2} \frac{m}{m} + \frac{N}{m^2} \frac{m}{m} = \frac{N}{m^2}.$$

Portanto, o integrando resulta numa tensão, a qual integrada sob a área produz uma resultante de forças na seção transversal. Observa-se que esta resultante de força é incompatível com o modelo de torção, pois devido às ações de movimento, os esforços internos presentes na seção são representados por momentos torçores. Logo, a integral de área em (5.81) deve ser nula, ou seja,

$$\int_A \left(\tau_{xy}(x) \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} + \tau_{xz}(x) \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} \right) dA = 0. \quad (5.82)$$

Assim, a expressão para a potência interna se reduz a mesma obtida para a torção circular, ou seja,

$$P_i = - \int_0^L M_x(x) \frac{d\theta(x)}{dx} dx. \quad (5.83)$$

Integrando a expressão anterior por partes, vem que

$$P_i = - [M_x(L)\theta(L) - M_x(0)\theta(0)] + \int_0^L \frac{dM_x(x)}{dx} \theta(x) dx. \quad (5.84)$$

Logo, os esforços internos compatíveis com a cinemática de torção genérica são caracterizados por momentos torçores concentrados $M_x(L)$ e $M_x(0)$ nas extremidades do eixo, além de um momento torçor distribuído $\frac{dM_x(x)}{dx}$ no seu interior. Estes esforços são ilustrados na Figura 5.8(a). Portanto, o espaço \mathcal{W} dos esforços internos é constituído por funções escalares contínuas $M_x(x)$ caracterizando o momento torçor em cada seção transversal x do eixo.

No entanto, no caso de torção em seções genéricas, deve-se lembrar que a integral de área (5.82) deve ser nula. Integrando por partes esta equação, vem que

$$- \int_A \left[\frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} \right] \varphi(y, z) dA + \int_{\partial A} [\tau_{xy}(x, y, z)n_y + \tau_{xz}(x)n_z] \varphi(y, z) \partial A = 0, \quad (5.85)$$

sendo ∂A o contorno da área da seção transversal e n_y e n_z os co-senos diretores do vetor normal \mathbf{n} num ponto P na extremidade da seção como ilustrado na Figura 5.20(a).

Fazendo uma análise dimensional dos integrandos entre os colchetes na expressão anterior tem-se que

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} \right] \varphi(y, z) &= \frac{N/m^2}{m} m = \frac{N}{m^2}, \\ [\tau_{xy}(x, y, z)n_y + \tau_{xz}(x)n_z] \varphi(y, z) &= \frac{N}{m^2} m = \frac{N}{m}. \end{aligned}$$

Portanto, o primeiro integrando representa uma tensão e o segundo uma densidade de força por unidade de comprimento. Integrando estes termos, respectivamente, ao longo da área A e do perímetro ∂A da seção, tem-se resultantes de forças na área e no perímetro da seção, as quais devem ser nulas.

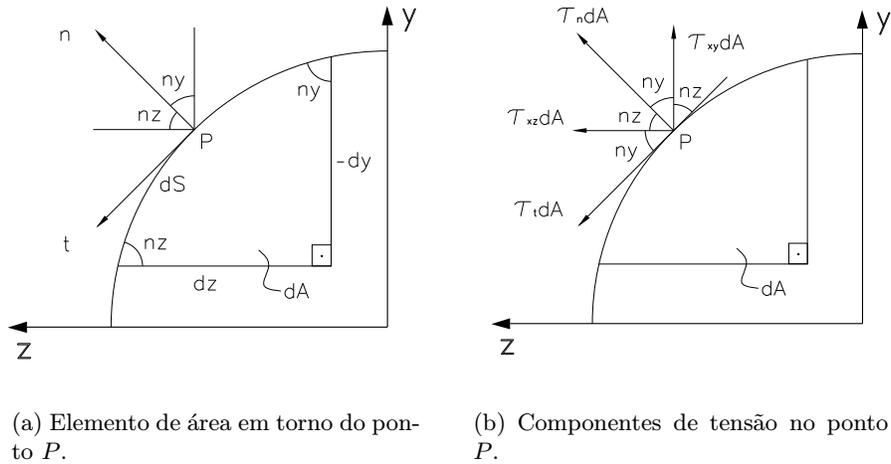


Figura 5.20: Elemento de área em torno do ponto P .

5.2.5 Aplicação do PPV

Como já realizado anteriormente para o caso de barra e torção circular, aplica-se o PPV visando caracterizar as condições de equilíbrio do corpo e conseqüentemente os esforços externos f compatíveis com a cinemática definida, neste caso, para a torção de seções genéricas. O PPV estabelece que o estado de equilíbrio de um corpo na sua posição deformada pode ser avaliado introduzindo-se uma ação de movimento virtual.

Assim, suponha que um eixo tenha sofrido uma torção e se encontra em equilíbrio na sua configuração deformada. Para avaliar este estado de equilíbrio, introduz-se uma ação de torção virtual dada por uma rotação virtual $\hat{\theta}(x)$ e um empenamento também virtual $\hat{\varphi}(y, z)$.

Efetuando o mesmo procedimento considerado para a torção circular, obtém-se a seguinte expressão idêntica a (5.32), ou seja,

$$\langle f, \hat{\theta} \rangle - [M_x(L)\hat{\theta}(L) - M_x(0)\hat{\theta}(0)] + \int_0^L \frac{dM_x(x)}{dx} \hat{\theta}(x) dx = 0. \quad (5.86)$$

Mas na torção de seções genéricas, tem-se ainda que (5.85) deve ser nula para qualquer empenamento virtual $\hat{\varphi}(y, z)$. Logo,

$$- \int_A \left[\frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} \right] \hat{\varphi}(y, z) dA + \int_{\partial A} [\tau_{xy}(x, y, z)n_y + \tau_{xz}(x, y, z)n_z] \hat{\varphi}(y, z) \partial A = 0. \quad (5.87)$$

5.2.6 Caracterização dos Esforços Externos

Seguindo o mesmo procedimento considerado na Seção 5.1.6, verifica-se que a distribuição de momento torçor na seção transversal é obtida resolvendo o PVC (5.36). Além disso, os esforços externos compatíveis com a cinemática de seções genéricas estão ilustrados na Figura 5.8(b) e o operador de equilíbrio D^* está dado em (5.38).

A diferença principal para a solução do problema de torção genérica em relação ao caso de torção circular provem do empenamento da seção e da equação (5.87). Como o empenamento virtual $\hat{\varphi}(y, z)$ é arbitrário, a expressão anterior será nula no caso em que os dois termos entre colchetes são simultaneamente

nulos. Isto resulta no seguinte PVC bidimensional em termos das componentes de tensão

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} = 0 \\ \tau_{xy}(x, y, z)n_y + \tau_{xz}(x, y, z)n_z = 0 \end{cases}, \quad (5.88)$$

o qual deve ser resolvido para a posterior determinação da função de empenamento. Este PVC é de primeira ordem mas possui duas funções como incógnitas, ou seja, $\tau_{xy}(x, y, z)$ e $\tau_{xz}(x, y, z)$.

A Figura 5.20(a) ilustra um elemento de área dA da seção transversal, juntamente com o vetor normal \mathbf{n} no ponto P e seus co-senos diretores n_y e n_z , os quais, por sua vez, são dados pelos co-senos da normal \mathbf{n} com os eixos y e z , respectivamente. A partir da Figura 5.20(a), determinam-se as seguintes relações para n_y e n_z

$$\begin{aligned} n_y &= \cos \mathbf{n}_y = -\frac{dy}{ds}, \\ n_z &= \cos \mathbf{n}_z = \frac{dz}{ds}, \end{aligned} \quad (5.89)$$

sendo ds um elemento diferencial ao longo do perímetro da seção.

Para interpretar o significado da condição de contorno em (5.88), considere o elemento de área dA da Figura 5.20(b) em torno do ponto P no contorno da seção. Indicam-se as componentes de tensão neste ponto τ_{xy} , τ_{xz} , τ_t e τ_n , respectivamente, nas direções y , z , tangencial e normal. Por sua vez, $\tau_{xy}dA$, $\tau_{xz}dA$, $\tau_t dA$ e $\tau_n dA$ representam as forças internas atuantes no ponto P nas mesmas direções. Como não foi explicado ainda como efetuar a transformação de tensões, utiliza-se a decomposição de forças empregando os co-senos diretores n_y e n_z do vetor normal \mathbf{n} no ponto P . Logo, as seguintes relações são válidas

$$\begin{aligned} \tau_n dA &= (\tau_{xy}dA)n_y + (\tau_{xz}dA)n_z, \\ \tau_t dA &= (\tau_{xz}dA)n_y - (\tau_{xy}dA)n_z. \end{aligned}$$

Simplificando o termo comum dA nas expressões anteriores, determinam-se as componentes de tensão nas direções normal e tangente, ou seja,

$$\tau_n = \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z, \quad (5.90)$$

$$\tau_t = \tau_{xz}n_y - \tau_{xy}n_z. \quad (5.91)$$

Logo, comparando-se a condição de contorno em (5.88) com τ_n , chega-se à conclusão que a tensão de cisalhamento na borda da seção possui a direção tangente, pois a tensão normal τ_n deve ser nula.

A Figura 5.21 ilustra a formulação variacional da torção de seções genéricas.

5.2.7 Aplicação da Equação Constitutiva

A Lei de Hooke para um material elástico linear isotrópico estabelece que as componentes de tensão de cisalhamento $\tau_{xy}(x, y, z)$ e $\tau_{xz}(x, y, z)$ estão relacionadas às respectivas componentes de deformação angular $\gamma_{xy}(x, y, z)$ e $\gamma_{xz}(x, y, z)$ através do módulo de elasticidade transversal $G(x)$ da seção x , ou seja

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y, z) &= G(x)\gamma_{xy}(x, y, z), \\ \tau_{xz}(x, y, z) &= G(x)\gamma_{xz}(x, y, z). \end{aligned} \quad (5.92)$$

Aplicando-se esta relação constitutiva na equação diferencial de equilíbrio em termos do momento torçor (5.36), obtém-se a mesma equação diferencial (5.55) em termo do ângulo de torção.

Figura 5.21: Formulação variacional do problema de torção de seções genéricas.

O ponto central aqui é resolver o PVC (5.88). Observa-se que a sua solução fornece as funções $\tau_{xy}(x, y, z)$ e $\tau_{xz}(x, y, z)$ descrevendo o estado de tensão nos pontos do eixo. Para simplificar a solução deste PVC, introduz-se a função tensão $\phi(y, z)$ e escrevem-se as componentes de tensão $\tau_{xy}(x, y, z)$ e $\tau_{xz}(x, y, z)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(x) &= \frac{\partial\phi(y, z)}{\partial z}, \\ \tau_{xz}(x) &= -\frac{\partial\phi(y, z)}{\partial y}.\end{aligned}\tag{5.93}$$

Substituindo estas expressões na equação diferencial dada em (5.88), vem que

$$\frac{\partial\tau_{xy}(x)}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}(x)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial\phi(y, z)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{-\partial\phi(y, z)}{\partial y} \right] = 0,$$

ou seja, as componentes de tensão definidas em (5.93) em termos da função tensão $\phi(y, z)$ satisfazem o PVC (5.88).

Por sua vez, substituindo (5.93) e as componentes de deformação angular (5.73) e (5.75) em (5.92) vem que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi(y, z)}{\partial z} &= G(x)\gamma_{xy}(x) = G(x) \left(\frac{\partial\varphi(y, z)}{\partial y} - z \frac{d\theta(x)}{dx} \right), \\ \frac{-\partial\phi(y, z)}{\partial y} &= G(x)\gamma_{xz}(x) = G(x) \left(\frac{\partial\varphi(y, z)}{\partial z} + y \frac{d\theta(x)}{dx} \right).\end{aligned}\tag{5.94}$$

Derivando as expressões anteriores, respectivamente, em relação a z e y vem que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi(y, z)}{\partial z^2} &= G(x) \left(\frac{\partial\varphi(y, z)}{\partial y\partial z} - \frac{d\theta(x)}{dx} \right), \\ -\frac{\partial^2\phi(y, z)}{\partial y^2} &= G(x) \left(\frac{\partial\varphi(y, z)}{\partial y\partial y} - \frac{d\theta(x)}{dx} \right).\end{aligned}$$

Subtraindo a segunda expressão anterior da primeira, permite eliminar função de empenamento $\varphi(y, z)$. Logo

$$\frac{\partial^2 \phi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(y, z)}{\partial z^2} = -2G(x) \frac{d\theta(x)}{dx}. \quad (5.95)$$

Denotando

$$F(x) = -2G(x) \frac{d\theta(x)}{dx}, \quad (5.96)$$

tem-se a equação diferencial de segunda ordem em termos da função tensão

$$\frac{\partial^2 \phi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(y, z)}{\partial z^2} = F(x). \quad (5.97)$$

Substituindo (5.93) na condição de contorno dada em (5.88), tem-se que

$$\tau_{xy}(x)n_y + \tau_{xz}(x)n_z = \frac{\partial \phi(y, z)}{\partial z} n_y - \frac{\partial \phi(y, z)}{\partial y} n_z = 0. \quad (5.98)$$

Empregando a regra da cadeia, pode-se derivar a função tensão $\phi(y, z)$ ao longo do perímetro da seção empregando o elemento diferencial ds como

$$\frac{\partial \phi(y, z)}{\partial s} = \frac{\partial \phi(y, z)}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi(y, z)}{\partial z} \frac{dz}{ds}. \quad (5.99)$$

Substituindo (5.89), a derivada anterior pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \phi(y, z)}{\partial s} = \frac{\partial \phi(y, z)}{\partial y} n_y - \frac{\partial \phi(y, z)}{\partial z} n_z. \quad (5.100)$$

Da condição de contorno (5.98), vem que a variação de $\phi(y, z)$ ao longo do perímetro da seção deve ser nula, ou seja,

$$\frac{\partial \phi(y, z)}{\partial s} = 0, \quad (5.101)$$

implicando que a função tensão $\phi(y, z)$ é constante ao longo do contorno da seção transversal. Para eixos maciços, esta constante pode ser escolhida de forma arbitrária e será tomada aqui como igual a zero [?].

Logo, a distribuição de tensões para um eixo de seção arbitrária submetido à torção, consiste em determinar a função tensão $\phi(y, z)$ satisfazendo a equação diferencial (5.97) e que se anula no contorno da seção.

Observa-se que a introdução da função tensão permitiu transformar o PVC de primeira ordem com incógnitas $\tau_{xy}(x, y, z)$ e $\tau_{xz}(x, y, z)$, num PVC de segunda ordem cuja incógnita é uma função escalar $\phi(y, z)$, denominada função tensão. O PVC em termo de $\phi(y, z)$ pode ser resumido como

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(y, z)}{\partial z^2} = F(x) \\ \phi(y, z)|_{\partial A} = 0 \end{cases} \quad (5.102)$$

Pode-se expressar ainda o momento torçor $M_x(x)$ em termos de função tensão $\phi(y, z)$. Para isto, basta substituir (5.93) em (5.22). Logo

$$M_x(x) = \int_A \left(-z \frac{\partial \phi(y, z)}{\partial z} + y \frac{\partial \phi(y, z)}{\partial y} \right) dydz. \quad (5.103)$$

Integrando a expressão anterior por partes vem que:

$$M_x(x) = - \int_A \left[-\phi(y, z) \frac{dz}{dz} - \phi(y, z) \frac{dy}{dy} \right] dA + \int_{\partial A} [-z\phi(y, z) + y\phi(y, z)] \partial A.$$

Como $\phi(y, z)$ é nula ao longo do contorno ∂A da seção, a expressão anterior toma a seguinte forma

$$M_x(x) = 2 \int_A \phi(y, z) dA. \quad (5.104)$$

A integral de $\phi(y, z)$ ao longo da área A representa o volume delimitado pela função tensão e a seção transversal. Desta maneira, o momento torçor em cada seção transversal do eixo é proporcional ao volume definido pela função tensão.

5.2.8 Distribuição da Tensão de Cisalhamento

Seção transversal elíptica

A Figura 5.22(a), ilustra uma seção transversal elíptica com raios maior e menor a e b , respectivamente.

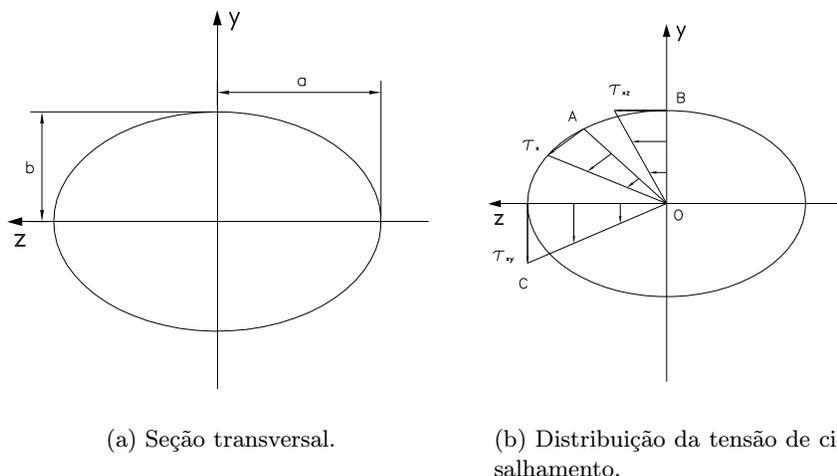


Figura 5.22: Seção transversal elíptica.

Neste caso, o contorno da seção transversal é descrito pela equação de elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1. \quad (5.105)$$

A equação diferencial e a condição de contorno dados em (5.88) são satisfeitas tomando-se uma função tensão $\phi(y, z)$ da seguinte forma

$$\phi(y, z) = m \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 \right), \quad (5.106)$$

sendo m uma constante. Substituindo a expressão anterior na equação diferencial em (5.88) e efetuando as derivadas indicadas, obtém-se a seguinte relação para a constante m

$$m = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} F(x). \quad (5.107)$$

Por sua vez, substituindo esta expressão em (5.106), tem-se que

$$\phi(y, z) = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 \right) F(x). \quad (5.108)$$

Pode-se obter uma expressão para $F(x)$ em termos do momento torçor $M_x(x)$. Para isto, basta substituir (5.108) em (5.104). Logo,

$$\begin{aligned} M_x(x) &= 2 \int_A \phi(y, z) dA \\ &= \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} F(x) \left[\frac{1}{b^2} \int_A y^2 dA + \frac{1}{a^2} \int_A z^2 dA - \int_A dA \right]. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Na equação anterior, as duas primeiras integrais representam os momentos de inércia $I_z(x) = \int_A y^2 dA$ e $I_y(x) = \int_A z^2 dA$ da seção transversal, respectivamente, em relação aos eixos y e z do sistema de referência adotado. A última integral fornece a área A da seção transversal, ou seja, $A = \int_A dA$. Para uma seção na forma de uma elipse, verifica-se que

$$\begin{aligned} I_y(x) &= \frac{\pi b a^3}{4}, \\ I_z(x) &= \frac{\pi a b^3}{4}, \\ A &= \pi ab. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Substituindo estas relações em (5.109), obtém-se

$$M_x(x) = -\frac{\pi a^3 b^3}{2(a^2 + b^2)} F(x). \quad (5.111)$$

A partir daí, determina-se uma expressão para $F(x)$, ou seja,

$$F(x) = -\frac{2(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} M_x(x). \quad (5.112)$$

Por sua vez, substituindo $F(x)$ em (5.108), tem-se uma expressão da função tensão em termos do momento torçor $M_x(x)$. Portanto

$$\phi(y, z) = -\frac{M_x(x)}{\pi ab} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 \right). \quad (5.113)$$

Observa-se que a expressão do momento torçor $M_x(x)$ é obtida integrando-se a equação diferencial (5.36). Determinada a função tensão $\phi(y, z)$, calculam-se as componentes de tensão τ_{xy} e τ_{xz} , substituindo (5.113) em (5.93) e efetuando as derivadas indicadas. Logo

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x) &= \frac{2M_x(x)}{\pi a^3 b} z, \\ \tau_{xz}(x) &= -\frac{2M_x(x)}{\pi ab^3} y. \end{aligned} \quad (5.114)$$

Observa-se que a relação $\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xz}}$ entre as componentes de tensão é proporcional a $\frac{z}{y}$, sendo constante ao longo de um raio OA como indicado na Figura 5.22(b). Desta maneira, a tensão de cisalhamento

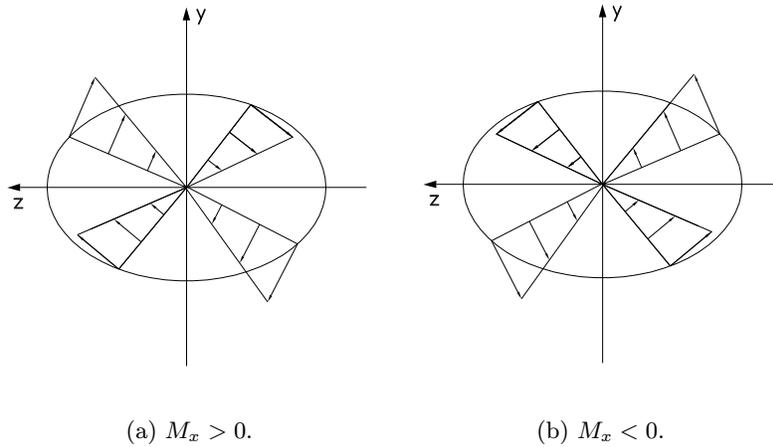


Figura 5.23: Distribuição de tensão em seção transversal elíptica.

resultante $\tau_t = \tau_{xy} + \tau_{xz}$ tem uma direção constante coincidente com a tangente ao contorno do ponto A . Ao longo da linha OB , a componente τ_{xy} é nula e a tensão tangencial τ_t é igual a τ_{xz} . Analogamente, ao longo da linha OC , tem-se $\tau_{xz} = 0$ e $\tau_t = \tau_{xy}$. A Figura 5.23 ilustra a tensão resultante τ_t para momentos torçores positivo e negativo.

Das Figuras 5.22(b) e 5.23, observa-se que a tensão de cisalhamento máxima τ_t^{\max} na seção x ocorre na borda da seção transversal e na extremidade do eixo menor da elipse, para o qual $\tau_t = \tau_{xz}$ e $y = b$. Portanto, a partir de (5.114)

$$\tau_t^{\max}(x) = \frac{2M_x(x)}{\pi ab^3} b = \frac{2M_x(x)}{\pi ab^2}. \quad (5.115)$$

Observa-se que $a = b = \frac{d}{2}$, tem-se que a expressão anterior se reduz à equação (5.115) para a tensão de cisalhamento máxima na seção circular.

Pode-se reescrever (5.96) como

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{F(x)}{2G(x)}.$$

Substituindo (5.112), vem que

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{(a^2 + b^2) M_x(x)}{\pi a^3 b^3 G(x)}. \quad (5.116)$$

Integrando-se a expressão anterior ao longo do comprimento do eixo, tem-se a variação $\Delta\theta$ do ângulo de torção no eixo, ou seja,

$$\Delta\theta = \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3 G} \int_0^L \frac{M_x(x)}{G(x)} dx \quad (5.117)$$

Se o eixo está submetido apenas a um torque concentrado T nas extremidades (neste caso, o torque distribuído é nulo, ou seja, $t(x) = 0$), o momento torçor é constante no eixo e igual ao torque T aplicado. Assumindo ainda que o módulo de elasticidade transversal $G(x)$ é constante, isto é, $G(x) = G = cte$, a expressão anterior se reduz a

$$\Delta\theta = \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3 G} TL. \quad (5.118)$$

Pode-se reescrever (5.117) como

$$T = K_t \Delta \theta, \quad (5.119)$$

sendo

$$K_t = \frac{\pi a^3 b^3 G}{(a^2 + b^2)L} = \frac{G}{4\pi} \frac{(A)^4}{I_p} \quad (5.120)$$

a rigidez à torção. Observa-se que momento de inércia polar para uma seção elíptica é dado por

$$I_p = I_y + I_z = \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi b a^3}{4}. \quad (5.121)$$

Para determinar a função de empenamento $\varphi(y, z)$, substituem-se τ_{xy} dado em (5.114) e (5.116) em (5.94), obtendo-se

$$\tau_{xy}(x) = G(x) \left(\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} - z \frac{d\theta(x)}{dx} \right) \rightarrow \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = \left[-\frac{1}{\pi a^3 b} + \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \right] \frac{M_x(x)}{G(x)} z.$$

Simplificando a expressão anterior e efetuando-se a integração vem que

$$\varphi(y, z) = M_x(x) \frac{(b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3 G(x)} yz. \quad (5.122)$$

Esta expressão representa a equação de uma hipérbole como ilustrado na Figura 5.24.

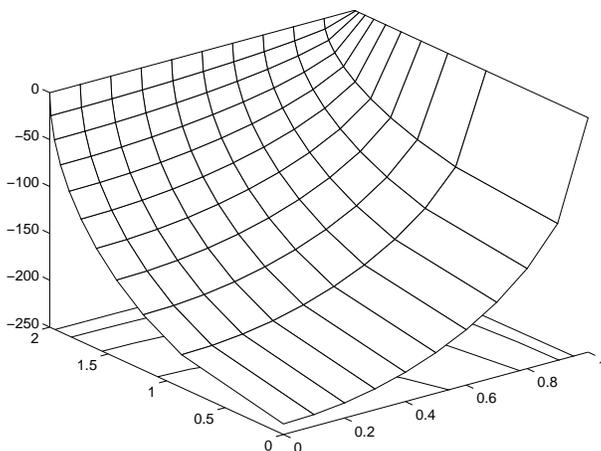


Figura 5.24: Função de empenamento em seções elípticas ($M_x = 1000$, $G = 1$, $a = 2$, $b = 1$).

Analogia de membrana

Para outros tipos de seções transversais, a solução do problema de valor de contorno (5.88) torna-se difícil e trabalhosa. Nestes casos, emprega-se a analogia de membrana introduzida por Prandtl. Assim, ao invés de se resolver a equação diferencial (5.88) do problema de torção, considera-se a equação de uma membrana fina.

Para ilustrar o problema de membrana fina, considere uma chapa com um furo fixada nas suas extremidades. Sobre o furo coloca-se sabão líquido e infla-se ar continuamente para formar uma bolha ou uma membrana fina, como ilustrado na Figura 5.25(a). A membrana estará então submetida a uma

carga distribuída constante de intensidade $q(x)$ e uma tração uniforme por unidade de comprimento de contorno denotada por S , conforme ilustrado na Figura 5.25(b). A flecha $w(y, z)$ da membrana é dada por [?]

$$\frac{\partial^2 w(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w(y, z)}{\partial z^2} = -\frac{q}{S}. \quad (5.123)$$

Como a membrana está fixa na extremidade, a flecha $w(y, z)$ deve ser nula no contorno, ou seja,

$$w(y, z) = 0. \quad (5.124)$$

As expressões (5.123) e (5.124) representam o PVC para uma membrana fina fixada na sua extremidade.

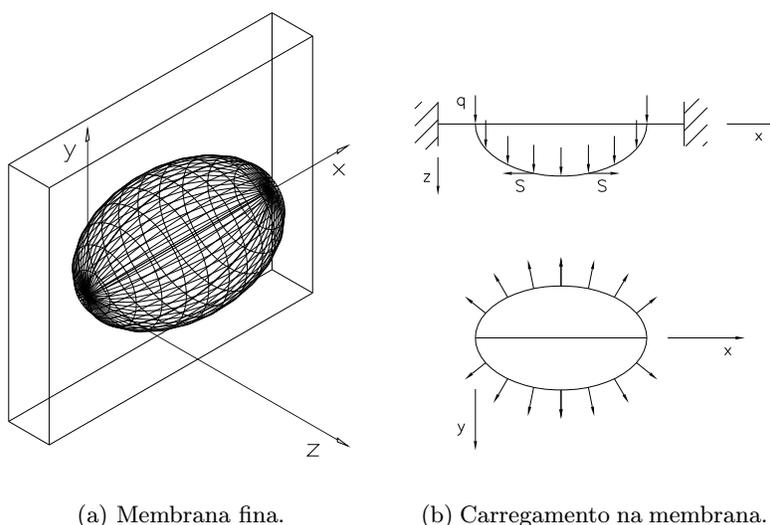


Figura 5.25: Analogia da membrana.

Observa-se que o PVC do problema de membrana fina é idêntico ao problema de torção (5.88). Desta maneira, pode-se estudar o problema de torção fazendo uma analogia com uma membrana fina cujo contorno é idêntico ao da seção transversal considerada.

A partir desta analogia, as seguintes conclusões podem ser colocadas [?, ?]:

- a tensão de cisalhamento em qualquer ponto é proporcional à inclinação da membrana deformada neste mesmo ponto,
- a direção da tensão de cisalhamento num ponto forma um ângulo reto com a inclinação da membrana no mesmo ponto,
- duas vezes o volume formado pela membrana e o eixo x é proporcional ao momento torçor na seção (ver equação (5.104)).

Empregando-se a analogia da membrana, determinam-se expressões para a tensão de cisalhamento máxima $\tau^{\max}(x)$ e do ângulo de torção $\theta(x)$ numa seção x de um eixo de seção retangular de base b e altura a (ver Figura 5.26) como [?]

$$\tau^{\max}(x) = \frac{M_x(x)}{C_1 ab^2} \quad \text{e} \quad \theta(x) = \frac{M_x(x)L}{C_2 ab^3 G(x)}, \quad (5.125)$$

sendo L o comprimento do eixo. Os valores das constantes C_1 e C_2 dependem da relação $\frac{b}{a}$ e estão dadas na Tabela 5.1.

$\frac{a}{b}$	C_1	C_2
1,0	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2,0	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3,0	0,267	0,263
4,0	0,282	0,281
5,0	0,291	0,291
10,0	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

Tabela 5.1: Coeficientes para a torção de seções retangulares [?].

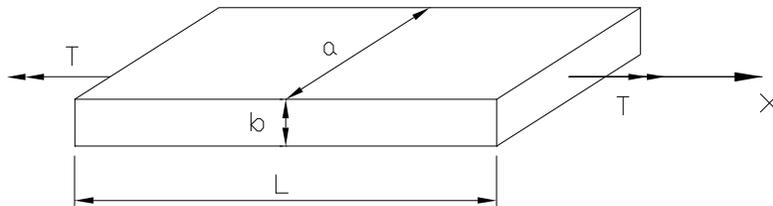


Figura 5.26: Eixo de seção retangular

Para seções retangulares estreitas, tem-se que $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$. Utiliza-se este caso para aplicar as expressões (5.125) em eixos de paredes finas com seções transversais do tipo ilustradas na Figura 5.27. Para isto, basta tomar a altura a nas equações (5.125) como sendo igual ao comprimento da seção transversal desenvolvida. Observa-se que para o caso de seções com ângulos reentrantes ocorre concentrações de tensão que dependem dos raios r dos filetes. Nestes casos, as equações (5.125) não podem ser aplicadas para calcular as tensões nestes raios. Uma discussão para estes casos está apresentada em [?].

5.2.9 Verificação e Dimensionamento

Para verificar ou dimensionar um eixo de seção genérica, emprega-se o mesmo procedimento apresentado na Seção 5.1.9. Apenas utilizam-se expressões diferentes, tais como (5.115) e (5.125), para o cálculo da tensão de cisalhamento máxima.

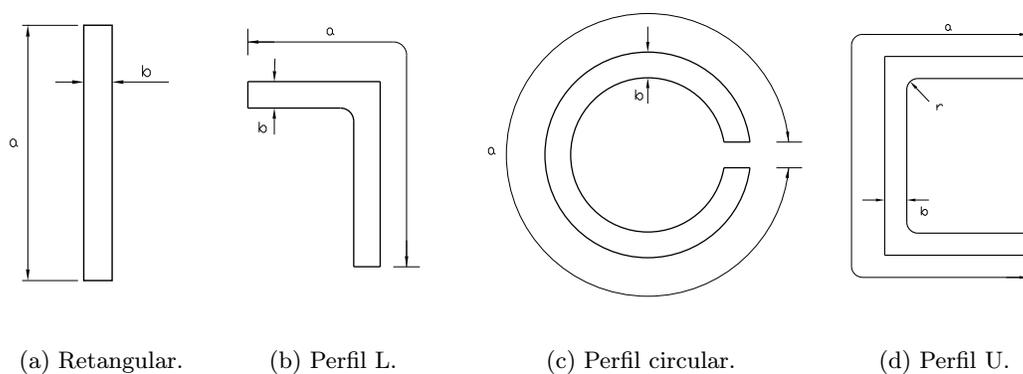


Figura 5.27: Analogia da membrana com seções retangulares.