

Capítulo 6

VIGA

6.1 Introdução

Um outro elemento estrutural unidimensional é a viga. Assim, como nos casos de barra e eixo, a viga é tratada com um modelo unidimensional, fazendo-se a hipótese que o comprimento é bem maior que as dimensões da seção transversal. O sistema cartesiano de referência empregado passa pelo centro de gravidade da seção transversal, como ilustrado na Figura 6.1. O problema principal está relacionado às ações de movimento causando a flexão da viga conforme mostrado na Figura 6.2. Observa-se que a análise de vigas é bastante comum em problemas de engenharia, tornando-se fundamental o estudo da formulação de vigas. Para esta finalidade, consideram-se os modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. A diferença básica entre estes modelos está relacionada ao fato que a formulação de Euler-Bernoulli não considera a deformação de cisalhamento presente nas seções traanversais. Para incluir este efeito, deve-se considerar o modelo de Timoshenko. Neste capítulo, apresenta-se na próxima seção o modelo de Euler-Bernoulli ou de flexão pura. Posteriormente, discute-se a viga de Timoshenko.

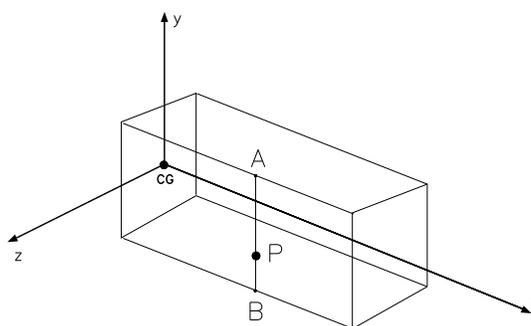


Figura 6.1: Sistema de coordenadas da viga.

6.2 Modelo de Euler-Bernoulli

Na teoria clássica de Euler-Bernoulli ou de flexão pura, consideram-se vigas prismáticas uniformes (de seção transversal constante) com comprimento longitudinal como dimensão predominante. No caso de vigas, o interesse reside em ações de movimento chamadas *ações de flexão*, ou seja, deslocamentos transversais na direção do eixo y associados a rotações das seções transversais em torno do eixo z ,

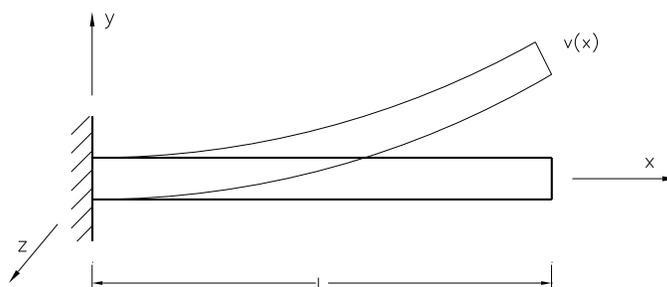


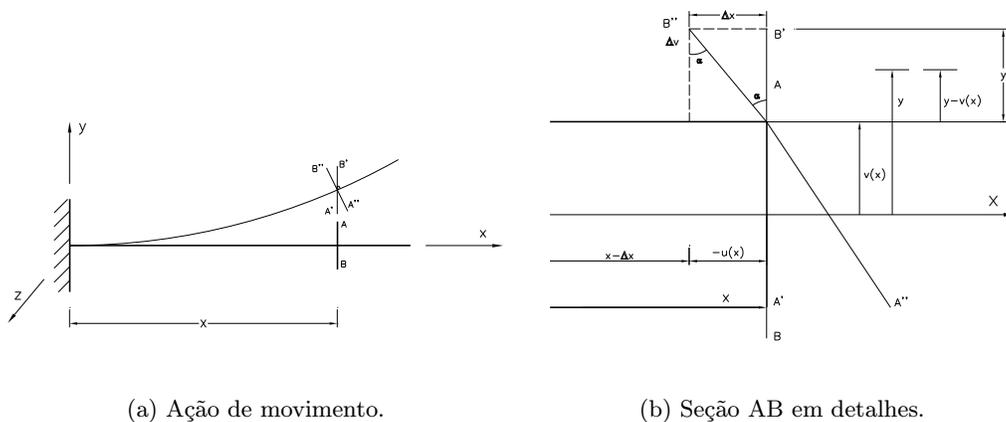
Figura 6.2: Exemplo de viga em flexão.

de acordo com o sistema de coordenadas mostrado na Figura 6.1. A seguir, aplicam-se os passos da formulação variacional para este modelo de viga.

6.2.1 Definição da Cinemática

A hipótese cinemática no modelo de Euler-Bernoulli consiste em supor que as ações de movimento possíveis devem ser tais que as seções permanecem planas, indeformadas e ortogonais ao eixo longitudinal x da viga. Esta hipótese está ilustrada na Figura 6.3(a) para uma seção AB distante x da origem do sistema de referência. Após a ação de flexão, a seção AB assume a posição indicada por $A''B''$, mas permanece plana, não-deformada e ortogonal ao eixo da viga.

Em outras palavras, as ações de movimento possíveis fazem com que, em cada seção transversal x , ocorra um deslocamento vertical rígido, denotado por $v(x)$, constante em todos os pontos da seção, juntamente com uma rotação rígida em torno do eixo z , como ilustrado na Figura 6.3(b) para a mesma seção AB . Observe que inicialmente a seção assume a posição $A'B'$ devido ao deslocamento transversal rígido $v(x)$ na direção do eixo y do sistema de referência. A partir daí, ocorre uma rotação rígida de um ângulo α em torno do eixo z e a seção gira até atingir a posição final $A''B''$. Observe que devido a rotação de um ângulo α em torno do eixo z , o ponto $A'B'$ apresenta um deslocamento Δu na direção longitudinal x e um deslocamento Δv na direção y .



(a) Ação de movimento.

(b) Seção AB em detalhes.

Figura 6.3: Cinemática da viga de Euler-Bernoulli.

A partir da Figura 6.3(b), observa-se que o deslocamento axial Δu do ponto A' é dado pela diferença entre as posições final e inicial deste ponto, ou seja,

$$\Delta u = x - \Delta x - x = -\Delta x.$$

Supondo que o ponto A está a uma distância y do eixo x , o qual passa pelo centro de gravidade da seção, as seguintes relações são válidas para a tangente do ângulo α

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\Delta x}{y - \Delta v} = -\frac{u(x)}{y - \Delta v}, \\ \tan \alpha &= \frac{\Delta v}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = -\frac{u(x)}{y - \Delta v} \rightarrow \Delta u = -y \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{(\Delta v)^2}{\Delta x}.$$

Supondo que o ângulo α é pequeno, tem-se que Δx e Δv são também pequenos e termo $\frac{(\Delta v)^2}{\Delta x}$ pode ser desprezado. Isto é análogo a tomar o limite para Δx tendendo a zero. Portanto, o deslocamento axial $u(x)$ na seção x é dado por

$$u(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-y \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = -y \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Aplicando a definição de derivada vem que

$$u(x) = -y \frac{dv(x)}{dx}. \quad (6.1)$$

Portanto, verifica-se que devido a ação de flexão o deslocamento axial $u(x)$ varia linearmente na seção. Resumindo, as ações de movimento na flexão são dadas por um campo vetorial $\mathbf{u}(x)$ variando apenas com x e possuindo as seguintes componentes

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y \frac{dv(x)}{dx} \\ v(x) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.2)$$

Observa-se que $\theta_z(x) = \frac{dv(x)}{dx}$ representa a rotação da seção transversal em x em relação ao eixo z do sistema de referência. O sinal negativo em $u(x)$ vem do fato que quando a rotação é positiva, ou seja $\theta_z(x) > 0$, o deslocamento longitudinal ocorre no sentido negativo do eixo x do sistema de referência como pode ser visto na Figura 6.3(b). A Figura 6.4 ilustra o comportamento do deslocamento axial $u(x)$ para rotações positiva ($\theta_z(x) > 0$) e negativa ($\theta_z(x) < 0$).

O conjunto das ações cinematicamente possíveis \mathcal{V} é definido por,

$$V = \{\mathbf{u} \mid u_1 = u(x) = -y \frac{dv(x)}{dx}, u_2(x) = v(x), u_3(x) = 0\}. \quad (6.3)$$

Para uma viga livre, o conjunto das ações admissíveis coincide com \mathcal{V} .

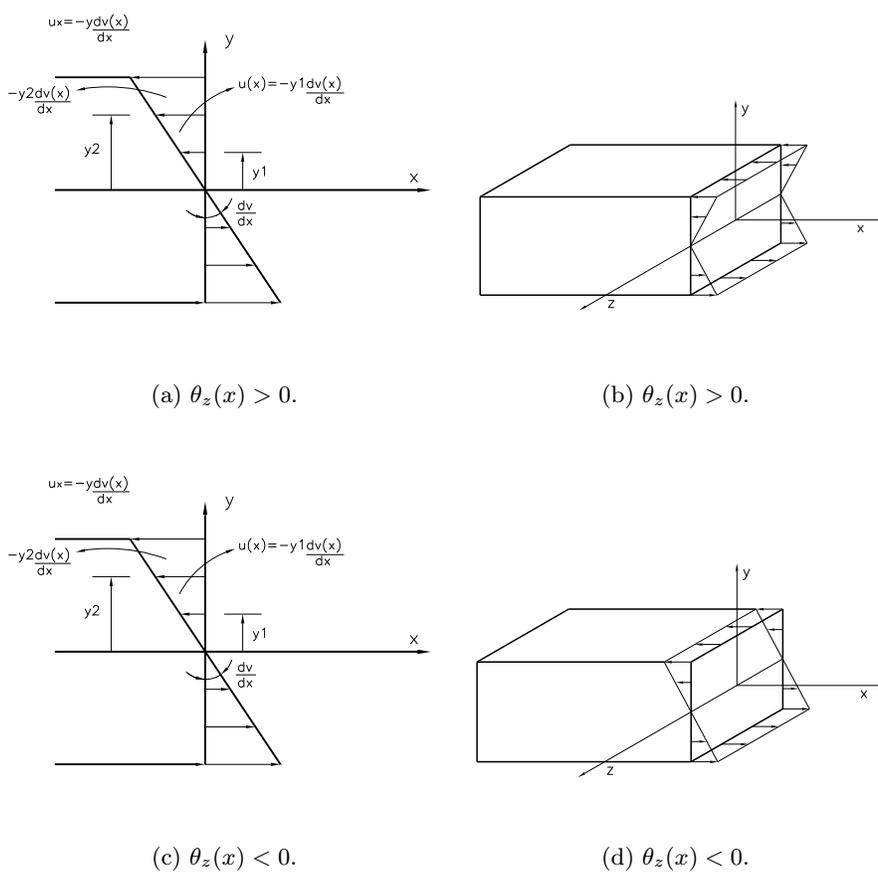


Figura 6.4: Deslocamento longitudinal $u(x)$ variando linearmente na seção transversal AB da viga.

6.2.2 Deformação

Devido a cinemática adotada para a viga, as seções transversais apresentam um deslocamento axial $u(x)$ variando linearmente na seção. De forma análoga ao caso de barra, a componente de deformação associada a $u(x)$ é a deformação específica longitudinal $\varepsilon_{xx}(x)$. Para determinar uma expressão para $\varepsilon_{xx}(x)$, procede-se de forma análoga aos casos de barra e torção, ou seja, toma-se a variação dos deslocamentos axiais de duas seções arbitrárias na viga. A Figura 6.5 ilustra duas seções arbitrárias AB e CD , as quais distam, respectivamente, x e $x + \Delta x$ da origem do sistema de referência da viga. Devido a ação de flexão, estas seções apresentam deslocamentos axiais $u(x)$ e $u(x + \Delta x)$, os quais são dados em função dos deslocamentos transversais $v(x)$ e $v(x + \Delta x)$, respectivamente, por $u(x) = -y \frac{dv(x)}{dx}$ e $u(x + \Delta x) = -y \frac{dv(x + \Delta x)}{dx}$. A variação específica do deslocamento axial entre estas seções é dada por

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{\left(-y \frac{dv(x + \Delta x)}{dx}\right) - \left(-y \frac{dv(x)}{dx}\right)}{\Delta x} = -y \frac{\frac{d}{dx} [v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x}.$$

A deformação específica $\varepsilon_{xx}(x)$ é dada tomando-se o limite da relação anterior para Δx tendendo a zero, ou seja,

$$\varepsilon_{xx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -y \frac{\frac{d}{dx} [v(x) - v(x + \Delta x)]}{\Delta x} \right\} = -y \frac{d}{dx} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

sendo $\Delta v = v(x) - v(x + \Delta x)$ a variação dos deslocamentos transversais entre as seções AB e CD . Empregando a definição de derivada vem que

$$\varepsilon_{xx}(x) = -y \frac{d}{dx} \left(\frac{dv(x)}{dx} \right) = -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2}. \quad (6.4)$$

Portanto, enquanto na barra $\varepsilon_{xx}(x)$ é constante em todos os pontos da seção, a deformação longitudinal na viga apresenta uma variação linear de acordo com a coordenada y do ponto considerado. Este comportamento é análogo àquele do deslocamento axial $u(x)$ e está ilustrado na Figura 6.4.

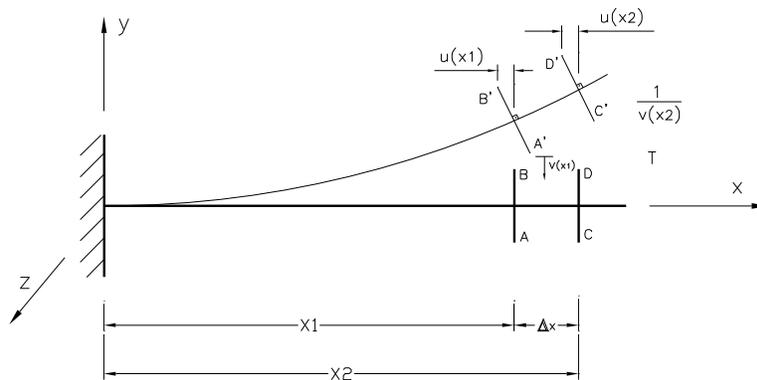


Figura 6.5: Deformação na viga de Euler-Bernoulli.

Como o deslocamento transversal $v(x)$ está agindo na direção vertical y , tem-se uma componente de deformação longitudinal $\varepsilon_{yy}(x)$ associada a $v(x)$. Para caracterizar esta componente, basta tomar a

diferença entre os deslocamentos transversais $v(x)$ e $v(x + \Delta x)$ das seções AB e CD mostradas na Figura 6.5, de forma análoga ao efetuado para $\varepsilon_{xx}(x)$. Logo, a componente de deformação $\varepsilon_{yy}(x)$ é dada pelo limite para Δx tendendo a zero da seguinte relação

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{x + \Delta x - x},$$

ou seja,

$$\varepsilon_{yy}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Portanto, através da definição de derivada tem-se que

$$\varepsilon_{yy}(x) = \frac{dv(x)}{dx}. \quad (6.5)$$

No entanto, cada seção sofre um deslocamento transversal constante $v(x)$ e a variação do mesmo na seção é nula, ou seja, $\frac{dv(x)}{dx} = 0$. Desta maneira, a deformação específica $\varepsilon_{yy}(x)$ associada a $v(x)$ é zero. Este resultado está de acordo com a hipótese do modelo de Euler-Bernoulli que as seções transversais permanecem não-deformadas.

Analogamente, a componente de deformação cisalhante $\gamma_{xy}(x)$ é nula, pois as seções permanecem planas e ortogonais ao eixo da viga. Lembre-se que o primeiro índice significa o plano no qual a deformação está presente (neste caso, o eixo x é normal a toda seção transversal da viga), enquanto o segundo índice, y neste caso, indica a direção da deformação. Portanto

$$\gamma_{xy}(x) = 0. \quad (6.6)$$

Conclui-se, então, que a única componente de deformação não-nula é $\varepsilon_{xx}(x)$ de forma análoga ao caso da barra.

O operador de deformação D é dado por $D = -y \frac{d}{dx}$. Da mesma maneira, o espaço \mathcal{W} é o conjunto de todas as funções escalares $\varepsilon_{xx}(x)$, denominadas deformações longitudinais e obtidas ao se derivar as ações de movimento $u(x) \in \mathcal{V}$. Observa-se que o operador de deformação $D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ relaciona a cinemática com a deformação, ou seja,

$$D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \\ u(x) \rightarrow \varepsilon_{xx}(x) = Du(x) = -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2}. \quad (6.7)$$

6.2.3 Movimentos Rígidos

Como mencionado na Seção 3.3, a potência interna P_i é nula para o caso de um movimento de corpo rígido. Isto implica em dizer que a deformação $\varepsilon_{xx}(x)$ é nula para toda seção x ao longo do comprimento da viga, ou seja,

$$\varepsilon_{xx}(x) = -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0 \quad x \in (0, L). \quad (6.8)$$

A relação anterior pode ser reescrita como

$$\varepsilon_{xx}(x) = y \frac{d}{dx} \left(\frac{dv(x)}{dx} \right) = 0.$$

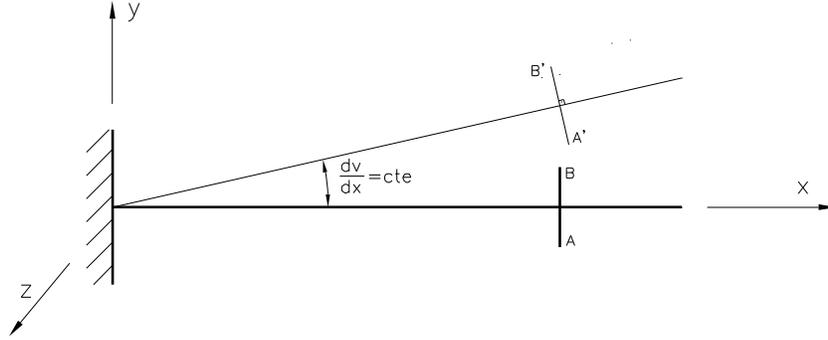


Figura 6.6: Movimento de corpo rígido na viga: rotação em torno do eixo z .

Para que a condição anterior seja satisfeita, a rotação $\frac{dv(x)}{dx}$ deve ser constante para toda seção transversal. Isto implica que a viga apresenta uma rotação rígida constante em torno do eixo z como ilustrado na Figura 6.6.

O conjunto de todas as ações rígidas em \mathcal{V} , ou seja, das ações $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ tal que $\varepsilon_{xx} = Du(x) = -y \frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0$, define o subconjunto $\mathcal{N}(D)$ das ações rígida da viga. Estes subconjunto é definido formalmente como

$$\mathcal{N}(D) = \left\{ \mathbf{u}(x) \in \mathcal{V} \mid \frac{dv(x)}{dx} = \text{cte}, Du(x) = -y \frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0 \right\}, \quad (6.9)$$

ou seja, $\mathcal{N}(D)$ é o subconjunto de todas as ações de movimento $\mathbf{u}(x)$ de \mathcal{V} , tais que $\frac{dv(x)}{dx}$ é constante, implicando que a deformação $\varepsilon_{xx}(x)$ é nula.

6.2.4 Potência Interna

Como a única componente de deformação não-nula é $\varepsilon_{xx}(x)$, deve existir, de forma análoga ao caso de barra, uma função $\sigma_{xx}(x)$ representando o estado das forças internas nas seções da viga na direção do eixo x . Esta função escalar é denominada tensão normal atuante no plano x na direção do eixo x e está relacionada a $\varepsilon_{xx}(x)$ através do conceito de potência interna. O produto $\sigma_{xx}(x)\varepsilon_{xx}(x)$ representa a densidade de trabalho interno em cada ponto da viga, pois este termo possui unidades do tipo $\frac{N}{m^2} \frac{m}{m}$. Para obter o trabalho interno total, deve-se somar os produtos $\sigma_{xx}(x)\varepsilon_{xx}(x)$ para cada ponto da viga. Como a viga é contínua, ou seja, possui infinitos pontos, emprega-se uma integral para representar esta soma. Logo, a potência interna P_i é dada pela seguinte integral ao longo do volume V da viga

$$P_i = - \int_V \sigma_{xx}(x) \varepsilon_{xx}(x) dV. \quad (6.10)$$

Substituindo a expressão (6.4) para $\varepsilon_{xx}(x)$ vem que

$$P_i = - \int_V \sigma_{xx}(x) \left(-y \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right) dV.$$

Pode-se decompor a integral de volume anterior em duas integrais, sendo uma ao longo do comprimento L e a outra na área A da seção transversal da viga, ou seja,

$$P_i = - \int_0^L \left(- \int_A y \sigma_{xx}(x) dA \right) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx. \quad (6.11)$$

A integral sob a área resulta num momento na direção z do sistema de referência da viga. Este fato está ilustrado na Figura 6.7 para um elemento infinitesimal de área dA . Observe o termo $\sigma_{xx}(x)dA$ representa uma força na direção x que ao ser multiplicada pelo distância y resulta num momento na direção z . O efeito deste momento é provocar uma flexão na viga, sendo por isto denominado *momento fletor em relação ao eixo z* do sistema de referência adotado e denotado por $M_z(x)$. Logo

$$M_z(x) = - \int_A y \sigma_{xx}(x) dA. \quad (6.12)$$

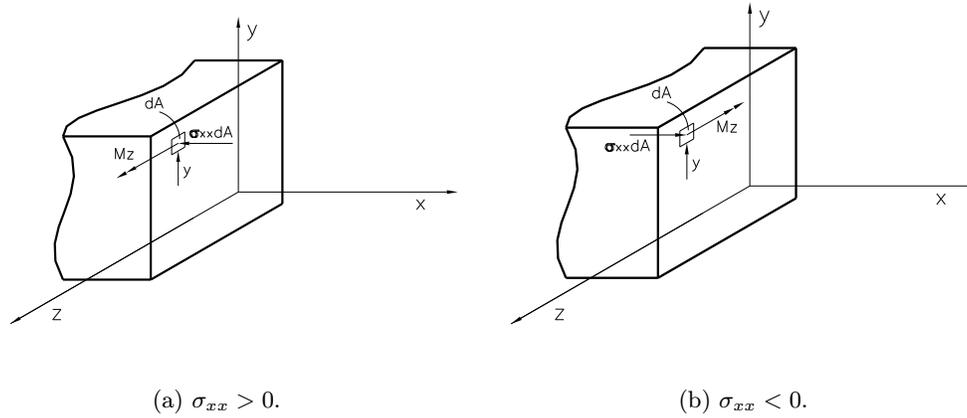


Figura 6.7: Momento fletor na seção transversal da viga de Euler-Bernoulli.

Assim, no caso da viga de Euler-Bernoulli, o espaço \mathcal{W} dos esforços internos é definido por funções contínuas $M_z(x)$ representando a resultante em termos de momento fletor nas seções da viga.

Como na expressão anterior $\sigma_{xx}(x)$ depende apenas de x e não de y e z , pode-se reescrevê-la como

$$M_z(x) = -\sigma_{xx}(x) \int_A y dA.$$

A integral anterior representa o momento estático de área ou momento de primeira ordem $M_{sz}(x)$ da seção transversal em relação ao eixo z do sistema de referência. Logo

$$M_{sz}(x) = \int_A y dA. \quad (6.13)$$

Portanto

$$M_z(x) = -\sigma_{xx}(x) M_{sz}(x). \quad (6.14)$$

Substituindo (6.12) em (6.11) vem que

$$P_i = - \int_0^L M_z(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx. \quad (6.15)$$

Verifica-se que o deslocamento transversal $v(x)$ está derivado duas vezes na expressão da potência interna. Para obter uma relação contendo apenas $v(x)$, deve-se derivar (6.15) duas vezes por parte, ou seja,

$$\begin{aligned} P_i &= - \int_0^L M_z(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx = \int_0^L \frac{dM_z(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx - M_z(x) \frac{dv(x)}{dx} \Big|_0^L \\ &= - \int_0^L \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} v(x) dx - M_z(x) \frac{dv(x)}{dx} \Big|_0^L + \frac{dM_z(x)}{dx} v(x) \Big|_0^L. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Logo, após a integração por partes, obtém-se uma expressão com uma integral ao longo do comprimento da viga e dois conjuntos de termos no contorno. Observe que a derivada $\frac{dM_z(x)}{dx}$ representa uma força, pois se o momento fletor estiver dado em Nm e emprega-se m para denotar comprimento, a derivada resulta num termo em N . Como o momento está na direção z e o comprimento da viga em x , tem-se uma força transversal na direção y , ou seja, paralela a cada seção transversal da viga. Desta forma, esta força é denotada por $V_y(x)$ e denominada *força cortante*. Logo, a seguinte relação é válida para o momento fletor e a força cortante na viga

$$V_y(x) = \frac{dM_z(x)}{dx}. \quad (6.17)$$

Lembrando que a rotação é indicada como $\theta_z(x) = \frac{dv(x)}{dx}$ e substituindo a expressão anterior em (6.16), obtém-se a forma final para a potência interna na viga

$$P_i = - \int_0^L \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} v(x) dx - M_z(x) \theta_z(x) \Big|_0^L + V_y(x) v(x) \Big|_0^L, \quad (6.18)$$

a qual pode ainda ser expandida como

$$P_i = \int_0^L \left(- \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} \right) v(x) dx + \left[-M_z(L) \hat{\theta}_z(L) + M_z(0) \hat{\theta}_z(0) \right] + [V_y(L) \hat{v}(L) - V_y(0) \hat{v}(0)] \quad (6.19)$$

Finalmente, observe que o termo $\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2}$ representa uma força por unidade de comprimento, ou seja, uma carga distribuída internamente ao longo do comprimento da viga. Para verificar este fato, basta checar as unidades de $\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2}$, ou seja,

$$\left[\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} \right] = \frac{Nm}{m^2} = \frac{N}{m}.$$

Observe ainda, que de forma análoga a cortante, esta carga distribuída está presente na direção vertical, isto é, do eixo y do sistema de referência.

Portanto, os esforços internos compatíveis com a cinemática de viga em flexão são forças cortantes e momentos fletores concentrados nas extremidades da viga, além de uma carga distribuída ao longo de seu comprimento. Estes esforços estão ilustrados na Figura 6.8(a).

6.2.5 Aplicação do PPV

Seja f o conjunto de esforços externos compatíveis com a cinemática definida para o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Para caracterizar f , aplica-se o PPV dado na Seção 3.4. Logo, a partir de (6.19) e do PPV expresso em (3.21), tem-se que para qualquer ação de movimento virtual $\hat{\mathbf{u}}(x) \in \mathcal{V}$

$$P_e + P_i = 0.$$

Logo,

$$\langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle + \int_0^L \left(-\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} \right) \hat{v}(x) dx + [-M_z(L)\hat{\theta}_z(L) + M_z(0)\hat{\theta}_z(0)] + [V_y(L)\hat{v}(L) - V_y(0)\hat{v}(0)]. \quad (6.20)$$

A equação anterior representa o enunciado integral do equilíbrio da viga livre de restrições, fornecendo ainda uma representação das forças compatíveis com o modelo de viga de Euler-Bernoulli.

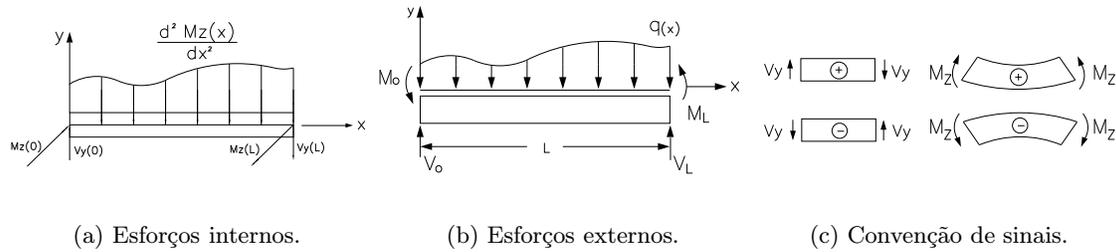


Figura 6.8: Esforços internos e externos na viga de Euler-Bernoulli.

6.2.6 Caracterização dos Esforços Externos

O PPV estabelece que se o corpo está em equilíbrio, as potências externa e interna são as mesmas para qualquer ação virtual de movimento, a partir da configuração deformada do corpo. O termo relativo à potência interna em (6.20) foi determinado através da integração por partes. Este termo é importante pois possibilita caracterizar os esforços internos que estão presentes na viga (veja Figura 6.8(a)).

Logo, como o PPV estabelece a igualdade das potências externa e interna para qualquer deslocamento virtual $\hat{\mathbf{u}}(x)$ a partir da posição de equilíbrio, pode-se caracterizar os esforços externos compatíveis com a representação (6.20). Desta maneira, tem-se forças transversais concentradas V_0 e V_L , respectivamente, nas extremidades $x = 0$ e $x = L$ da viga, de tal forma que os termos $V_L \hat{v}(L)$ e $V_0 \hat{v}(0)$ da potência externa associada equilibre, respectivamente, os termos $V_y(L) \hat{v}(L)$ e $V_y(0) \hat{v}(0)$ da potência interna. Momentos puros M_0 e M_L concentrados na direção z devem estar presentes de tal forma que os termos da potência externa virtual $M_L \hat{\theta}_z(L)$ e $M_0 \hat{\theta}_z(0)$ se igualem, respectivamente, aos termos da potência interna $M_z(L) \hat{\theta}_z(L)$ e $M_z(0) \hat{\theta}_z(0)$. Finalmente, para equilibrar a carga distribuída transversal interna $\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2}$, deve existir uma densidade de força externa transversal distribuída, denotada por $q(x)$, cuja potência $\int_0^L q(x) \hat{v}(x) dx$ associada a um deslocamento virtual arbitrário $\hat{v}(x)$, equilibre a potência interna $\int_0^L \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} \hat{v}(x) dx$. Estes esforços externos estão mostrados na Figura 6.8(b). Portanto, os esforços externos compatíveis com o modelo cinemático da viga são dados por

$$f : \begin{cases} V_0, V_L : & \text{esforços cortantes nos extremos da viga} \\ M_0, M_L : & \text{momentos fletores nos extremos da viga} \\ q(x) : & \text{carregamento transversal distribuído} \\ & \text{por unidade de comprimento} \end{cases} \quad (6.21)$$

A partir da expressão anterior, a expressão da potência externa das forças f para qualquer ação virtual $\hat{\mathbf{u}}(x) \in \mathcal{V}$ é escrita como

$$P_e = \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \int_0^L q(x) \hat{v}(x) dx + M_L \hat{\theta}_z(L) + M_0 \hat{\theta}_z(0) + V_L \hat{v}(L) + V_0 \hat{v}(0). \quad (6.22)$$

Substituindo (6.22) no enunciado do PPV (6.20) e rearranjando os termos, vem que

$$\int_0^L \left[-\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} + q \right] \hat{v} \, dx + [-M_z(L) + M_L] \hat{\theta}_z(L) + [M_z(0) + M_0] \hat{\theta}_z(0) + [V_y(L) + V_L] \hat{v}(L) + [-V_y(0) + V_0] \hat{v}(0) = 0.$$

Para que esta equação seja verdadeira para toda ação virtual $\hat{\mathbf{u}}(x) \in \mathcal{V}$, os 3 termos entre colchetes devem ser simultaneamente nulos, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} - q(x) = 0 & x \in (0, L) \\ V_y(0) = V_0 & x = 0 \\ V_y(L) = -V_L & x = L \\ M_z(0) = -M_0 & x = 0 \\ M_z(L) = M_L & x = L \end{array} \right. \quad (6.23)$$

A expressão anterior define a forma local ou o problema de valor de contorno da viga livre de restrições cinemáticas. Tem-se uma equação diferencial em termos do momento fletor, duas condições de contorno em termos da força cortante e mais duas em termo do momento fletor. Resolvendo-se a equação diferencial, obtém-se uma função descrevendo o momento fletor $M_z(x)$ ao longo do eixo x da viga. Um valor positivo indica que as fibras da parte de baixo da viga estão tracionadas (sentido positivo do eixo z), enquanto as fibras da parte de cima estão comprimidas. Um valor negativo indica que as fibras de baixo estão comprimidas e as de cima tracionadas. A convenção de sinais está ilustrada na Figura 6.8(c). Observe que a força cortante positiva em duas seções de um elemento de viga, implica que este elemento gire no sentido horário (z negativo), enquanto a cortante negativa indica um giro no sentido anti-horário (z positivo). Pode-se traçar diagramas da força cortante $V_y(x)$ e do momento fletor $M_z(x)$, sendo estes diagramas conhecidos como diagramas de esforços solicitantes para o problema de viga.

A equação diferencial em termos do momento fletor dada em (6.23) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dM_z(x)}{dx} \right) - q(x) = 0.$$

Substituindo a expressão para a força cortante (6.17), chega-se na equação diferencial de equilíbrio em termos da cortante, isto é,

$$\frac{dV_y(x)}{dx} - q(x) = 0 \quad (6.24)$$

A partir da equação (6.23), define-se o operador de equilíbrio D^* entre os esforços externos e internos. Este operador pode ser escrito como

$$D^* M_z(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} & x \in (0, L) \\ \frac{dM_z(x)}{dx} & x = 0 \\ -\frac{dM_z(x)}{dx} & x = L \\ -M_z(x)|_{x=0} & x = 0 \\ M_z(x)|_{x=L} & x = L \end{array} \right. \quad (6.25)$$

O operador D^* mapeia os espaços vetoriais dos esforços internos \mathcal{W} e externos \mathcal{V}' . Neste caso, o espaço vetorial dos esforços externos \mathcal{V}' é caracterizado por uma função escalar contínua $q(x)$ indicando a carga transversal distribuída sobre a viga, forças transversais concentradas V_0 e V_L e momentos puros

concentrados M_0 e M_L nas extremidades da viga. Estes esforços concentrados são tratados como condições de contorno do problema. Portanto, denota-se \mathcal{D}^* como

$$D^* : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}'$$

$$M_z(x) \rightarrow D^* M_z(x) = \begin{cases} \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} & x \in (0, L) \\ \frac{dM_z(x)}{dx} & x = 0 \\ -\frac{dM_z(x)}{dx} & x = L \\ -M_z(x)|_{x=0} & x = 0 \\ M_z(x)|_{x=L} & x = L \end{cases} \quad (6.26)$$

A forma esquemática da formulação do problema de barra é mostrada na Figura 6.9.

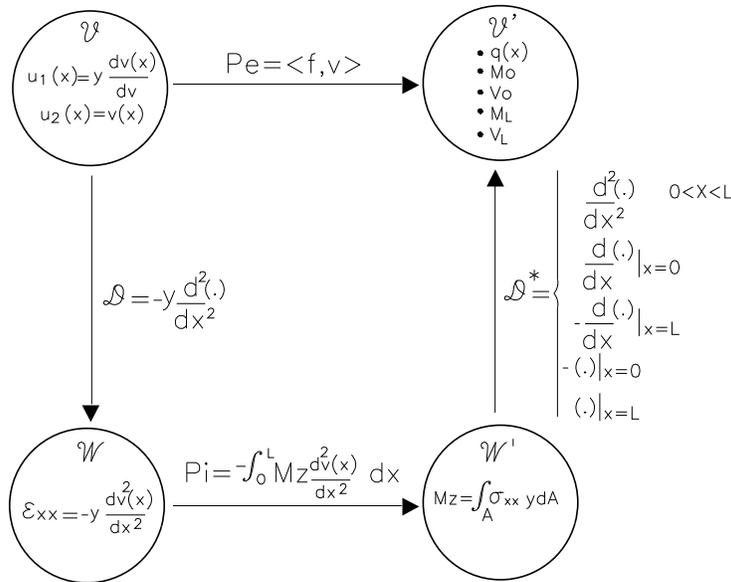


Figura 6.9: Formulação do modelo de viga de Euler-Bernoulli.

6.2.7 Aplicação da Equação Constitutiva

Para um material elástico linear isotrópico, a componente de tensão $\sigma_{xx}(x)$ está relacionada à componente de deformação $\varepsilon_{xx}(x)$ através do módulo de elasticidade longitudinal $E(x)$ do material, isto é,

$$\sigma_{xx}(x) = E(x)\varepsilon_{xx}(x). \quad (6.27)$$

Substituindo (6.4) na expressão anterior vem que

$$\sigma_{xx}(x) = -E(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} y. \quad (6.28)$$

Por sua vez, substituindo a expressão anterior em (6.12), reescreve-se o momento fletor $M_z(x)$ como

$$M_z(x) = - \int_A -E(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} y^2 dA = E(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \int_A y^2 dA.$$

Lembrando que $I_z(x) = \int_A y^2 dA$ é o momento de inércia de área da seção transversal x em relação ao eixo z , tem-se a expressão final para o momento fletor

$$M_z(x) = E(x)I_z(x)\frac{d^2v(x)}{dx^2}. \quad (6.29)$$

Para seção circular com diâmetro d , tem-se $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$. No caso de seção retangular de base b e altura h , tem-se $I_z = \frac{bh^3}{12}$. Como a cortante é a derivada do momento fletor vem que

$$V_y(x) = E(x)I_z(x)\frac{d^3v(x)}{dx^3}. \quad (6.30)$$

Substituindo $M_z(x)$ na equação diferencial do momento fletor indicada em (6.23) vem que

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I_z(x)\frac{d^2v(x)}{dx^2} \right) - q(x) = 0. \quad (6.31)$$

Para uma viga de um mesmo material e seção transversal constante tem-se $E(x) = E$ e $I_z(x) = I_z$. Logo, a expressão anterior se reduz a

$$EI_z \frac{d^4v(x)}{dx^4} - q(x) = 0. \quad (6.32)$$

Estas duas últimas expressões representam a equação diferencial de quarta ordem do deslocamento transversal da viga. Como solução, tem-se uma função fornecendo o deslocamento transversal ou flecha $v(x)$ ao longo da viga. Para isso, deve-se integrar a equação diferencial quatro vezes, fornecendo, respectivamente, a expressão da cortante $V_y(x) = EI_z \frac{d^3v(x)}{dx^3}$, do momento fletor $M_z(x) = EI_z \frac{d^2v(x)}{dx^2}$, da rotação $\frac{dv(x)}{dx}$ e do deslocamento transversal $v(x)$. Observa-se que as condições de contorno podem ser dadas tanto em termos de forças e momentos concentrados como em função de deslocamentos e rotações. Por sua vez, as restrições cinemáticas em termos do deslocamento e rotação, ilustradas na Figura 6.10, são incluídas na definição do espaço de ações admissíveis $Kin_{\mathbf{v}}$.

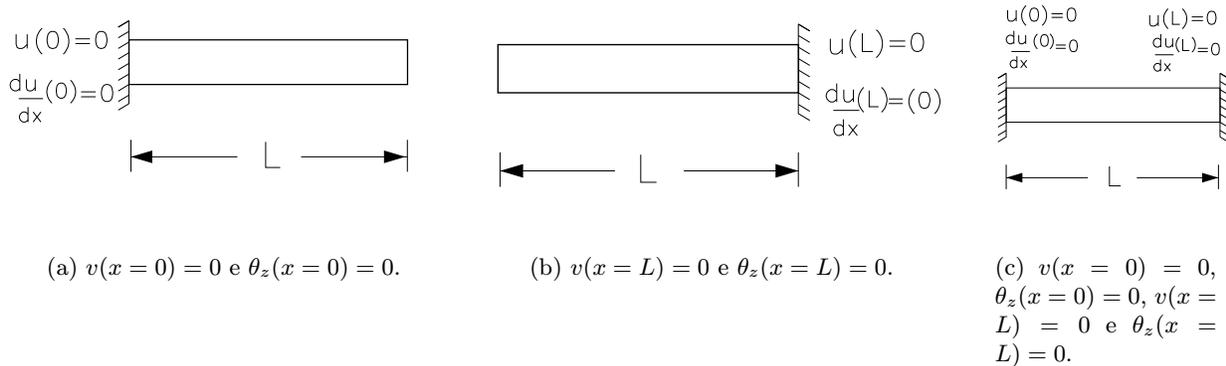


Figura 6.10: Condições de contorno na viga.

A partir de (6.28), obtém-se

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{\sigma_{xx}(x)}{Ey}, \quad (6.33)$$

a qual substituída em (6.29) resulta na seguinte expressão para o momento fletor na viga

$$\sigma_{xx}(x) = -\frac{M_z(x)}{I_z(x)}y. \quad (6.34)$$

Da mesma maneira, a partir de (6.27) e (6.34), tem-se que a componente de deformação longitudinal ε_{xx} associada a σ_{xx} é dada por

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{\sigma_{xx}(x)}{E(x)} = -\frac{M_z(x)}{E(x)I_z(x)}y. \quad (6.35)$$

Verifica-se então que a tensão e a deformação normais variam linearmente com a coordenada y na seção transversal da viga, atingindo o valor máximo no contorno da seção. Dependendo do sinal do momento fletor, as fibras da parte de cima da viga estarão em tração ou compressão, como ilustrado na Figura 6.11. Neste modelo de viga, consideram-se apenas seções transversais simétricas, segundo o eixo y , com flexão ao longo do plano de simetria definido pelo eixo z .

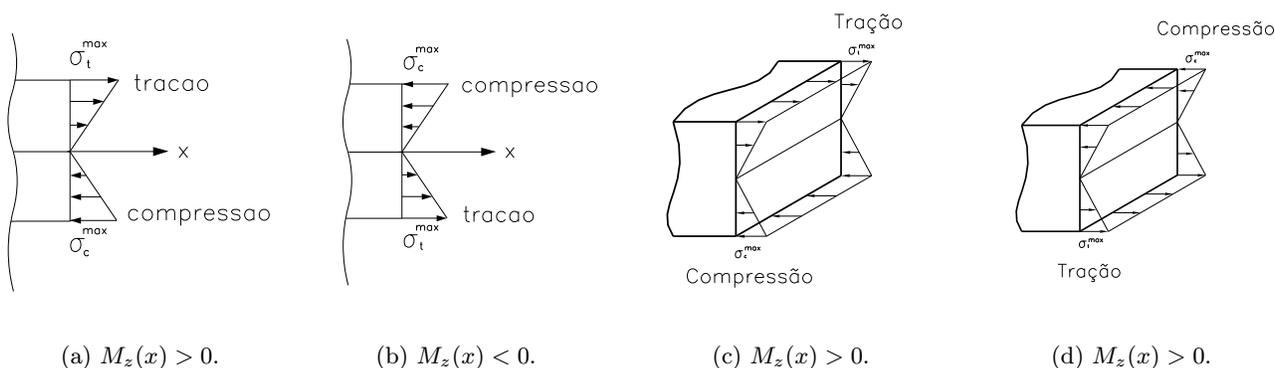


Figura 6.11: Tensões de tração e compressão na seção transversal da viga.

Como mencionado anteriormente, o sistema de referência da viga passa pelo centro de gravidade da seção. Para confirmar este fato, basta determinar a origem do eixo y na seção transversal da viga. Como se considera apenas a flexão pura, a resultante das forças na direção x em qualquer seção é nula, ou seja,

$$\sum F_x = 0: \quad \int_A \sigma_{xx} dA = 0 \quad (6.36)$$

Substituindo-se (6.34) na expressão anterior e observando que M_z e I_z não variam com y e z ao longo de uma mesma seção x , vem que

$$-\frac{M_z(x)}{I_z(x)} \int_A y dA = 0. \quad (6.37)$$

Para que a equação anterior seja nula é necessário que o momento estático $M_{s_z}(x) = \int_A y dA$ seja nulo, implicando que o eixo z , e portanto o sistema de referência indicado na Figura 6.1, passa pelo centro de gravidade da seção transversal da viga. O eixo z é denominado linha neutra da seção transversal e a união destas linhas em cada seção define a superfície neutra, como indicado na Figura 6.12.

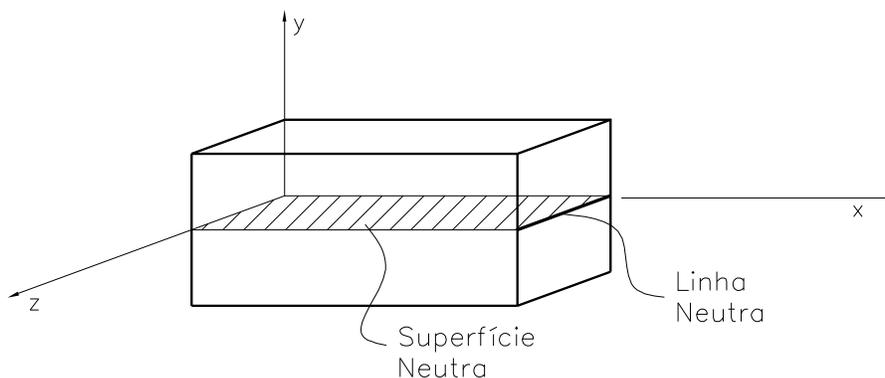


Figura 6.12: Linha e superfície neutras na viga.

6.2.8 Dimensionamento e Verificação

Dimensionar uma viga significa calcular as dimensões mínimas da seção transversal de tal forma que a viga permaneça na fase elástica. O dimensionamento considerado aqui será baseado no valor máximo da tensão normal na viga. De forma análoga aos casos de barra e eixo, consideram-se os seguintes passos no dimensionamento à tensão máxima:

1. determinam-se as funções e os respectivos diagramas da força cortante $V_y(x)$ e do momento fletor $M_z(x)$ através da integração da equação diferencial (6.31).
2. Com base neste diagrama, determina-se a seção mais solicitada, ou seja, a seção onde atua o maior momento fletor em módulo, sendo este valor denotado M_z^{\max} .
3. Aplicando-se a expressão (6.34), tem-se que a tensão normal máxima σ_{xx}^{\max} ocorre no contorno da seção mais solicitada, sendo a coordenada $y = y^{\max}$. Logo,

$$\sigma_{xx}^{\max} = \frac{M_z^{\max}}{I_z} y^{\max}. \quad (6.38)$$

Como não se conhece as dimensões da seção transversal ainda, agrupam-se os termos da expressão anterior envolvendo estas dimensões no módulo de resistência à flexão W_z dado por

$$W_x = \frac{I_z}{y^{\max}}. \quad (6.39)$$

Desta pode-se reescrever a expressão (6.38) como

$$\sigma_{xx}^{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z}. \quad (6.40)$$

4. A condição que o eixo permaneça na fase elástica significa que a tensão normal máxima deve ser menor ou igual a tensão normal admissível $\bar{\sigma}$ do material, ou seja,

$$\sigma_{xx}^{\max} \leq \bar{\sigma}. \quad (6.41)$$

O módulo de resistência à flexão mínimo é obtido, tomando-se a igualdade na expressão anterior, isto é,

$$W_z = \frac{M_z^{\max}}{\bar{\sigma}}. \quad (6.42)$$

Conhecido W_z , determinam-se as dimensões da seção transversal. Por exemplo, para uma seção circular de diâmetro d tem-se que

$$W_z = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \rightarrow d = \left(\frac{32W_z}{\pi}\right)^{1/3}. \quad (6.43)$$

No caso de uma seção retangular de base b e altura h , vem que

$$W_z = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \rightarrow bh^2 = 6W_z. \quad (6.44)$$

e conhecendo-se a relação entre b e h , determinam-se os seus valores.

No caso de verificação de uma viga, as dimensões da seção transversal são conhecidas e deseja-se verificar se a mesma permanece na fase elástica quando submetida a um certo carregamento. Para isto, calcula-se a tensão normal máxima σ_{xx}^{\max} usando (6.38). Com esta tensão máxima, basta verificar se a mesma é menor ou igual que a tensão admissível do material, ou seja,

$$\sigma_{xx}^{\max} \leq \bar{\sigma}. \quad (6.45)$$

Neste caso, diz-se que a viga permanece na fase elástica. Caso a condição não seja válida, deve-se redimensionar a viga, aplicando o procedimento anterior.

Exemplo 6.1 Traçar os diagramas da força cortante e momento fletor para a viga ilustrada na Figura 6.13, através da integração da equação diferencial.

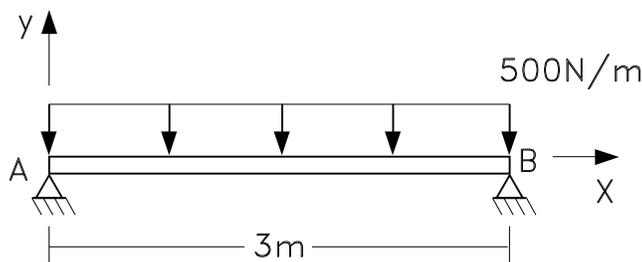


Figura 6.13: Equação diferencial: viga submetida a carga distribuída.

1. Equação do carregamento: $q(x) = -500$
2. Condições de contorno: $x = 0 \rightarrow M_z = 0$ $x = 3 \rightarrow M_z = 0$
3. Integração da equação diferencial: $\frac{d^2 M}{dx^2} = -500$
 - 1ª integração (cortante): $V_y = \frac{M_z}{dx} = -500x + C_1$
 - 2ª integração (momento fletor): $M_z = -250x^2 + C_1x + C_2$

4. Determinação das constantes de integração

$$M_z(x=0) = -250(0) + C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

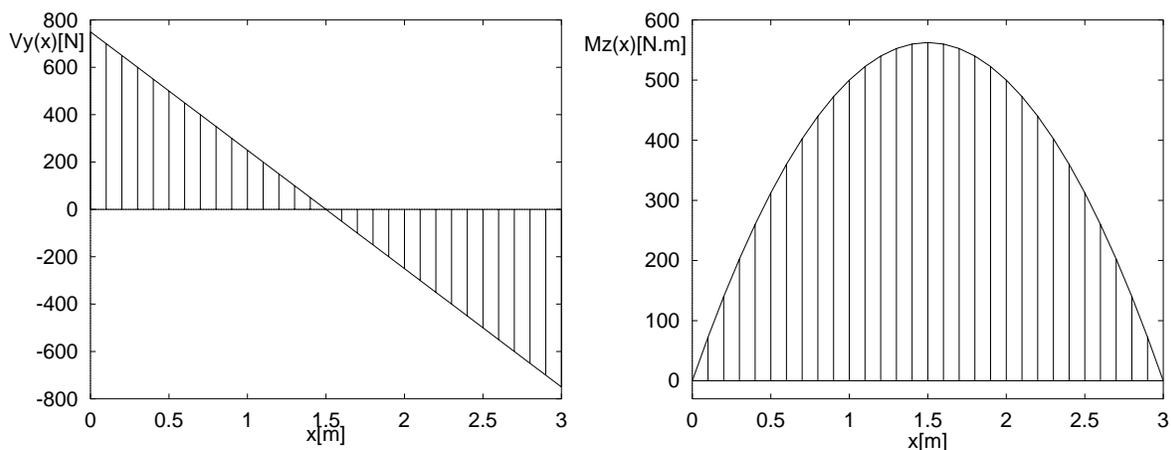
$$M_z(x=3) = -250(3)^2 + C_1(3) + 0 = 0 \rightarrow C_1 = 750$$

5. Equações finais:

- força cortante: $V_y = -500x + 750$
- momento fletor: $M_z = -250x^2 + 750x$

6. Diagramas

$$\begin{array}{ll} V_y(x=0) = 750N & M_z(x=0) = 0 \\ V_y(x=3) = -750N & M_z(x=3) = 0 \\ V_y(x=1,5) = 0 & M_z(x=1,5) = 562,5 Nm \end{array}$$



Exemplo 6.2 Traçar os diagramas da força cortante e momento fletor para a viga ilustrada na Figura 6.14, através da integração da equação diferencial.

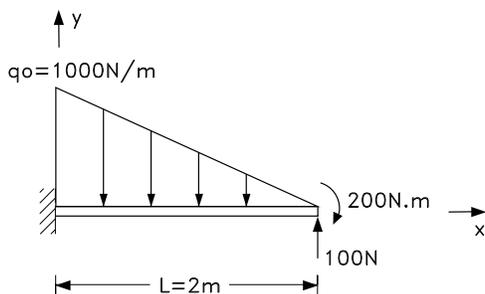


Figura 6.14: Equação diferencial: carga distribuída linear.

1. Equação do carregamento: $q(x) = -q_0(1 - \frac{x}{L}) = -500(2 - x)$

2. Condições de contorno: $x = 2 \rightarrow V_y = -100N$ $x = 2 \rightarrow M_z = -200N$

3. Integração da equação diferencial: $\frac{d^2M}{dx^2} = -500(2 - x)$

- 1ª integração (cortante): $V_y = \frac{dM_z}{dx} = -100x + 250x^2 + C_1$
- 2ª integração (momento fletor): $M_z = -500x^2 + \frac{250}{3}x^3 + C_1x + C_2$

4. Determinação das constantes de integração

$$V_y(x = 2) = -1000(2) + 250(4) + C_1 = -100 \rightarrow C_1 = 900$$

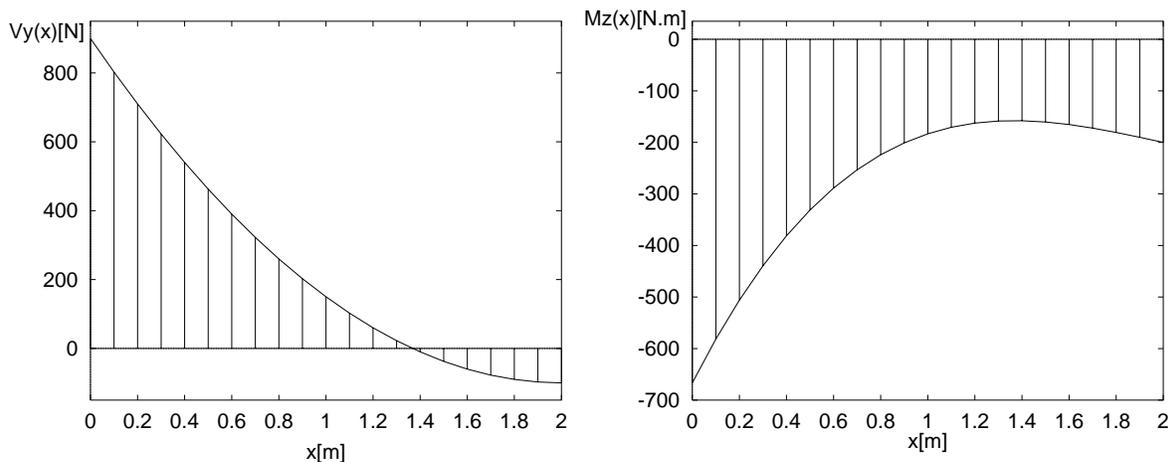
$$M_z(x = 2) = -500(4) + \frac{250}{3}(8) + 900(2) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{2000}{3}$$

5. Equações finais

- força cortante: $V_y = -1000x + 250x^2 + 900$
- momento fletor: $M_z = 500x^2 + \frac{250}{3}x^3 + 900x - \frac{2000}{3}$

6. Diagramas

$$\begin{array}{ll} V_y(x = 0) = 900N & M_z(x = 0) = -\frac{2000}{3} Nm \\ V_y(x = 2) = -100N & M_z(x = 2) = -200 Nm \\ V_y(x = 1) = 150N & M_z(x = 1) = -183,33 Nm \end{array}$$



Observa-se que devido a carga distribuída linear, os gráficos da cortante e do momento fletor variam de forma quadrática e cúbica, respectivamente.

Exemplo 6.3 Traçar os diagramas da força cortante e momento fletor para a viga ilustrada na Figura 6.15, através da integração da equação diferencial.

1. Equação do carregamento: $q(x) = -1000$
2. Condições de contorno: $x = 2 \rightarrow M_z = 500$
restrição adicional (rótula): $x = 1 \rightarrow M_z = 0$
3. Integração da equação diferencial: $\frac{d^2M}{dx^2} = -1000$
 - 1ª integração (cortante): $V_y = \frac{dM_z}{dx} = -1000x + C_1$

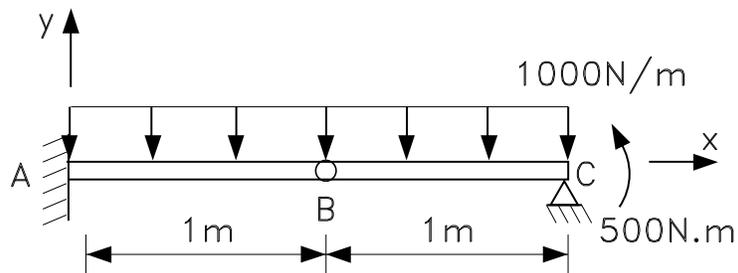


Figura 6.15: Equação diferencial: viga com rótula.

- 2ª integração (momento fletor): $M_z = -500x^2 + C_1x + C_2$

4. Determinação das constantes de integração

$$M_z(x=2) = -500 \cdot 4 + C_1 \cdot 2 + C_2 = 500 \rightarrow 2C_1 + C_2 = 2500$$

$$M_z(x=1) = -500 + C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 500$$

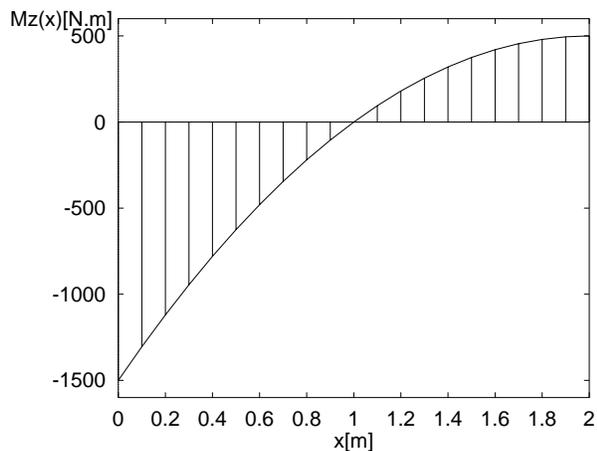
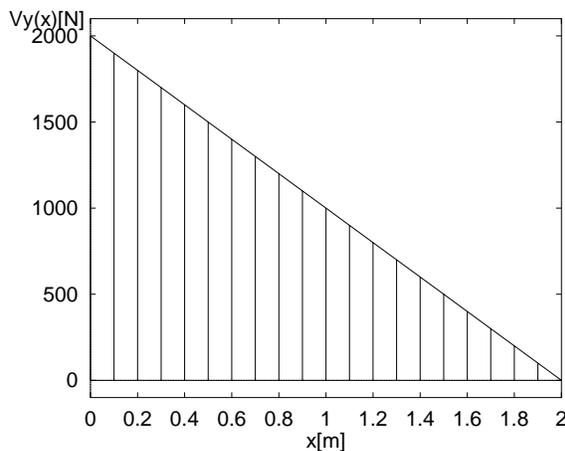
Reolvendo o sistema definido pelas duas equações anteriores, determinam-se $C_1 = 2000$ e $C_2 = -1500$.

5. Equações finais:

- força cortante: $V_y = -1000x + 2000$
- momento fletor: $M_z = -500x^2 + 2000x - 1500$

6. Diagramas

$$\begin{array}{ll} V_y(x=0) = 2000\text{N} & M_z(x=0) = 1500\text{ Nm} \\ V_y(x=1) = 1000\text{N} & M_z(x=1) = 0 \\ V_y(x=2) = 0 & M_z(x=2) = 500\text{ Nm} \end{array}$$



6.2.9 Exercícios resolvidos

Exercício 6.1 A viga bi-engastada mostrada na Figura 6.16 deverá ser construída com um material cuja tensão normal admissível de trabalho é no máximo $\bar{\sigma} = 200\text{N/mm}^2$. O material do qual a viga será construída possui um módulo de elasticidade longitudinal (Young) $E = 2,0 \times 10^6 \text{N/mm}^2$. A viga deve suportar uma carga uniformemente distribuída $q_0 = 10.000\text{N/m}$ ao longo de um vão $L = 5\text{m}$. Outro dado de projeto é que a flecha máxima não deve ultrapassar $v_{max} = L/1000$. Por razões construtivas a seção transversal de viga deverá ser um retângulo com dimensões $B \times 3B$, tal como mostrado. Para esta viga solicita-se: a) as equações e os diagramas de esforço cortante, momento fletor, deflexão angular (rotação) e deflexão linear (flecha), b) as reações de apoio, c) a dimensão mínima B para que os requisitos de tensão e deslocamento máximo sejam respeitados.

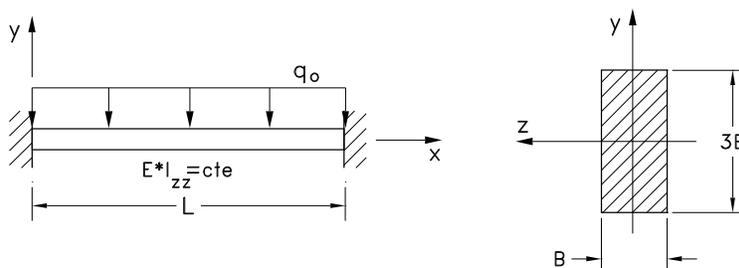


Figura 6.16: Viga bi-engastada.

1. Equação do carregamento: $q(x) = -q_0$

2. Condições de contorno

$$v(x=0) = 0 \quad v(x=L) = 0$$

$$\theta_z(x=0) = 0 \quad \theta_z(x=L) = 0$$

3. Integração da equação diferencial: $EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = -q_0$

• 1ª integração: força cortante

$$EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} = V_y(x) = -q_0 x + C_1$$

• 2ª integração: momento fletor

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = M_z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

• 3ª integração: rotação

$$\theta_z(x) = -q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

• 4ª integração: deslocamento transversal

$$EI_z v(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

4. Determinação das constantes de integração

$$EI_z v(0) = -q_0 \frac{(0)^4}{24} + C_1 \frac{(0)^3}{6} + C_2 \frac{(0)^2}{2} + C_3(0) + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$\theta_z(0) = -q_0 \frac{(0)^3}{6} + C_1 \frac{(0)^2}{2} + C_2(0) + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$EI_z v(L) = -q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + C_3 L + C_4 = 0 \rightarrow -q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} = 0$$

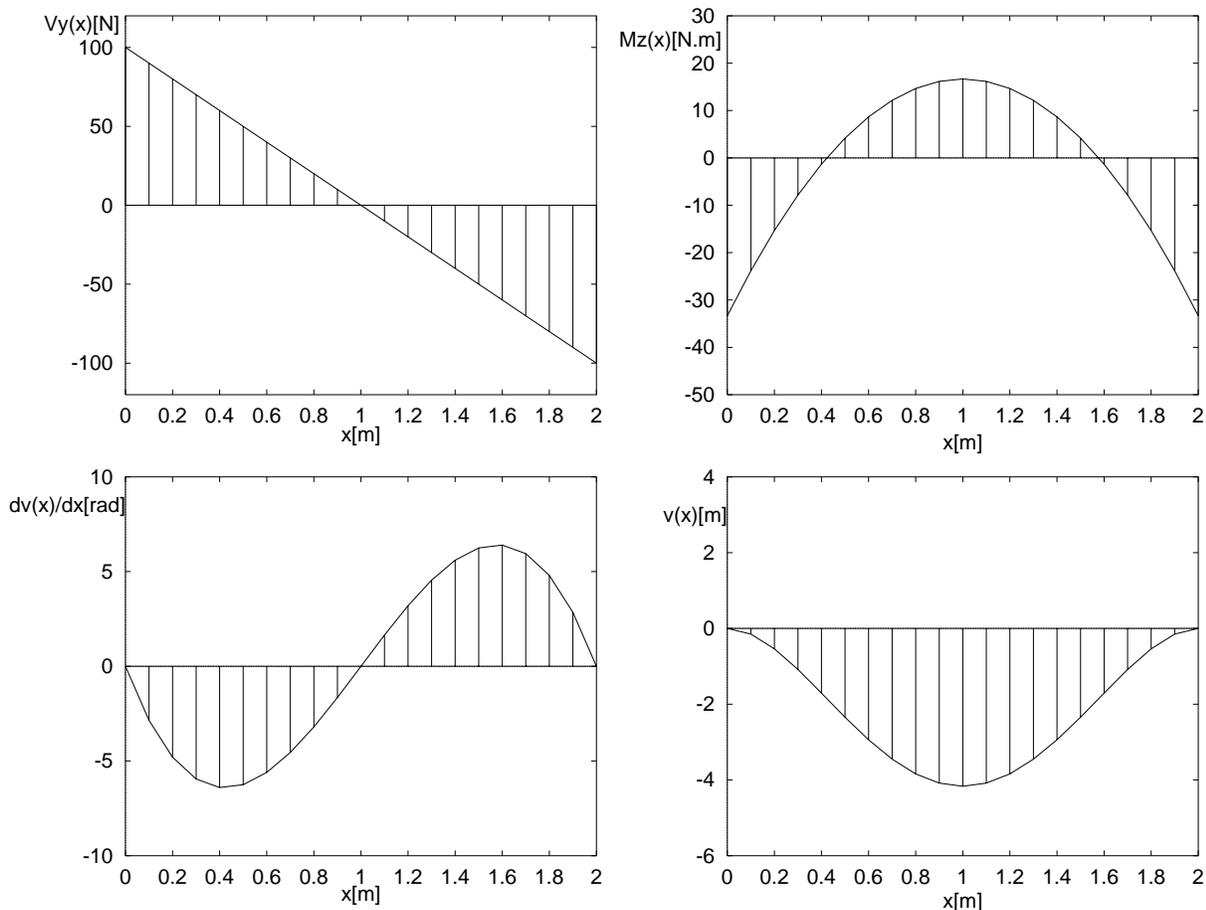
$$\theta_z(L) = -q_0 \frac{L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L + C_3 = 0 \rightarrow -q_0 \frac{L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L = 0$$

Resolvendo o sistema constituído das duas equações anteriores, tem-se $C_1 = q_0 \frac{L}{2}$ e $C_2 = q_0 \frac{L^2}{12}$.

5. Equações finais

- força cortante: $V_y(x) = -q_0x + q_0\frac{L}{2}$
- momento fletor: $M_z(x) = -q_0\frac{x^2}{2} + q_0L\frac{x}{2} - q_0\frac{L^2}{12}$
- rotação: $EI_z\theta_z(x) = -q_0\frac{x^3}{6} + q_0L\frac{x^2}{4} - q_0L^2\frac{x}{12}$
- deslocamento: $EI_zv(x) = -q_0\frac{x^4}{24} + q_0L\frac{x^3}{12} - q_0L^2\frac{x^2}{24}$

6. Diagramas da força cortante, momento fletor, rotação e deflexão



7. Reações nos apoios

Forças: $R_{Ay} = V_y(x=0) = 25000N$

$R_{By} = V_y(x=L) = 25000N$

Momentos: $M_{Az} = M_z(x=0) = -20833,4Nm$

$M_{Bz} = M_z(x=L) = -20833,4Nm$

8. Dimensionamento

- Dimensionamento à tensão

O módulo de resistência da seção é dado por $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$. Por sua vez, $I_z = \frac{BH^3}{12} = \frac{B(3B)^3}{12} = \frac{9}{4}B^4$ e $y_{\max} = \frac{3}{2}B$. Logo, $W_z = \frac{3}{2}B^3$. No dimensionamento da seção, considera-se o módulo do momento fletor máximo. Logo,

$$\bar{\sigma} = \frac{M_{z\max}}{W_z} = \frac{M_{z\max}}{\frac{3}{2}B^3} \rightarrow B = \left(\frac{2M_{z\max}}{3\sigma_{zz\max}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{(2)(20833,4)(10^3)}{(3)(200)} \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow B = 41,1mm$$

- Dimensionamento à flecha máxima

Do diagrama, tem-se que a flecha máxima ocorre em $x = \frac{L}{2}$. O valor da deflexão linear máxima é dado por,

$$EI_z v(x = \frac{L}{2}) = -q_0 \frac{(\frac{L}{2})^4}{24} + q_0 L \frac{(\frac{L}{2})^3}{12} - q_0 L^2 \frac{(\frac{L}{2})^2}{24} = -q_0 \frac{L^4}{384} \rightarrow v_{\max} = -q_0 \frac{L^4}{384EI_z}$$

Igualando o módulo deste resultado com a expressão da flecha máxima admissível, tem-se,

$$\frac{L}{1000} = q_0 \frac{L^4}{384EI_z} \rightarrow I_z = 1000q_0 \frac{L^3}{384E}$$

Substituindo a expressão para I_z em função de B , obtém-se,

$$I_z = \frac{9}{4}B^4 = 1000q_0 \frac{L^3}{384E} \rightarrow B = 29,16\text{mm}$$

Desta maneira, observa-se que, para este caso, deve-se tomar o valor da altura da seção dado pelo dimensionamento à tensão, ou seja, $B = 41,1\text{mm}$.

Exercício 6.2 Considere a viga hiperestática mostrada na Figura 6.17 constituída de duas seções transversais indicada por $E_1 I_{z1}$ e $E_2 I_{z2}$. Pede-se determinar as equações de cada trecho, bem como as equações de equilíbrio e compatibilidade cinemática possibilitando resolver o problema. Indique os números de equações e de incógnitas explicitamente.

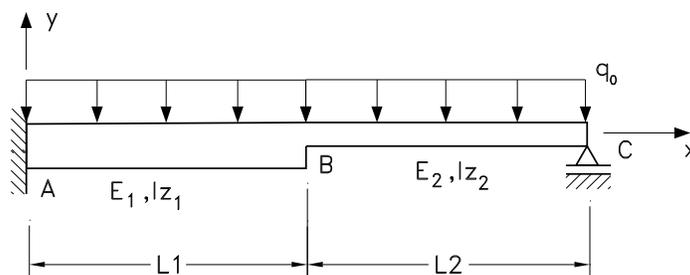


Figura 6.17: Viga constituída de dois trechos distintos

Para a solução deste problema, considera-se a os trechos AB e BC da viga, assim como o equilíbrio da interface entre os dois trechos, como ilustrado respectivamente nas Figuras 6.18a), c) e b).

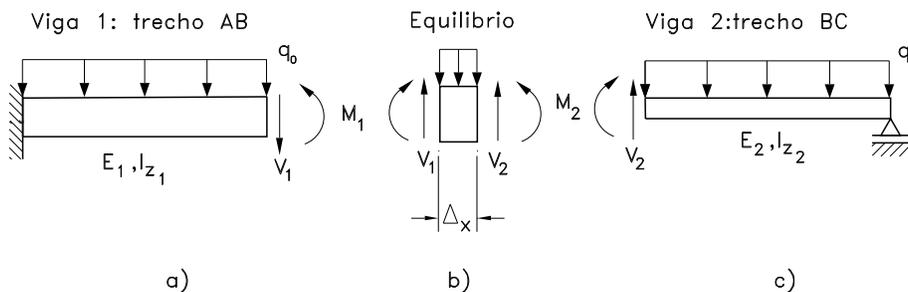


Figura 6.18: Viga da questão 2: a) trecho AB; b) equilíbrio entre os dois trechos; c) trecho BC.

Viga 1 (trecho AB) : neste caso tem-se como incógnitas as constantes de integração C_1, C_2, C_3, C_4 , assim como os esforços cortante V_1 e momento fletor M_1 na interface dos dois trechos.

- Condições de contorno

$$\begin{aligned} v_1(x=0) &= 0 & \theta_{1z}(x=0) &= 0 \\ V_{1y}(x=L_1) &= V_1 & M_z(x=L_1) &= M_1 \end{aligned}$$

- Integração da equação diferencial: $E_1 I_{z1} \frac{d^4 v_1}{dx^4} = q(x) = -q_0$

$$E_1 I_{z1} \frac{d^3 v_1}{dx^3} = V_{1y} = -q_0 x + C_1$$

$$E_1 I_{z1} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = M_{1z} = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$E_1 I_{z1} \frac{dv_1}{dx} = -q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$E_1 I_{z1} v_1 = -q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Substituindo as condições de contorno nas expressões anteriores, determinam-se 4 equações.

Viga 2 (trecho BC) : neste caso tem-se como incógnitas as constantes de integração D_1, D_2, D_3, D_4 , assim como os esforços cortante V_2 e momento fletor M_2 na interface dos dois trechos.

- Condições de contorno

$$\begin{aligned} V_{2y}(x=L_1) &= V_2 & M_z(x=L_1) &= M_2 \\ v_2(x=L_1+L_2) &= 0 & M_z(x=L_1+L_2) &= M_1 \end{aligned}$$

- Integração da equação diferencial: $E_2 I_{z2} \frac{d^4 v_2}{dx^4} = -q_0 < x - L_1 >^0$

$$V_{2y} = E_2 I_{z2} \frac{d^3 v_2}{dx^3} = -q_0 < x - L_1 >^1 + D_1$$

$$M_{2z} = E_2 I_{z2} \frac{d^2 v_2}{dx^2} = -q_0 < x - L_1 >^2 + D_1 x + D_2$$

$$E_2 I_{z2} \frac{dv_2}{dx} = -\frac{q_0}{6} < x - L_1 >^3 + D_1 \frac{x^2}{2} + D_2 x + D_3$$

$$E_2 I_{z2} v_2 = -\frac{q_0}{24} < x - L_1 >^4 + D_1 \frac{x^3}{6} + D_2 \frac{x^2}{2} + D_3 x + D_4$$

Substituindo as condições de contorno nas expressões anteriores, determinam-se mais 4 equações.

Equilíbrio : considera-se o equilíbrio dos esforços presentes na interface dos dois trechos, como mostrado na Figura 6.18b). As condições de equilíbrio são as seguintes:

1. $\sum F_y = 0 : V_1 + V_2 - q_0 \Delta x = 0 \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} V_1 + V_2 = 0 \rightarrow V_1 = -V_2$
2. $\sum M_{z4} = 0 : -M_1 - V_1 \Delta x + q_0 \frac{\Delta x^2}{2} + M_2 = 0 \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -M_1 + M_2 = 0 \rightarrow M_1 = M_2$

O equilíbrio fornece duas equações adicionais relacionando os esforços na interface dos dois trechos.

Compatibilidade cinemática : tem-se que os deslocamentos v_1, v_2 e rotações θ_{1z}, θ_{2z} na interface dos dois trechos devem ser iguais. Logo,

$$\begin{aligned}v_1(L_1) &= v_2(L_1) \\ \theta_{1z}(L_1) &= \theta_{2z}(L_1)\end{aligned}$$

chegando-se a mais duas equações.

Solução : a partir do desenvolvimento anterior tem-se 12 incógnitas, ou seja, as constantes do trecho AB (C_1, C_2, C_3, C_4), do trecho BC (D_1, D_2, D_3, D_4) e os esforços na interface (V_1, V_2, M_1, M_2). Da mesma maneira, tem-se 12 equações a partir da integração das expressões dos trechos AB e BC, assim como do equilíbrio e das condições de compatibilidade da interface dos trechos AB e BC.

Exercício 6.3 A Figura 6.19 ilustra duas vigas hiperestáticas engastadas nas extremidades submetida a uma carga distribuída q_0 . Deseja-se comparar a rotação na metade da viga para os casos com e sem rótula.

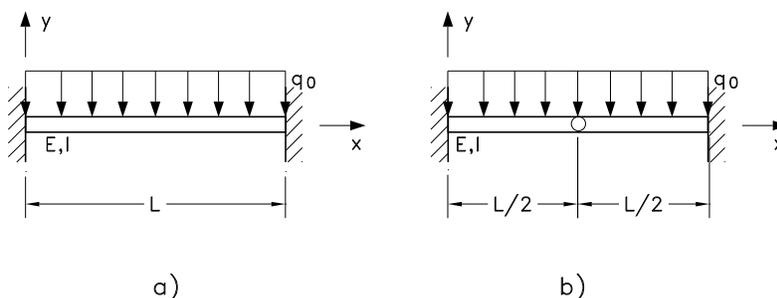


Figura 6.19: Vigas a) sem rótula; b) com rótula.

sem rótula : considera-se neste caso a viga da Figura 6.19a), tomando-se apenas o trecho $0 < x < L/2$.

- Equação do carregamento: $q(x) = -q_0 < x - 0 >^0$
- Condições de contorno

$$\begin{aligned}v(x=0) &= 0 & V_y(x=L/2) &= 0 \\ \frac{dv}{dx}(x=0) &= 0 & M_z(x=L/2) &= 0\end{aligned}$$
- Integração da equação diferencial: $EI_z \frac{d^4v}{dx^4} = -q_0 < x - 0 >^1 + C_1$
 - 1ª integração: força cortante

$$EI_z \frac{d^3v}{dx^3} = V_y = -q_0$$
 - 2ª integração: momento fletor

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = M_z = -\frac{q_0}{2} < x - 0 >^2 + C_1x + C_2$$
 - 3ª integração: rotação

$$EI_z \frac{dv}{dx} = -\frac{q_0}{6} < x - 0 >^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$
 - 4ª integração: deslocamento transversal

$$EI_z v = -\frac{q_0}{24} < x - 0 >^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

4. Determinação das constantes de integração

$$EI_z v(0) = -\frac{q_0}{24}(0) + \frac{C_1}{6}(0) + \frac{C_2}{2}(0) + C_3 + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$EI_z \frac{dv(0)}{dx} = -\frac{q_0}{6}(0) + \frac{C_1}{2} + C_2(0) + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$V_y\left(\frac{L}{2}\right) = -q_0\left(\frac{L}{2}\right) + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = q_0\frac{L}{2}$$

$$M_z\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{q_0}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{q_0 L}{2}\left(\frac{L}{2}\right) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -q_0\frac{L^2}{8}$$

5. Equações finais:

- força cortante: $V_y = -q_0 \langle x - 0 \rangle^1 + q_0\frac{L}{2} = -q_0\left(x - \frac{L}{2}\right)$

- momento fletor: $M_z = -q_0\frac{x^2}{2} + q_0\frac{L}{2}x - q_0\frac{L^2}{8}$

- rotação: $EI_z \theta_z(x) = EI_z \frac{dv}{dx} = -q_0\frac{x^3}{6} + q_0\frac{Lx^2}{4} - q_0\frac{L^2x}{8}$

- deslocamento: $EI_z v = -q_0\frac{x^4}{24} + q_0\frac{Lx^3}{12} - q_0\frac{L^2x^2}{16}$

6. Rotação em $x = \frac{L}{2}$

$$EI_z \theta_1(x) = EI_z \frac{dv(x=\frac{L}{2})}{dx} = -q_0\frac{1}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + q_0\frac{L}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - q_0\frac{L^2}{8}\left(\frac{L}{2}\right)$$

Logo,

$$\theta_1(x) = -\frac{q_0 L^3}{48 EI_z}$$

Tomando-se o trecho $L/2 < x < L$, a rotação será a mesma, mas com sinal trocado, ou seja $\theta_2(x) = \frac{q_0 L^3}{48 EI_z}$, de tal forma que a rotação total em $x = L/2$ seja nula.

com rótula : considera-se neste caso a viga da Figura 6.19b). A rótula induz a uma descontinuidade de rotação $\Delta\theta$ em $x = L/2$. Esta descontinuidade deve ser incluída na equação do carregamento através de um termo de singularidade com um expoente igual -3 . Deve-se multiplicar este termo por EI_z para ficar compatível com a equação da rotação a ser obtida pela terceira integral da equação diferencial da viga. Observa-se que $\Delta\theta$ constitui-se numa incógnita a ser obtida impondo-se a condição de restrição que o momento fletor na rótula é nulo, pois não há transmissão de momento entre os dois trechos separados pela rótula.

1. Equação do carregamento: $q(x) = -q_0 \langle x - 0 \rangle^0 + EI_z \Delta\theta \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-3}$

2. Condições de contorno

$$v(x=0) = v(x=L) = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(x=0) = \frac{dv}{dx}(x=L) = 0$$

3. Restrição adicional: $M_z(x = \frac{L}{2}) = 0$

4. Integração da equação diferencial:

• 1ª integração: força cortante

$$EI_z \frac{d^3v}{dx^3} = V_y = -q_0 \langle x - 0 \rangle^1 + EI_z \Delta\theta \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-2} + C_1$$

• 2ª integração: momento fletor

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = M_z = -\frac{q_0}{2} \langle x - 0 \rangle^2 + EI_z \Delta\theta \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-1} + C_1 x + C_2$$

• 3ª integração: rotação

$$EI_z \frac{dv}{dx} = -\frac{q_0}{6} \langle x - 0 \rangle^3 + EI_z \Delta\theta \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

• 4ª integração: deslocamento transversal

$$EI_z v = -\frac{q_0}{24} \langle x - 0 \rangle^4 + EI_z \Delta\theta \langle x - \frac{L}{2} \rangle^1 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

5. Determinação das constantes de integração

$$EI_z v(0) = -\frac{q_0}{24}(0) + \frac{C_1}{6}(0) + \frac{C_2}{2}(0) + C_3 + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$EI_z \frac{dv(0)}{dx} = -\frac{q_0}{6}(0) + \frac{C_1}{2}(0) + C_2(0) + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$EI_z \frac{dv(L)}{dx} = -\frac{q_0 L^3}{6} + EI_z \Delta\theta + \frac{C_1 L^2}{2} + C_2 L = 0$$

$$EI_z v(L) = -\frac{q_0 L^4}{24} + EI_z \Delta\theta \frac{L}{2} + \frac{C_1 L^3}{6} + \frac{C_2 L^2}{2} = 0$$

$$M_z\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{q_0}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1\left(\frac{L}{2}\right) + C_2 = 0$$

As 3 últimas equações anteriores podem ser reescritas como um sistema de equações da seguinte maneira,

$$\begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} & L & EI_z \\ \frac{L^3}{6} & \frac{L^2}{2} & EI_z \\ \frac{L}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ EI_z \Delta\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_0 L^3}{6} \\ \frac{q_0 L^4}{24} \\ \frac{q_0 L^2}{8} \end{Bmatrix}$$

A solução deste sistema fornece as constantes C_1 e C_2 , assim como a descontinuidade de rotação $\Delta\theta$.

$$C_1 = \frac{q_0 L}{2} \quad C_2 = -\frac{q_0 L^2}{8} \quad \Delta\theta = \frac{q_0 L^3}{24 EI_z}$$

Observa-se que $\Delta\theta$ é igual a duas vezes a rotação obtida para a viga sem rótula em $x = L/2$, mostrando que a rotação é descontínua nesta seção. A Figura 6.20 ilustra as rotações θ_1 e θ_2 , assim como a descontinuidade $\Delta\theta$.

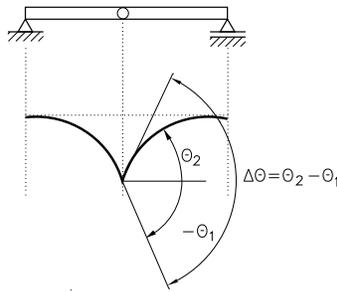


Figura 6.20: Rotações θ_1 e θ_2 ; descontinuidade $\Delta\theta$.

Exercício 6.4 As Figuras 6.21a) e b) ilustram uma passarela de pedestres construída por partes pré-moldadas unidas através de apoios constituindo uma rótula (Figura 6.21c)). Na Figura 6.21d) mostra a forma como a passarela está apoiada na rampa através de uma coluna. Deseja-se comparar o comportamento em termos da cortante, momento fletor, rotação e deflexão para os modelos sem e com rótula como mostrados na Figura 6.22.

sem rótula : considera-se neste caso a viga da Figura 6.22a),

- Equação de carregamento: $q(x) = -q_0 + R_{By} \langle x - L_1 \rangle^{-1} + R_{Cy} \langle x - L_2 \rangle^{-1}$

- Condições de contorno

$$v(x=0) = v(x=L_3) = 0$$

$$M_z(x=0) = M_z(x=L_3) = 0$$

- Restrições adicionais

$$v(x=L_1) = v(x=L_2) = 0$$

- Integração da equação diferencial

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = -q_0 + R_{By} \langle x - L_1 \rangle^{-1} + R_{Cy} \langle x - L_2 \rangle^{-1}$$



Figura 6.21: Passarela de pedestres: a) e b) vista geral; c) detalhe da rótula; d) apoio na rampa.

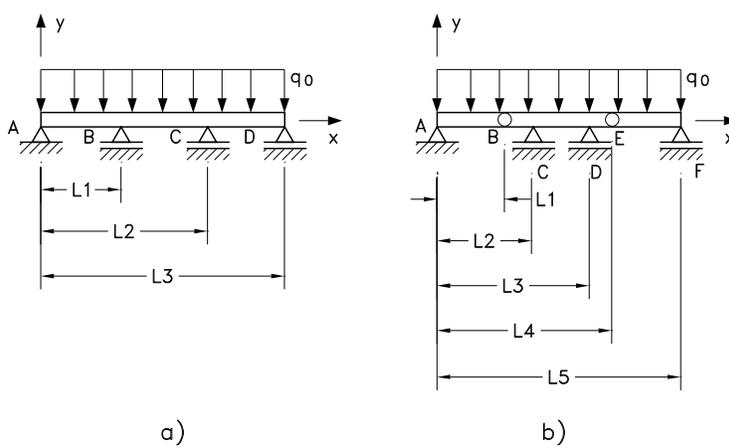


Figura 6.22: Modelos para a passarela: a) sem rótula; b) com rótula.

- 1ª integração: força cortante

$$V_y(x) = -q_0x + R_{By} \langle x - L_1 \rangle^0 + R_{Cy} \langle x - L_2 \rangle^0 + C_1$$

- 2ª integração: momento fletor

$$M_z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + R_{By} \langle x - L_1 \rangle^1 + R_{Cy} \langle x - L_2 \rangle^1 + C_1x + C_2$$

- 3ª integração: rotação

$$EI_z \Delta\theta(x) = -q_0 \frac{x^3}{6} + \frac{R_{By}}{2} \langle x - L_1 \rangle^2 + \frac{R_{Cy}}{2} \langle x - L_2 \rangle^2 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

- 4ª integração: deslocamento transversal

$$EI_z v(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + \frac{R_{By}}{6} \langle x - L_1 \rangle^3 + \frac{R_{Cy}}{6} \langle x - L_2 \rangle^3 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$$

5. Determinação das constantes de integração

- extremidades da viga (condições em termos de deslocamentos):

$$EI_z v(0) = -q_0 \frac{(0)^4}{24} + \frac{R_{By}(0)}{6} + \frac{R_{Cy}(0)}{6} + C_1(0) + C_2(0) + C_3(0) + C_4 = 0$$

$$EI_z v(L_3) = -q_0 \frac{(L_3)^4}{24} + \frac{R_{By}}{6} (L_3 - L_1)^3 + \frac{R_{Cy}}{6} (L_3 - L_2)^3 + C_1 \frac{(L_3)^3}{6} + C_2 \frac{(L_3)^2}{2} + C_3(L_3) + C_4 = 0$$

- extremidades da viga (condições em termos de momentos):

$$M_z(0) = -q_0 \frac{(0)^2}{2} + R_{By}(0) + R_{Cy}(0) + C_1(0) + C_2 = 0$$

$$M_z(L_3) = -q_0 \frac{(L_3)^2}{2} + R_{By}(L_3 - L_1)^1 + R_{Cy}(L_3 - L_2)^1 + C_1(L_3) + C_2 = 0$$

- após intermediários da viga (restrições adicionais):

$$EI_z v(L_1) = -q_0 \frac{(L_1)^4}{24} + \frac{R_{By}}{6} (L_1 - L_1)^3 + \frac{R_{Cy}}{6} (L_1 - L_2)^3 + C_1 \frac{(L_1)^3}{6} + C_2 \frac{(L_1)^2}{2} + C_3(L_1) + C_4 = 0$$

$$EI_z v(L_2) = -q_0 \frac{(L_2)^4}{24} + \frac{R_{By}}{6} (L_2 - L_1)^3 + \frac{R_{Cy}}{6} (L_2 - L_2)^3 + C_1 \frac{(L_2)^3}{6} + C_2 \frac{(L_2)^2}{2} + C_3(L_2) + C_4 = 0$$

Tomando $q_0 = 1000\text{N/m}$, $l_1 = 2\text{m}$, $l_2 = 3,0\text{m}$, $l_3 = 5,0\text{m}$ e resolvendo o sistema formando pelas equações anteriores, obtém-se as constantes C_1 a C_4 , assim como as reações de apoio R_{By} e R_{Cy} . A partir daí, tem-se as equações finais para a cortante, momento fletor, rotação e deflexão, estando os gráficos ilustrados na Figura 6.23. Os valores das reações de apoio são $R_{Ay} = R_{Dy} = 839,28\text{N}$ e $R_{By} = R_{Cy} = 1660,71\text{N}$. O ponto onde ocorre o máximo momento fletor é $x = 0,8392\text{m}$.

com rótula :

1. Equação de carregamento

$$q(x) = -q_0 + EI_z \Delta\theta_B \langle x - L_1 \rangle^{-3} + R_{Cy} \langle x - L_2 \rangle^{-1} + R_{Dy} \langle x - L_3 \rangle^{-1} + EI_z \Delta\theta_E \langle x - L_4 \rangle^{-3}$$

2. Condições de contorno

$$v(x=0) = v(x=L_5) = 0$$

$$M_z(x=0) = M_z(x=L_5) = 0$$

3. Restrições adicionais

$$v(x=L_2) = v(x=L_3) = 0$$

$$M_z(x=L_1) = M_z(x=L_4) = 0$$

4. Integração da equação diferencial

$$EI_z \frac{d^4v}{dx^4} = -q_0 + EI_z \Delta\theta_B \langle x - L_1 \rangle^{-3} + R_{Cy} \langle x - L_2 \rangle^{-1} + R_{Dy} \langle x - L_3 \rangle^{-1} + EI_z \Delta\theta_E \langle x - L_4 \rangle^{-3}$$

- 1ª integração: força cortante

$$V_y(x) = -q_0x + EI_z \Delta\theta_B \langle x - L_1 \rangle^{-2} + R_{Cy} \langle x - L_2 \rangle^0 + R_{Dy} \langle x - L_3 \rangle^0 + EI_z \Delta\theta_E \langle x - L_4 \rangle^{-2} + C_1$$

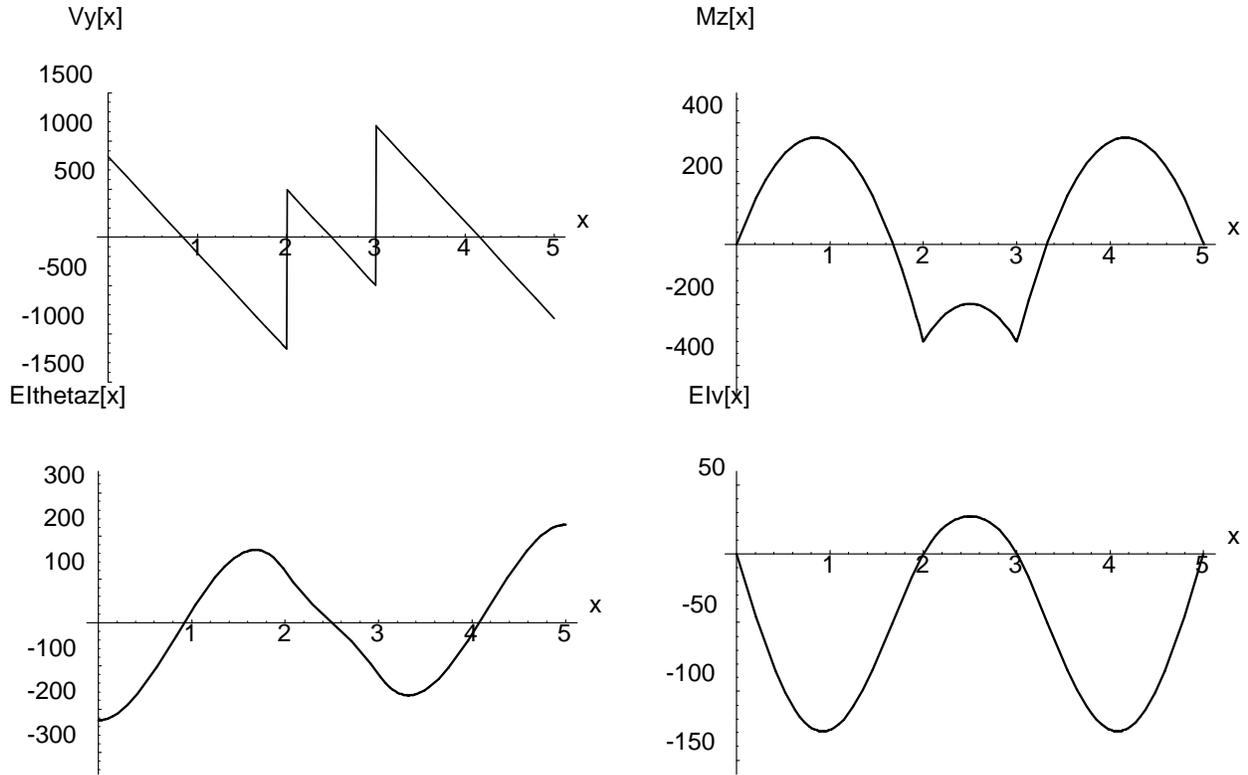


Figura 6.23: Passarela sem rótula: gráficos da cortante, momento fletor, rotação e deflexão.

- 2ª integração: momento fletor

$$M_z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + EI_z \Delta \theta_B \langle x - L_1 \rangle^{-1} + R_{Cy} \langle x - L_2 \rangle^1 + R_{Dy} \langle x - L_3 \rangle^1 + EI_z \Delta \theta_E \langle x - L_4 \rangle^{-1} + C_1 x + C_2$$

- 3ª integração: rotação

$$EI_z \frac{dv}{dx}(x) = -q_0 \frac{x^3}{6} + EI_z \Delta \theta_B \langle x - L_1 \rangle^0 + \frac{R_{Cy}}{2} \langle x - L_2 \rangle^2 + \frac{R_{Dy}}{2} \langle x - L_3 \rangle^2 + EI_z \Delta \theta_E \langle x - L_4 \rangle^0 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

- 4ª integração: deflexão

$$EI_z v(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + EI_z \Delta \theta_B \langle x - L_1 \rangle^1 + \frac{R_{Cy}}{6} \langle x - L_2 \rangle^3 + \frac{R_{Dy}}{6} \langle x - L_3 \rangle^3 + EI_z \Delta \theta_E \langle x - L_4 \rangle^1 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

5. Determinação das constantes de integração

- extremidades da viga (condições em termos de deslocamentos):

$$EI_z v(0) = -q_0 \frac{(0)^4}{24} + EI_z \Delta \theta_B (0) + \frac{R_{Cy}}{6} (0) + \frac{R_{Dy}}{6} (0) + EI_z \Delta \theta_E (0) + C_1 \frac{(0)^3}{6} + C_2 \frac{(0)^2}{2} + C_3 (0) + C_4 = 0$$

$$EI_z v(L_5) = -q_0 \frac{(L_5)^4}{24} + EI_z \Delta \theta_B (L_5 - L_1)^1 + \frac{R_{Cy}}{6} (L_5 - L_2)^3 + \frac{R_{Dy}}{6} (L_5 - L_3)^3 + EI_z \Delta \theta_E (L_5 - L_4)^1 + C_1 \frac{(L_5)^3}{6} + C_2 \frac{(L_5)^2}{2} + C_3 (L_5) + C_4 = 0$$

- extremidades da viga (condições em termos de momentos):

$$M_z(0) = -q_0 \frac{(0)^2}{2} + EI_z \Delta \theta_B (0) + R_{Cy} (0) + R_{Dy} (0) + EI_z \Delta \theta_E (0) + C_1 (0) + C_2 = 0$$

$$M_z(L_5) = -q_0 \frac{(L_5)^2}{2} + EI_z \Delta \theta_B (0)^{-1} + R_{Cy} (L_5 - L_2)^1 + R_{Dy} (L_5 - L_3)^1 + EI_z \Delta \theta_E (0)^{-1} + C_1 (L_5) + C_2 = 0$$

- rótulas (restrições adicionais):

$$M_z(L_1) = -q_0 \frac{(L_1)^2}{2} + EI_z \Delta \theta_B (0)^{-1} + R_{Cy} (L_1 - L_2)^1 + R_{Dy} (L_1 - L_3)^1 + EI_z \Delta \theta_E (0)^{-1} + C_1 (L_1) + C_2 = 0$$

$$M_z(L_4) = -q_0 \frac{(L_4)^2}{2} + EI_z \Delta\theta_B(0)^{-1} + R_{Cy}(L_4 - L_2)^1 + R_{Dy}(L_4 - L_3)^1 + EI_z \Delta\theta_E(0)^{-1} + C_1(L_4) + C_2 = 0$$

- *após intermediários da viga (restrições adicionais):*

$$EI_z v(L_2) = -q_0 \frac{(L_2)^4}{24} + EI_z \Delta\theta_B(L_2 - L_1)^1 + \frac{R_{Cy}}{6}(L_2 - L_2)^3 + \frac{R_{Dy}}{6}(0) + EI_z \Delta\theta_E(0) + C_1 \frac{(L_2)^3}{6} + C_2 \frac{(L_2)^2}{2} + C_3(L_2) + C_4 = 0$$

$$EI_z v(L_3) = -q_0 \frac{(L_3)^4}{24} + EI_z \Delta\theta_B(L_3 - L_1)^1 + \frac{R_{Cy}}{6}(L_3 - L_2)^3 + \frac{R_{Dy}}{6}(L_3 - L_3)^3 + EI_z \Delta\theta_E(0) + C_1 \frac{(L_3)^3}{6} + C_2 \frac{(L_3)^2}{2} + C_3(L_3) + C_4 = 0$$

Tomando $q_0 = 1000\text{N/m}$, $l_1 = 1,5\text{m}$, $l_2 = 2,0\text{m}$, $l_3 = 3,0\text{m}$, $l_4 = 3,5\text{m}$, $l_5 = 5,0\text{m}$ e resolvendo o sistema formado pelas equações anteriores, obtém-se as constantes C_1 a C_4 , as reações de apoio R_{By} e R_{Cy} , assim como as descontinuidades de rotação $EI_z \Delta_B$ e $EI_z \Delta_E$. A partir daí, tem-se as equações finais para a cortante, momento fletor, rotação e deflexão, estando os gráficos ilustrados na Figura 6.24. Os valores das reações de apoio são $R_{Ay} = R_{Dy} = 750,0\text{N}$ e $R_{By} = R_{Cy} = 1750,0\text{N}$, enquanto $EI_z \Delta_B = EI_z \Delta_E = 277,78$.

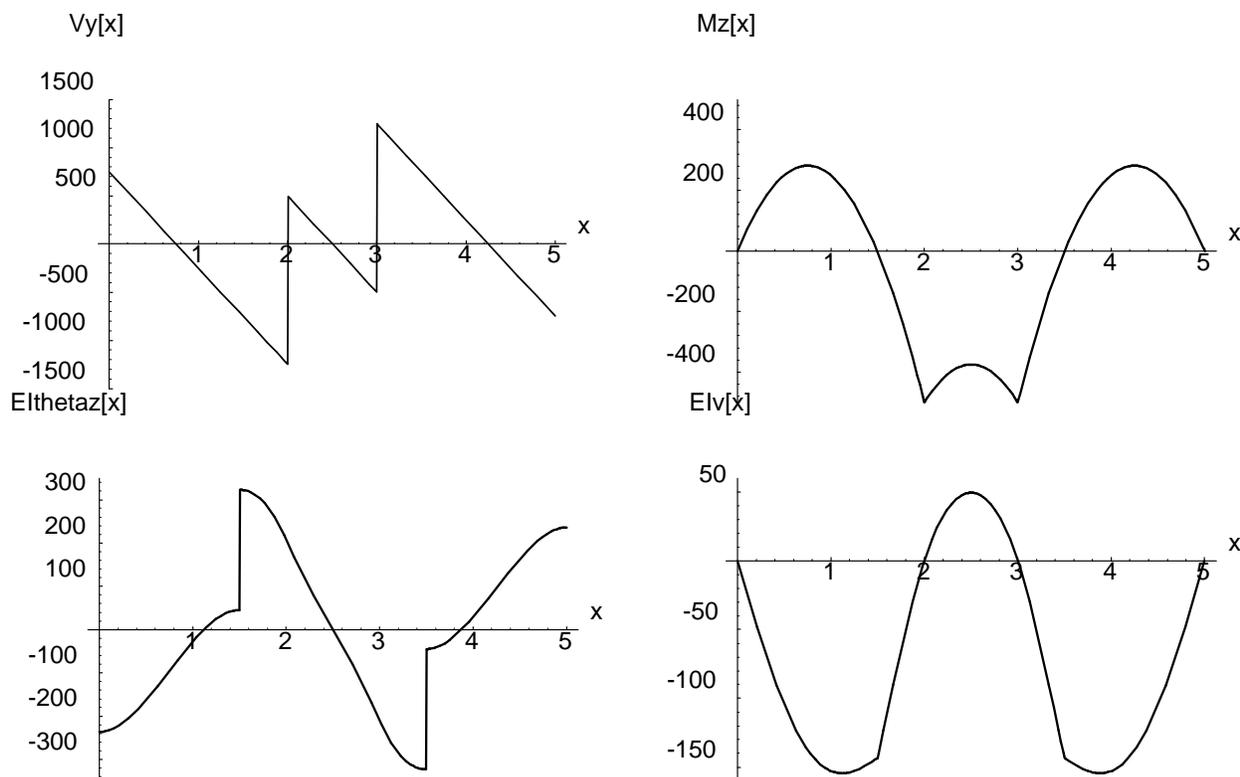


Figura 6.24: Passarela com rótula: gráficos da cortante, momento fletor, rotação e deflexão.

Comparando-se os gráficos das Figuras 6.23 e 6.24 verifica-se que as reações de apoio são semelhantes para os dois modelos. Já para o momento fletor, tem-se um crescimento dos valores no trecho entre as rótulas. Deve-se observar, como esperado, a descontinuidade das rotações nos pontos onde estão as rótulas. Finalmente, os deslocamentos transversais são mais pronunciados no modelo considerando as rótulas.

A partir do gráfico do momento fletor da Figura 6.23, conclui-se que as rótulas deveriam estar colocadas nos pontos de momento máximo, ou seja, $x = 0,8392\text{m}$ e $x = 4,1608\text{m}$. Refazendo o caso com a rótula nestas posições, tem-se os diagramas ilustrados na Figura 6.25. Observa-se o decréscimo nos

valores das reações nos apoios da viga. No entanto, o momento fletor e a deflexão crescem sensivelmente na região entre as rótulas e os apoios intermediários.

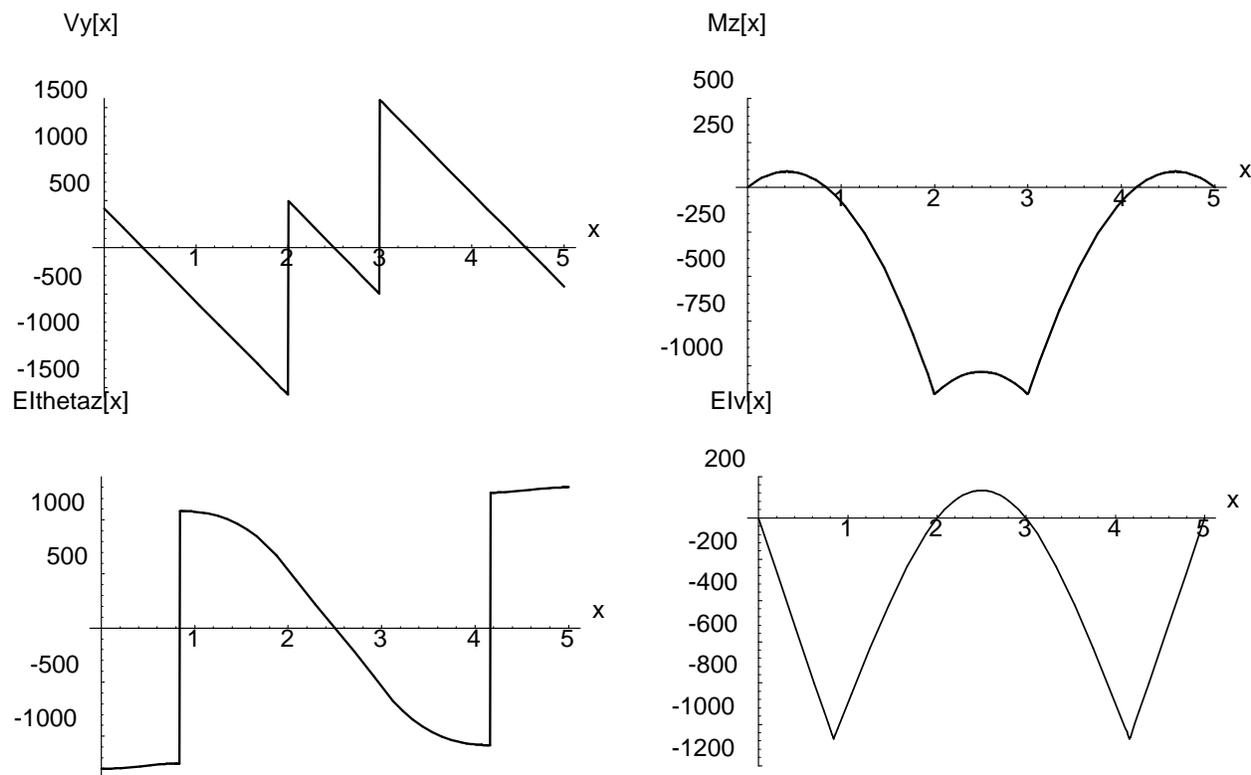


Figura 6.25: Passarela com rótula nos pontos de máximo momento: gráficos da cortante, momento fletor, rotação e deflexão.

6.3 Modelo de Timoshenko

O modelo de Euler-Bernoulli não considera o cisalhamento nas seções transversais durante a flexão da viga. Para vigas curtas, o efeito de cisalhamento é importante e emprega-se a viga de Timoshenko, cuja formulação será deduzida a seguir.

6.3.1 Definição da Cinemática

De forma análoga ao módulo de Euler-Bernoulli, as ações de movimento possíveis na viga de Timoshenko devem ser tais que as seções transversais permaneçam planas. No entanto, as seções têm uma deformação angular e não permanecem ortogonais ao eixo da viga. Estas hipóteses estão ilustradas na Figura 6.26 para a mesma viga da Figura 6.6.

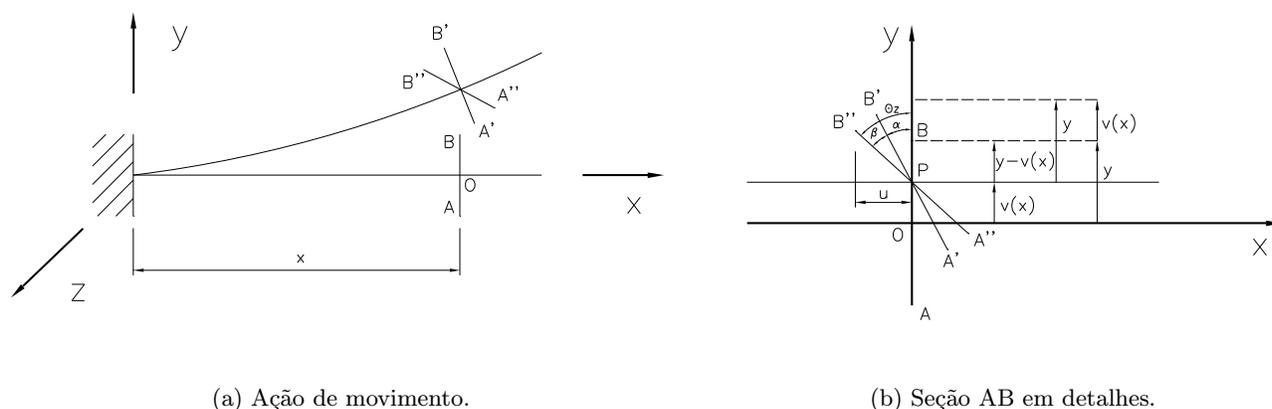


Figura 6.26: Cinemática da viga de Timoshenko.

De forma análoga ao modelo de Euler, a seção transversal AB sofre um deslocamento transversal rígido $v(x)$ e uma rotação rígida $\alpha(x)$ em torno do eixo z , atingindo a posição intermediária $A'B'$ mostrada na Figura 6.26(a). Mas como a viga de Timoshenko considera o cisalhamento, tem-se uma deformação $\beta(x)$, assumida constante na seção, fazendo com que a seção AB atinja a posição final $A''B''$.

Na verdade a distorção $\beta(x)$ não é constante na seção, ocorrendo um empenamento como ilustrado na Figura 6.27 para uma viga de seção retangular. Neste caso, a distorção máxima ocorre na linha neutra, sendo nula nas partes superior e inferior da seção. Na Figura 6.28(a), isola-se a extremidade da viga e toma-se um elemento infinitesimal, o qual após a distorção apresenta a forma ilustrada na Figura 6.28(a). Como a distorção varia na seção, os elementos da viga, como aqueles ilustrados na Figura 6.28(a), serão deformados de maneira distinta. Remontando estes elementos resulta numa seção que não é mais perpendicular a linha neutra, caracterizando o empenamento da seção como ilustrado na Figura 6.28(b).

O módulo de Timoshenko aqui desenvolvido considera que as seções permanecem ainda planas. Assim, assume-se que toda a seção transversal x sofre uma distorção constante $\beta(x)$. Posteriormente, incluem-se um fator de cisalhamento, de tal forma a corrigir a distorção no centróide da seção.

Assim, a cinemática deste modelo é análoga ao anterior, bastando incluir o efeito da distorção $\beta(x)$ no centróide da seção no cálculo do deslocamento axial $u(x)$. Logo, a partir da Figura 6.26(b), verifica-se que

$$\sin \theta_z = \frac{-u}{PB''}.$$

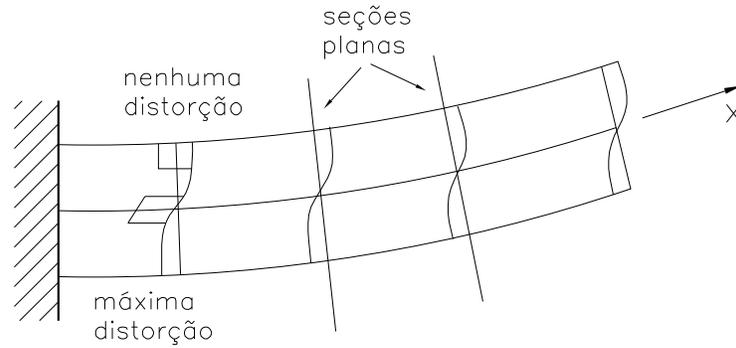


Figura 6.27: Empenamento de seção na viga de Timoshenko.

Observa-se que $PB'' = PB' = y$ pois a seção não apresenta variação de seu tamanho, ocorrendo apenas distorção. Logo

$$u(x) = -y \sin \theta_z(x).$$

Considerando pequenas deformações, $\theta_z(x)$ é pequeno e $\sin \theta_z(x) \approx \theta_z(x)$. Desta maneira, chega-se à expressão para o deslocamento axial $u(x)$, isto é,

$$u(x) = -y\theta_z(x) = -y[\alpha(x) + \beta(x)], \quad (6.46)$$

sendo $\theta_z(x)$ a rotação total da seção, $\alpha(x) = \frac{dv(x)}{dx}$ a rotação devido a flexão da viga e a distorção da seção devido ao cisalhamento $\beta(x)$.

Logo, a cinemática da viga de Timoshenko é descrita por um campo vetorial $\mathbf{u}(x)$ com as seguintes componentes

$$\mathbf{u}(x) = \begin{Bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y\theta_z(x) \\ v(x) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.47)$$

Assim, o conjunto das ações cinematicamente possíveis \mathcal{V} é descrito por

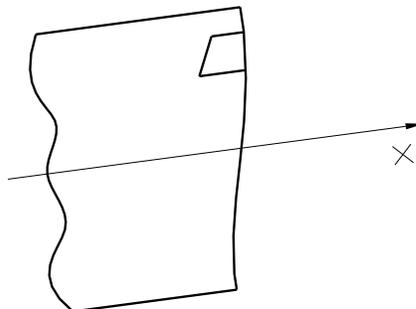
$$\mathcal{V} = \{ \{ \mathbf{u} \mid u_1 = u(x) = -y\theta_z(x), u_2(x) = v(x), u_3(x) = 0 \} \}. \quad (6.48)$$

6.3.2 Deformação

Ao contrário dos problemas anteriormente estudados, nos quais se tinham apenas componentes de deformação longitudinal ou transversal, no modelo de viga de Timoshenko tem-se ambas componentes longitudinal $\varepsilon_{xx}(x)$ e angular $\gamma_{xy}(x)$.

Para determinar $\varepsilon_{xx}(x)$, basta considerar novamente a Figura 6.6 e a variação específica $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ do deslocamento axial $u(x)$ da viga entre as seções AB e CD . Logo, de forma análoga à equação (6.7), a deformação específica $\varepsilon_{xx}(x)$ é obtida a partir de

$$\varepsilon_{xx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$



(a) Elemento infinitesimal.

(b) Empenamento na extremidade final.

Figura 6.28: Análise do empenamento na extremidade da viga.

Substituindo (6.46) vem que

$$\varepsilon_{xx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-y\theta_z(x + \Delta x) - (-y\theta_z(x))}{\Delta x} = -y \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\theta_z(x + \Delta x) - \theta_z(x)}{\Delta x}.$$

Empregando a definição de derivada, chega-se a expressão final para $\varepsilon_{xx}(x)$, ou seja,

$$\varepsilon_{xx}(x) = -y \frac{d\theta_z(x)}{dx}. \quad (6.49)$$

Para determinar a distorção ou deformação angular na seção x , considere o elemento infinitesimal de viga ilustrado na Figura 6.28(b) apresentado antes e depois da distorção na Figura 6.29. Da Figura 6.29, observa-se que

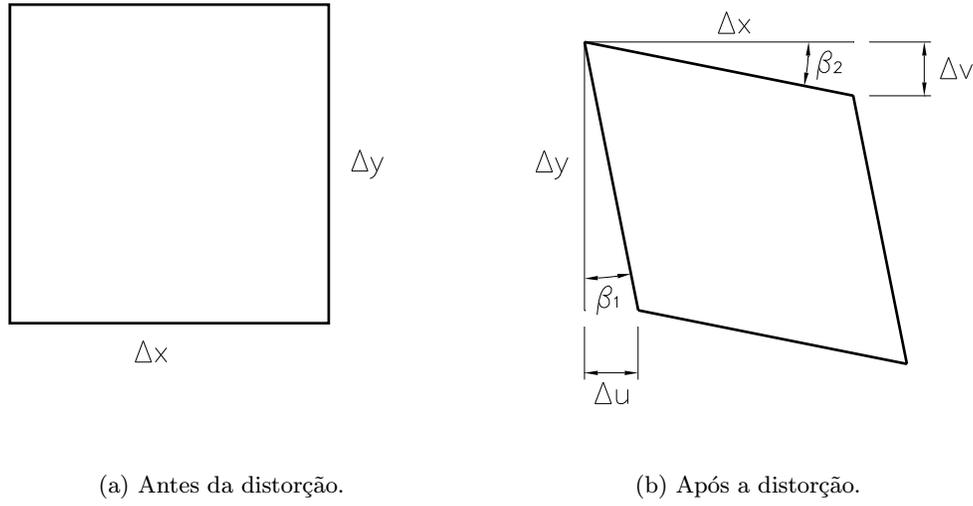
$$\tan \beta_1 = \frac{\Delta u}{\Delta y},$$

$$\tan \beta_2 = \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$, tem-se β_1 e β_2 pequenos e portanto $\tan \beta_1 \approx \beta_1$ e $\tan \beta_2 \approx \beta_2$. Logo, a partir das expressões anteriores

$$\beta_1(x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{du(x)}{dy}, \quad (6.50)$$

$$\beta_2(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv(x)}{dx}. \quad (6.51)$$



(a) Antes da distorção.

(b) Após a distorção.

Figura 6.29: Elemento de viga distorcido no plano xy .

A distorção total na seção x é dada pela soma de $\beta_1(x)$ e $\beta_2(x)$. Esta distorção é denotada por $\gamma_{xy}(x)$, indicando a deformação do plano x (ou seção x) na direção do eixo y . Logo

$$\gamma_{xy}(x) = \beta_1(x) + \beta_2(x) = \frac{du(x)}{dy} + \frac{dv(x)}{dx}. \quad (6.52)$$

Substituindo a cinemática dada em (6.47) vem que

$$\gamma_{xy}(x) = -\theta_z(x) + \frac{dv(x)}{dx}. \quad (6.53)$$

Neste caso, o operador de deformação D é indicado em forma matricial como

$$D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$$

$$\mathbf{u}(x) \rightarrow D\mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ \frac{1}{y} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -y\theta_z(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y \frac{d\theta_z(x)}{dx} \\ \theta_z(x) + \frac{dv(x)}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(x) \\ \gamma_{xy}(x) \end{Bmatrix}. \quad (6.54)$$

6.3.3 Movimentos Rígidos

No caso de movimentos rígidos, as componentes de deformação são nulas. Portanto

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x) &= -y \frac{d\theta_z(x)}{dx} = 0, \\ \gamma_{xy}(x) &= -\theta_z(x) + \frac{dv(x)}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Da primeira equação, tem-se que $\theta_z(x) = \theta_z$ é constante para toda seção x . Logo, um movimento rígido corresponde a uma rotação constante em torno do eixo z conforme ilustrado na Figura 6.6. Logo, o subconjunto das ações rígidas é dado por

$$\mathcal{N}(D) = \{\mathbf{u}(x) \in \mathcal{V} \mid \theta_z(x) = \theta_z = \text{cte}\}. \quad (6.55)$$

6.3.4 Potência Interna

Associadas às componentes de deformação específica $\varepsilon_{xx}(x)$ e angular $\gamma_{xy}(x)$, tem-se as componentes de tensão normal $\sigma_{xx}(x)$ e de cisalhamento $\tau_{xy}(x)$, as quais representam o estado das forças internas, respectivamente, nas direções x e y em cada ponto com coordenada x do modelo unidimensional de viga. De forma análoga ao modelo de Euler-Bernoulli, a expressão da potência interna é dada por

$$P_i = - \int_V [\sigma_{xx}(x)\varepsilon_{xx}(x) + \tau_{xy}(x)\gamma_{xy}(x)] dV. \quad (6.56)$$

Substituindo as componentes de deformação e decompondo a integral de volume ao longo da área A da seção e do comprimento L da viga vem que

$$P_i = - \int_0^L \left[\int_A -\sigma_{xx}(x)y dA \right] \frac{d\theta_z(x)}{dx} dx - \int_0^L \left[\int_A -\tau_{xy}(x)dA \right] \left(\theta_z(x) - \frac{dv(x)}{dx} \right) dx. \quad (6.57)$$

Os termos entre colchetes representam, respectivamente, o momento fletor $M_z(x)$ na direção do eixo z e a cortante $V_y(x)$ na direção de y , ou seja,

$$M_z(x) = - \int_A \sigma_{xx}(x)y dA, \quad (6.58)$$

$$V_y(x) = - \int_A \tau_{xy}(x)dA. \quad (6.59)$$

Desta maneira, a potência interna é expressa como

$$P_i = - \int_0^L M_z(x) \frac{d\theta_z(x)}{dx} dx + \int_0^L V_y(x) \frac{dv(x)}{dx} dx - \int_0^L V_y(x)\theta_z(x) dx. \quad (6.60)$$

Integrando por partes as duas primeiras integrais na expressão anterior, tem-se que

$$P_i = \int_0^L \frac{dM_z(x)}{dx} \theta_z(x) dx - M_z(x)\theta_z(x) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dV_y(x)}{dx} v(x) dx + V_y(x)v(x) \Big|_0^L - \int_0^L V_y(x)\theta_z(x) dx. \quad (6.61)$$

Remanejando as expressões anteriores, obtém-se

$$P_i = \int_0^L \left[\frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) \right] \theta_z(x) dx + \int_0^L \left[-\frac{dV_y(x)}{dx} \right] v(x) dx + [-M_z(L)\theta_z(L) + M_z(0)\theta_z(0)] + [V_y(L)v(L) - V_y(0)v(0)]. \quad (6.62)$$

Supondo que as forças e os comprimentos estejam expressos, respectivamente, em Newtons (N) e metro (m), os dois termos entre colchetes nas integrais da expressão anterior tem as seguintes unidades

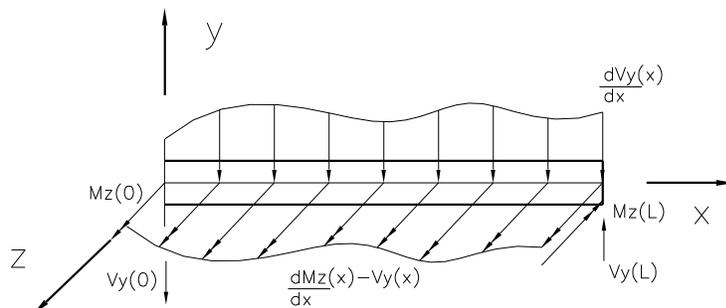
$$\left[\frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) \right] = \frac{Nm}{m} - N = \frac{Nm}{m} - \frac{Nm}{m} = \frac{Nm}{m},$$

$$\left[-\frac{dV_y(x)}{dx} \right] = \frac{N}{m}.$$

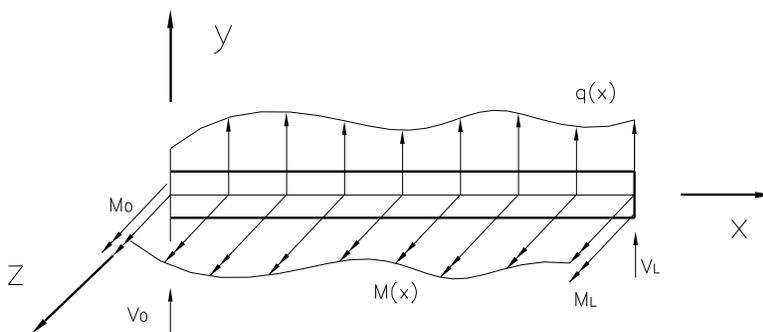
Assim, o primeiro termo representa uma densidade de momento fletor $M_z(x)$, na direção z , ou seja, tem-se um momento fletor $M_z(x)$ distribuído por unidade de comprimento da viga. Por sua vez, o segundo termo representa uma densidade de força transversal, ou seja, uma distribuição de força cortante $V_y(x)$

na direção de y por unidade de comprimento da viga. Estes são os esforços internos presentes ao longo do comprimento da viga. Além disso, tem-se os momentos fletores ($M_z(L)$ e $M_z(0)$) e forças cortantes ($V_y(L)$ e $V_y(0)$) concentradas nas extremidades da viga. Estes esforços internos estão ilustrados na Figura 6.30(a).

Portanto, o espaço \mathcal{W}' dos esforços internos é constituído por funções $V_y(x)$ e $M_z(x)$ representando, respectivamente, a força cortante e o momento fletor nas seções transversais da viga.



(a) Esforços internos.



(b) Esforços externos.

Figura 6.30: Esforços internos e externos no modelo de Timoshenko.

6.3.5 Aplicação do PPV

O PPV estabelece que se a viga está em equilíbrio na sua configuração deformada, então a soma das potências externa P_e e interna P_i para qualquer ação virtual $\hat{\mathbf{u}}(x) \in \mathcal{V}$ é nula. Logo

$$P_e + P_i = 0. \quad (6.63)$$

Substituindo a expressão (6.62) para a potência interna na equação anterior e sendo f o conjunto de esforços externos compatíveis com a cinemática definida para o modelo de viga de Timoshenko, pode-se denotar o PPV como

$$\begin{aligned} \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle + \int_0^L \left[\frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) \right] \hat{\theta}_z(x) dx + \int_0^L \left[-\frac{dV_y(x)}{dx} \right] \hat{v}(x) dx \\ + \left[-M_z(L)\hat{\theta}_z(L) + M_z(0)\hat{\theta}_z(0) \right] + [V_y(L)\hat{v}(L) - V_y(0)\hat{v}(0)]. \end{aligned} \quad (6.64)$$

6.3.6 Caracterização dos Esforços Externos

Para determinar a expressão da potência externa P_e , a qual permite caracterizar os esforços externos compatíveis com o modelo de viga de Timoshenko, basta analisar a equação (6.64) estabelecendo o PPV. Para cada termo correspondente a um esforço interno em (6.62), deve existir um esforço externo correspondente.

Logo, para equilibrar a parcela da potência interna relativa ao momento fletor distribuído $\frac{dM_z(x)}{dx} + V_y(x)$, deve existir uma densidade de momento fletor distribuído $m_z(x)$, de tal forma que a respectiva contribuição de potência externa $\int_0^L m_z(x)\hat{\theta}_z(x)dx$ equilibre o termo da potência interna $\int_0^L \left[\frac{dM_z(x)}{dx} + V_y(x) \right] \hat{\theta}_z(x)dx$ para a rotação virtual $\hat{\theta}_z(x)$. Analogamente, para equilibrar a parcela da potência interna $\int_0^L \left[-\frac{dV_y(x)}{dx} \right] \hat{v}(x)dx$ deve existir uma carga distribuída transversal $q(x)$, de tal forma que a potência externa $\int_0^L q(x)\hat{v}(x)dx$ equilibre o termo interno. Finalmente, momentos puros (M_0 e M_L) e forças transversais externas (V_0 e V_L) devem estar presentes nas extremidades $x = 0$ e $x = L$, de tal forma a equilibrar os momentos fletores e forças cortantes nos extremos da viga. Os esforços externos compatíveis com a cinemática da viga de Timoshenko estão ilustrados na Figura 6.30(b).

A partir daí, a potência externa é escrita P_e como

$$P_e = \int_0^L m_z(x)\hat{\theta}_z(x)dx + \int_0^L q(x)\hat{v}(x)dx + M_L\hat{\theta}_z(L) + M_0\hat{\theta}_z(0) + V_L\hat{v}(L) + V_0\hat{v}(0), \quad (6.65)$$

sendo $\hat{\theta}_z(x)$ e $\hat{v}(x)$, respectivamente, a rotação em z e o deslocamento transversal em y relativos à ação virtual $\hat{\mathbf{u}}(x) \in \mathcal{V}$.

Substituindo (??) no enunciado do PPV (6.64) e reagrupando os termos vem que

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) + m_z(x) \right] \hat{\theta}_z(x) dx + \int_0^L \left[-\frac{dV_y(x)}{dx} + q(x) \right] \hat{v}(x) dx \\ + [-M_z(L) + M_L] \hat{\theta}_z(L) + [M_z(0) + M_0] \hat{\theta}_z(0) \\ + [V_y(L) + V_L] \hat{v}(L) + [V_y(0) + V_0] \hat{v}(0) = 0. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Para que a expressão anterior seja válida para toda ação virtual arbitrária $\hat{\mathbf{u}}(x) \in \mathcal{V}$, todos os termos entre colchetes devem ser nulos, resultando na forma local ou no PVC da viga de Timoshenko, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) + m_z(x) = 0 & x \in (0, L) \\ \frac{dV_y(x)}{dx} - q(x) = 0 & x \in (0, L) \\ V_y(0) = V_0 & x = 0 \\ V_y(L) = -V_L & x = L \\ M_z(0) = -M_0 & x = 0 \\ M_z(L) = M_L & x = L \end{array} \right. \quad (6.67)$$

Logo, na viga de Timoshenko tem-se duas equações diferenciais, as quais estão acopladas através da força cortante $V_y(x)$. Pode-se obter uma única equação diferencial de equilíbrio. Para isto basta derivar a primeira equação e substituir o resultado na segunda, ou seja,

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x) - \frac{dm_z(x)}{dx}. \quad (6.68)$$

Supondo que o momento distribuído m_z é nulo, obtém-se a mesma equação diferencial de equilíbrio em termos do momento fletor do modelo de Euler-Bernoulli, isto é,

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x). \quad (6.69)$$

Além disso, recupera-se a definição da força cortante dada em (6.17) a partir da primeira equação, ou seja, $V_y(x) = \frac{dM_z(x)}{dx}$.

A partir de (6.67), define-se o operador diferencial de equilíbrio D^* entre os esforços internos e externos, o qual pode ser denotado como

$$D^* : \mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{V}'$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_z(x) \\ V_y(x) \end{Bmatrix} &\rightarrow D^* \begin{Bmatrix} M_z(x) \\ V_y(x) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_z(x) \\ V_y(x) \end{Bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & -1 \\ 0 & \frac{d}{dx} \\ 0 & 1|_{x=0} \\ 0 & -1|_{x=L} \\ -1|_{x=0} & 0 \\ 1|_{x=L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_z(x) \\ V_y(x) \end{Bmatrix} = \begin{cases} \frac{dM_z(x)}{dx} - V_y(x) \\ \frac{dV_y(x)}{dx} \\ V_y(x)|_{x=0} \\ -V_y(x)|_{x=L} \\ -M_z(x)|_{x=0} \\ M_z(x)|_{x=L} \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Observa-se que os termos $m_z(x)$, $q(x)$, V_0 , V_L , M_0 e M_L relativos aos esforços externos definem o espaço vetorial \mathcal{V}' . A Figura 6.31 apresenta de forma esquemática a formulação da viga de Timoshenko.

6.3.7 Aplicação da Equação Constitutiva

A Lei de Hooke para um material elástico linear isotrópico estabelece que a tensão normal $\sigma_{xx}(x)$ está relacionada à deformação específica $\varepsilon_{xx}(x)$ através do módulo de elasticidade longitudinal $E(x)$. Da mesma forma, a tensão de cisalhamento $\tau_{xy}(x)$ na seção x relaciona-se com a deformação angular $\gamma_{xy}(x)$ através do módulo de elasticidade transversal $G(x)$ da seção. Logo

$$\sigma_{xx}(x) = E(x)\varepsilon_{xx}(x), \quad (6.71)$$

$$\tau_{xy}(x) = G(x)\gamma_{xy}(x). \quad (6.72)$$

Substituindo as expressões das componentes de deformação (6.49) e (6.53) nas relações anteriores, tem-se que

$$\sigma_{xx}(x) = E(x)y \frac{d\theta_z(x)}{dx}, \quad (6.73)$$

$$\tau_{xy}(x) = G(x) \left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right]. \quad (6.74)$$

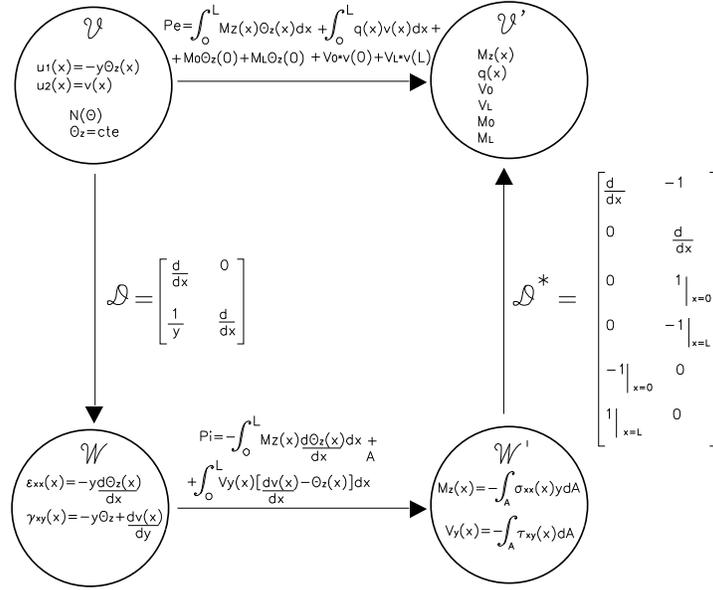


Figura 6.31: Formulação variacional da viga de Timoshenko.

Por sua vez, substituindo (6.73) na expressão (6.58) do momento fletor, tem-se que

$$M_z(x) = E(x) \frac{d\theta_z(x)}{dx} \int_A y^2 dA = E(x) I_z(x) \frac{d\theta_z(x)}{dx}, \quad (6.75)$$

sendo $I_z(x) = \int_A y^2 dA$ o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z do sistema de referência. A partir da equação anterior, obtém-se a seguinte relação para a derivada de $\theta_z(x)$

$$\frac{d\theta_z(x)}{dx} = \frac{M_z(x)}{E(x) I_z(x)}, \quad (6.76)$$

a qual substituída em (6.75) fornece a relação (6.28) da tensão normal $\sigma_{xx}(x)$ em função do momento fletor $M_z(x)$ na seção x , ou seja,

$$\sigma_{xx}(x) = -\frac{M_z(x)}{I_z(x)} y. \quad (6.77)$$

Logo, a tensão normal de flexão $\sigma_{xx}(x)$ varia linearmente na seção transversal de uma viga para os modelos de viga de Bernoulli e Timoshenko, como ilustrado na Figura 6.11.

Analogamente, substituindo (6.74) na expressão (6.59) da força cortante

$$V_y(x) = -\int_A G(x) \left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right] dA - G(x) \left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right] \int_A dA = -\left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right] G(x) A(x),$$

sendo $A(x)$ a área da seção transversal x . A partir de (6.46), observa-se que $-\left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right] = \beta(x)$ e substituindo na expressão anterior vem que

$$V_y(x) = G(x) A(x) \beta(x). \quad (6.78)$$

A partir desta relação, tem-se que

$$\beta(x) = -\left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right] = \frac{V_y(x)}{G(x) A(x)}, \quad (6.79)$$

a qual substituída em (6.74) fornece a expressão para a tensão de cisalhamento $\tau_{xy}(x)$ em função da força cortante $V_y(x)$ na seção, ou seja,

$$\tau_{xy}(x) = -\frac{V_y(x)}{A(x)}. \quad (6.80)$$

Logo, no modelo de Timoshenko a tensão de cisalhamento $\tau_{xy}(x)$ é constante em cada seção e representa uma tensão média, pois dividiu-se a força cortante $V_y(x)$ pela área $A(x)$. Este comportamento está ilustrado na Figura 6.32 e está de acordo com a hipótese de que a distorção $\beta(x)$ é constante na seção transversal. O sinal negativo indica que a força cortante positiva está orientada para baixo, contrária ao eixo y , conforme ilustrado na Figura 6.8(c). Além disso, a tensão de cisalhamento tem a mesma direção da força cortante.

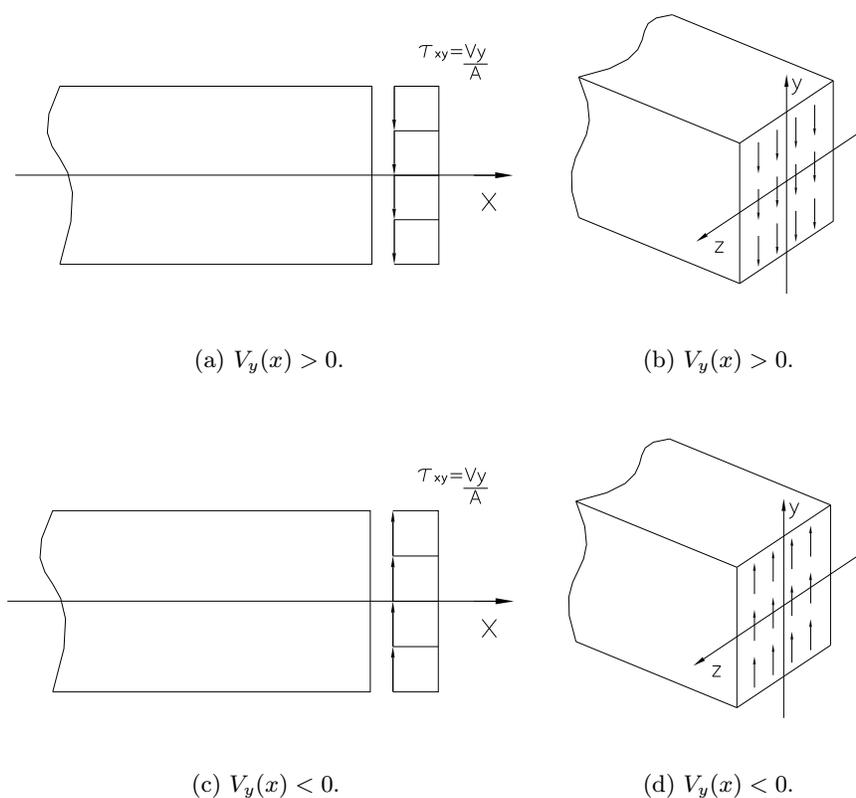


Figura 6.32: Comportamento constante da tensão de cisalhamento na viga de Timoshenko.

Todos os problemas estudados até este ponto são tratados como modelos unidimensionais. Assim, por exemplo, todos os esforços internos e externos ilustrados na Figura 6.30 estão presentes ao longo do eixo x da viga, o qual passa pelo centróide da seção. Portanto, nas extremidades inferior e superior da seção transversal não há forças transversais externas presentes, implicando que a força cortante $V_y(x)$ é nula nessas extremidades. Conseqüentemente, a tensão de cisalhamento $\tau_{xy}(x)$ também é zero.

Desta maneira, a distribuição constante de tensão de cisalhamento dada no modelo de Timoshenko (ver equação (6.80)) não é exata. Para isso, introduz-se um fator adimensional de correção ou de cisalhamento K_c . De acordo com a definição mais comumente aceita, K_c é dado pela razão entre a deformação de

cisalhamento média $\frac{V_y(x)}{A(x)G(x)}$ dividida pela deformação real $\gamma_{xy}(x)$. Portanto [?, ?, Timoshenko]

$$K_c = \frac{V_y(x)}{A(x)G(x)} \frac{1}{\gamma_{xy}(x)}. \quad (6.81)$$

Logo, empregando esta relação em (6.78) e (6.79), tem-se que a força cortante e a tensão de cisalhamento passam a ser dadas, respectivamente, por

$$V_y(x) = K_c G(x) A(x) \beta(x), \quad (6.82)$$

$$\tau_{xy}(x) = -\frac{V_y(x)}{K_c A(x)}. \quad (6.83)$$

Existem várias maneiras de se calcular K_c , podendo-se consultar as referências [?, ?, ?]. Este fator será calculado para seções retangulares e circulares na próxima seção.

Pode-se agora substituir as expressões (6.75) e (6.82) para o momento fletor e a força cortante nas equações diferenciais indicadas em (6.67), obtendo as seguintes equações em termos da rotação $\theta_z(x)$ e do deslocamento transversal $v(x)$

$$\frac{d}{dx} \left(E(x) I_z(x) \frac{d\theta_z(x)}{dx} \right) + K_c A(x) G(x) \left(\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right) + m_z(x) = 0, \quad (6.84)$$

$$\frac{d}{dx} \left[K_c G(x) A(x) \left(\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right) \right] - q(x) = 0. \quad (6.85)$$

As expressões anteriores constituem um sistema de equações diferenciais e estão acopladas pois o termo $K_c G(x) A(x) \left(\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right)$ aparece em ambas equações. Supondo que o momento distribuído $m_z(x)$ seja nulo e os parâmetros relativos às propriedades do material e da seção transversal são constantes ($E(x) = E$, $I_z(x) = I_z$, $A(x) = A$, $G(x) = G$), tem-se que

$$EI_z \frac{d^2\theta_z(x)}{dx^2} + K_c AG \left(\frac{dv(x)}{dx} - \theta_z(x) \right) = 0, \quad (6.86)$$

$$K_c GA \left(\frac{d^2v(x)}{dx^2} - \frac{d\theta_z(x)}{dx} \right) - q(x) = 0. \quad (6.87)$$

O sistema de equações diferenciais anterior pode ser reescrito como duas equações independentes, respectivamente, nas variáveis $v(x)$ e $\theta_z(x)$. Para isso, deriva-se (6.86)

$$EI_z \frac{d^3\theta_z(x)}{dx^3} + K_c AG \left(\frac{d^2v(x)}{dx^2} - \frac{d\theta_z(x)}{dx} \right) = 0 \rightarrow K_c AG \left(\frac{d^2v(x)}{dx^2} - \frac{d\theta_z(x)}{dx} \right) = -EI_z \frac{d^3\theta_z(x)}{dx^3},$$

e substitui-se em (6.87), obtendo-se

$$EI_z \frac{d^3\theta_z(x)}{dx^3} + q(x) = 0. \quad (6.88)$$

O efeito deste procedimento é retirar o segundo termo da equação (6.86), o qual se refere ao cisalhamento na viga. Observa-se que se o cisalhamento for nulo, ou seja, $\beta(x) = 0$, tem-se $\theta_z(x) = \alpha(x) = \frac{dv(x)}{dx}$, a qual substituída na expressão anterior resulta na equação diferencial de quarta ordem em termos de $v(x)$ dada para o modelo de flexão pura em (6.32).

A equação em termos de $v(x)$ é obtida diferenciando (6.87) duas vezes

$$K_c GA \left(\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \frac{d^3 \theta_z(x)}{dx^3} \right) - \frac{d^2 q(x)}{dx^2} = 0,$$

e introduzindo $\frac{d^3 \theta_z(x)}{dx^3} = -\frac{q(x)}{EI_z}$ obtido a partir de (6.88), vem que

$$K_c GA \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + \frac{K_c GA}{EI_z} q(x) - \frac{d^2 q(x)}{dx^2} = 0.$$

Multiplicando a equação anterior pelo fator $\frac{EI_z}{K_s GA}$, determina-se a equação final

$$EI_z \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \frac{EI_z}{K_s GA} \frac{d^2 q(x)}{dx^2} + q(x) = 0. \quad (6.89)$$

Exemplo 6.4 Considere a viga bi-apoiada com carregamento distribuído constante ilustrada na Figura 6.33(a). Determinar as equações da rotação $\theta_z(x)$ e do deslocamento transversal $v(x)$ através da integração das equações diferenciais (6.88) e (6.89).

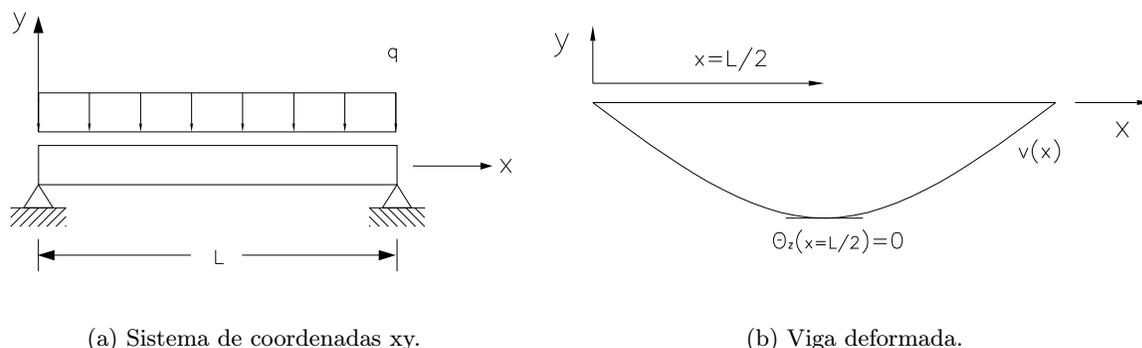


Figura 6.33: Viga com carregamento distribuído do Exemplo 1.

Inicialmente, determina-se a rotação $\theta_z(x)$ integrando-se a equação diferencial (6.88). Para isso, aplica-se o mesmo procedimento de solução da Seção 6.2.5.

1. Equação de carregamento: $q(x) = -q$.
2. Condições de contorno

Como a viga está bi-apoiada, os deslocamentos nas extremidades são nulos, ou seja,

$$v(x=0) = v(x=L) = 0. \quad (6.90)$$

Além disso, como não há momentos puros nas extremidades, o momento fletor deve ser nulo nestas seções. Logo,

$$M_z(x=0) = M_z(x=L) = 0. \quad (6.91)$$

3. Equação diferencial

$$EI_z \frac{d^3 \theta_z(x)}{dx^3} = q \quad (6.92)$$

4. Condição auxiliar

A equação diferencial (6.92) é de terceira ordem em termos da rotação $\theta_z(x)$. As condições de contorno (6.90) em termos de deslocamento não são úteis neste caso. Apenas as condições (6.91) são empregadas pois segundo (6.75) $M_z(x) = EI_z \frac{d\theta_z(x)}{dx}$. Sendo (6.92) de terceira ordem, necessitam-se de três equações para determinar as constantes de integração provenientes do processo de integração. Como a viga está bi-apoiada e o carregamento distribuído é constante ao longo de seu comprimento, tem-se que a rotação na metade da viga é nula, conforme ilustrado na Figura 6.8(b). Isto fornece a condição auxiliar

$$\theta_z(x = L/2) = 0, \quad (6.93)$$

a qual será empregada a seguir.

5. Integração da equação diferencial

- Primeira integração: $EI_z \frac{d^2 \theta_z(x)}{dx^2} = qx + C_1$
- Segunda integração: $M_z(x) = EI_z \frac{d\theta_z(x)}{dx} = q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$
- Terceira Integração: $EI_z \theta_z(x) = q \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

6. Determinação das constantes de integração

Aplicando-se as condições de contorno (6.91) e auxiliar (6.93), obtém-se as constantes C_1 , C_2 e C_3 . Portanto

$$\begin{aligned} M_z(x = 0) &= q \frac{(0)^2}{2} + C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0, \\ M_z(x = L) &= q \frac{(L)^2}{2} + C_1(L) + C_2 = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{qL}{2}, \\ \theta_z(x = \frac{L}{2}) &= \frac{1}{EI_z} \left[q \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{6} + C_1 \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} + (0) \left(\frac{L}{2}\right) + C_3 \right] = 0 \rightarrow C_3 = \frac{5qL^3}{48}. \end{aligned}$$

7. Equações finais

Substituindo as constantes C_1 , C_2 e C_3 nas expressões do momento fletor e de rotação, tem-se as seguintes expressões finais

$$\begin{aligned} M_z(x) &= q \frac{x^2}{2} - q \frac{L}{2} x = \frac{q}{2} (x - L)x, \\ \theta_z(x) &= \frac{q}{EI_z} \left[\frac{x^3}{6} - L \frac{x^2}{4} + \frac{5qL^3}{48} \right]. \end{aligned}$$

Agora, determina-se o deslocamento transversal $v(x)$ através da equação (6.89). Aplica-se o mesmo procedimento anterior.

1. Equação de carregamento: $q(x) = -q$.

2. Condições de contorno

As condições de contorno são as mesmas indicadas em (6.90) e (6.44). No entanto, a partir de (6.75) e (6.91) vem que

$$M_z(x = 0) = EI_z \frac{d\theta_z(x=0)}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d\theta_z(x=0)}{dx} = 0, \quad (6.94)$$

$$M_z(x = L) = EI_z \frac{d\theta_z(x=L)}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d\theta_z(x=L)}{dx} = 0. \quad (6.95)$$

De (6.87), tem-se a seguinte relação

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{1}{K_cGA} \left(-q(x) + \frac{d\theta_z(x)}{dx} \right).$$

Tomando a expressão anterior para $x = 0$ e $x = L$ e empregando (6.94) e (6.95) vem que

$$\frac{dv(x=0)}{dx^2} = -\frac{q}{K_cGA}, \quad (6.96)$$

$$\frac{dv(x=L)}{dx^2} = -\frac{q}{K_cGA}. \quad (6.97)$$

Portanto, as expressões dadas em (6.90), (6.96) e (6.97) constituem as 4 condições de contorno em termos de $v(x)$ necessárias para a solução do problema.

3. Equação diferencial

Como o carregamento é constante na viga, tem-se que

$$\frac{d^2q(x)}{dx^2} = 0.$$

Logo, a equação diferencial (6.89) simplifica-se para

$$EI_z \frac{d^4v(x)}{dx^4} = q(x) = -q. \quad (6.98)$$

4. Integração da equação diferencial

- Primeira integração: $EI_z \frac{d^3v(x)}{dx^3} = -qx + D_1$
- Segunda integração: $EI_z \frac{d^2\theta_z(x)}{dx^2} = -q\frac{x^2}{2} + D_1x + D_2$
- Terceira Integração: $EI_z \frac{dv(x)}{dx} = -q\frac{x^3}{6} + D_1\frac{x^2}{2} + D_2x + D_3$
- Quarta integração: $EI_z v(x) = -q\frac{x^4}{24} + D_1\frac{x^3}{6} + D_2\frac{x^2}{2} + D_3x + D_4$

5. Determinação das constantes de integração

Aplicando as condições de contorno dadas em (6.90), (6.96) e (6.97), determinam-se as constantes D_1 , D_2 , D_3 e D_4 .

$$\begin{aligned} EI_z \frac{d^2 v(x=0)}{dx^2} &= -q \frac{(0)^2}{2} + D_1(0) + D_2 = \frac{q}{K_c AG} \rightarrow D_2 = \frac{q}{K_c AG}, \\ EI_z \frac{d^2 v(x=L)}{dx^2} &= -q \frac{(L)^2}{2} + D_1(L) + \frac{q}{K_c AG} = \frac{q}{K_c AG} \rightarrow D_1 = \frac{qL}{2}, \\ EI_z v(x=0) &= 0 = -q \frac{(0)^4}{24} + D_1(0) + D_2 \frac{(0)^2}{2} + D_3(0) + D_4 = 0 \rightarrow D_4 = 0, \\ EI_z v(x=L) &= 0 = -q \frac{(L)^4}{24} + \frac{qL}{2} \left(\frac{L^3}{6} \right) + \frac{q}{K_c AG} \frac{L^2}{2} + D_3(L) + 0 = 0 \rightarrow D_3 = 0. \end{aligned}$$

6. Equação final

Substituindo D_1 a D_4 na equação de deslocamento $v(x)$, tem-se que

$$v(x) = \frac{q}{EI_z} \left[-\frac{x^4}{24} + \frac{Lx^3}{12} + \frac{x^2}{2K_c AG} + \left(-\frac{L^3}{24} - \frac{L}{2K_c AG} \right) x \right],$$

Simplificando a expressão anterior vem que

$$v(x) = -\frac{q}{EI_z} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{Lx^3}{12} + \frac{L^3 x}{24} \right) + \frac{q}{2EI_z K_c AG} (x^2 - Lx). \quad (6.99)$$

□

Exemplo 6.5 Resolver o exemplo anterior utilizando o sistema de coordenadas xy' ilustrado na Figura 6.34(a) para a especificação das condições de contorno.

Basicamente, trasladou-se o eixo y da extremidade para a metade da viga. Para determinar a rotação $\theta_z(x)$, emprega-se o mesmo procedimento anterior. Neste caso, as condições de contorno (6.91), em termos do momento fletor $M_z(x)$, são expressas da seguinte maneira no sistema de referência xy'

$$\begin{aligned} M_z \left(x = -\frac{L}{2} \right) &= EI_z \frac{d\theta_z \left(x = -\frac{L}{2} \right)}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d\theta_z \left(x = -\frac{L}{2} \right)}{dx} = 0, \\ M_z \left(x = \frac{L}{2} \right) &= EI_z \frac{d\theta_z \left(x = \frac{L}{2} \right)}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d\theta_z \left(x = \frac{L}{2} \right)}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (6.100)$$

A Figura 6.34(b) ilustra a rotação $\theta_z(x)$ para a viga considerada. Observa-se que $\theta_z(x)$ é uma função antisimétrica em relação ao eixo y' . Isto implica que

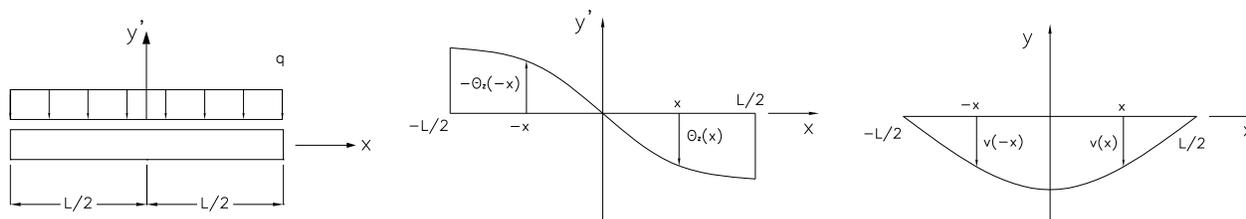
$$\theta_z(x) = -\theta_z(-x) \quad (6.101)$$

Utilizando esta relação na expressão para a rotação $\theta_z(x)$ obtida no exemplo anterior, ou seja

$$EI_z \theta_z(x) = -q \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

vem que

$$\theta_z(x) = \frac{1}{EI_z} \left[-q \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_3 \right] = -\theta_z(-x) = -\frac{1}{EI_z} \left[q \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_3 \right].$$

(a) Sistema de coordenadas xy' .

(b) Rotação.

(c) Viga deformada.

Figura 6.34: Viga com carregamento distribuído do Exemplo 2.

Logo

$$C_1x^2 + 2C_3 = 0.$$

Como C_1 e C_3 são constantes, a única condição para que expressão anterior seja válida para qualquer x é que $C_1 = C_3 = 0$.

Tomando agora a expressão do momento fletor

$$M_z(x) = EI_z \frac{d\theta_z(x)}{dx} = -q \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

lembrando que $C_1 = 0$ e aplicando a segunda condição de contorno dada em (6.100) vem que

$$M_z(x = \frac{L}{2}) = -q \frac{(\frac{L}{2})^2}{2} + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{qL^2}{8}.$$

Substituindo as constantes C_1 , C_2 e C_3 nas expressões do momento fletor e da rotação, tem-se as seguintes expressões finais

$$M_z(x) = -\frac{q}{2} \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right), \quad (6.102)$$

$$\theta_z(x) = \frac{q}{2EI_z} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{L^2x}{4} \right). \quad (6.103)$$

No que se refere ao deslocamento transversal $v(x)$, procede-se de forma análoga ao exemplo anterior e integra-se a equação diferencial (6.98), obtendo-se

$$EI_z v(x) = -q \frac{x^4}{24} + D_1 \frac{x^3}{6} + D_2 \frac{x^2}{2} + D_3x + D_4. \quad (6.104)$$

A partir da Figura 6.34(a), observa-se que o deslocamento $v(x)$ é simétrico em relação ao eixo y , ou seja,

$$v(x) = v(-x). \quad (6.105)$$

Substituindo (6.104) em (6.105), obtém-se, de forma análoga ao caso da rotação, que $D_1 = D_3 = 0$. Para determinar D_2 , emprega-se a condição (6.96) na expressão

$$EI_z \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -q \frac{x^2}{2} + D_1x + D_2.$$

Lembrando que $D_1 = 0$ e de (6.96) vem que

$$EI_z \frac{d^2 v(x = -L/2)}{dx^2} = -q \frac{(L/2)^2}{2} + D_2 = \frac{q}{K_c AG} \rightarrow D_2 = \frac{qL^2}{8EI_z} + \frac{q}{K_c AG}.$$

Da condição de contorno $v(x = L/2) = 0$, obtém-se D_4 , isto é,

$$D_4 = \frac{qL^2}{8K_c AG} + \frac{qL^4}{384EI_z}.$$

Substituindo as constantes D_1 e D_4 na expressão de $v(x)$ vem que

$$v(x) = \frac{qL^4}{384EI_z} \left[1 - 24 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 16 \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right] + \frac{qL^2}{8EI_z} \left[1 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (6.106)$$

O primeiro termo da expressão anterior representa a flexão da viga, enquanto o efeito do cisalhamento está dado pelo segundo termo. Como a constante que multiplica o primeiro termo é proporcional a L^4 e o segundo a L^2 , verifica-se que quanto maior o comprimento da viga, menor o efeito do cisalhamento. Assim, quanto menor o comprimento da viga, mais importante o efeito do cisalhamento, como mencionado anteriormente. \square

6.3.8 Distribuição da Tensão de Cisalhamento

Conforme ilustrado na Figura 6.32, as hipóteses cinemáticas assumidas para a viga de Timoshenko induzem uma distribuição constante da tensão de cisalhamento nas seções transversais da viga. No entanto, esta distribuição constante não está de acordo com o empenamento observado nas seções, como ilustrado na Figura 6.27.

Procurando minimizar este problema, introduziu-se o fator de cisalhamento K_c (ver equação (6.81)). No entanto, o cálculo do K_c como aqui definido depende da deformação de cisalhamento real na seção, a qual por sua vez depende do empenamento. A solução exata deste problema está descrita em [?, Timoshenko]. Nesta seção, pretende-se assumir uma certa forma de variação da tensão de cisalhamento na seção, de tal maneira a se ter uma distribuição de tensão mais próxima do real, quando comparada com a tensão constante dada pelo modelo de Timoshenko. Consideram-se a seguir os casos de seções transversais retangular, circular e perfis I.

Seção retangular

A Figura 6.35(a) ilustra a distribuição constante da tensão de cisalhamento numa de seção retangular de base b e altura a . Como a distribuição constante não é exata, assume-se que a tensão de cisalhamento varia de forma linear com a coordenada y , ou seja,

$$\tau_{xy}(y) = c_1 y + c_2. \quad (6.107)$$

Os coeficientes c_1 e c_2 são determinados sabendo-se que a tensão de cisalhamento é nula nas extremidades da seção. Logo

$$\begin{cases} \tau_{xy}(y = -a/2) = -c_1 \left(\frac{a}{2} \right) + c_2 = 0 \\ \tau_{xy}(y = a/2) = c_1 \left(\frac{a}{2} \right) + c_2 = 0 \end{cases}. \quad (6.108)$$

Resolvendo-se o sistema de equações anterior, obtém-se $c_1 = c_2 = 0$ e portanto $\tau_{xy}(y) = 0$, o que é impossível, pois a tensão de cisalhamento não é necessariamente nula na seção.

Assume-se, então, uma variação quadrática, isto é,

$$\tau_{xy}(y) = -c_1 y^2 + c_2 y + c_3. \quad (6.109)$$

Toma-se o coeficiente c_1 negativo, pois a parábola tem uma concavidade para baixo como ilustrado na Figura 6.35(b). Para determinar as constantes c_1 , c_2 e c_3 , necessitam-se 3 condições. As duas primeiras são as mesmas anteriores, ou seja, a tensão de cisalhamento é nula nas extremidades da seção. Portanto,

$$\begin{cases} \tau_{xy}(y = -a/2) = -c_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2 - c_2 \left(\frac{a}{2}\right) + c_3 = 0 \\ \tau_{xy}(y = a/2) = -c_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c_2 \left(\frac{a}{2}\right) + c_3 = 0 \end{cases}. \quad (6.110)$$

Somando as duas expressões anteriores vem que

$$-2c_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2c_3 = 0,$$

a partir da qual se tira uma relação entre c_1 e c_3

$$c_3 = c_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2. \quad (6.111)$$

A terceira condição necessária para determinar os coeficientes é obtida da simetria da seção em relação ao eixo z do sistema de referência. Como a tensão é nula nas duas extremidades e varia como uma parábola, tem-se um ponto de máximo ou mínimo no centro da seção, neste caso em $y = 0$. Esta condição implica que a derivada primeira de $\tau_{xy}(y)$, ou seja,

$$\frac{d\tau_{xy}(y)}{dy} = -2c_1 y + c_2$$

é nula para $y = 0$. Logo

$$\frac{d\tau_{xy}(0)}{dy} = -2c_1(0) + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0. \quad (6.112)$$

Substituindo (6.111) e (6.112) em (6.109) tem-se que

$$\tau_{xy}(y) = c_1 \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2 \right]. \quad (6.113)$$

A constante c_1 é indeterminada, pois o valor da tensão de cisalhamento máxima é ainda desconhecida. Para resolver esta indeterminação, sabe-se que a força cortante $V_y(x)$ é obtida através da solução do PVC (6.67). Assim em (6.59), $V_y(x)$ é conhecida e substituindo em (6.113) tem-se que

$$\begin{aligned} V_y(x) &= - \int_A \tau_{xy}(y) dA = -c_1 \int_A \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2 \right] dA \\ &= -c_1 \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 \int_A dA - \int_A y^2 dA \right]. \end{aligned}$$

A primeira integral da expressão anterior representa a área $A(x)$ da seção x , enquanto a segunda é o momento de inércia $I_z(x)$ em relação ao eixo z do sistema de referência. Portanto, c_1 é dada por

$$c_1 = - \frac{V_y(x)}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 A(x) - I_z(x)}. \quad (6.114)$$

Substituindo (6.114) em (6.113), obtém-se a tensão de cisalhamento $\tau_{xy}(x, y)$ na seção x variando de forma quadrática com a coordenada y , ou seja,

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{V_y(x)}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 A(x) - I_z(x)} \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2 \right]. \quad (6.115)$$

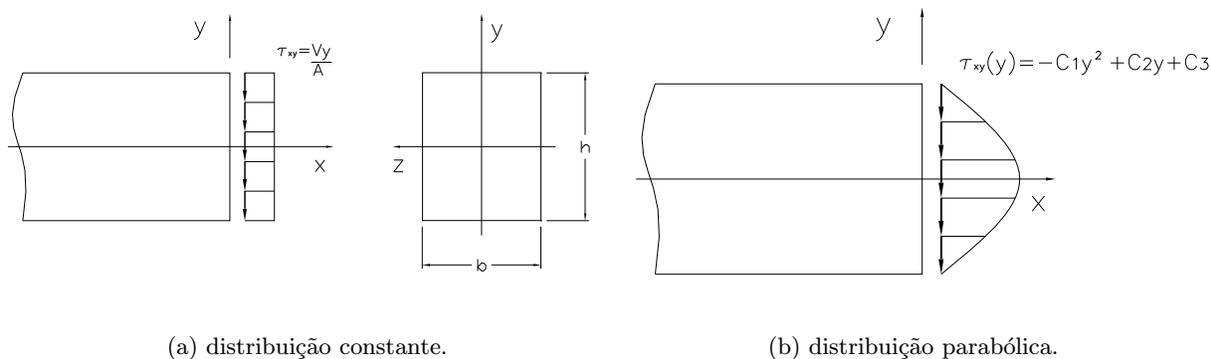


Figura 6.35: Distribuição da tensão de cisalhamento na seção retangular.

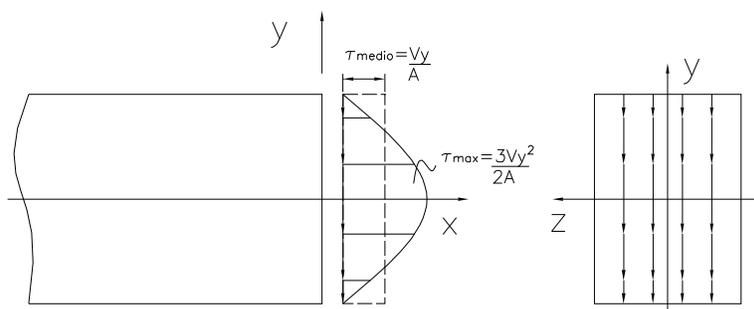


Figura 6.36: Tensão parabólica na seção retangular.

A Figura 6.36 ilustra a variação parabólica da tensão de cisalhamento na seção. Nas extremidades a tensão é nula e no centro assume um valor máximo. Observa-se ainda que a tensão de cisalhamento $\tau_{xy}(x, y)$ tem a mesma direção da força cortante $V_y(x)$.

Para determinar este valor máximo, considere o denominador na equação (6.115). Lembrando que para uma seção retangular $A(x) = ab$ e $I_z(x) = ba^3/12$, obtém-se

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 A(x) - I_z(x) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 ab - \frac{ba^3}{12} = \frac{ba^3}{4} - \frac{ba^3}{12} = 2I_z(x). \quad (6.116)$$

Logo, usando a relação anterior em (6.115), vem que

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{V_y(x)}{2I_z(x)} \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2 \right]. \quad (6.117)$$

A tensão de cisalhamento máxima τ_{xy}^{\max} na seção x é obtida para $y = 0$. Logo

$$\tau_{xy}^{\max}(x, y) = -\frac{V_y(x)}{2I_z(x)} \frac{a^2}{4} = -\frac{V_y(x)}{2\frac{ba^3}{12}} \frac{a^2}{4} = -\frac{12}{8} \frac{V_y(x)}{A(x)},$$

ou seja

$$\tau_{xy}^{\max}(x, y) = \frac{3}{2} \frac{V_y(x)}{A(x)}. \quad (6.118)$$

Portanto, a tensão de cisalhamento máxima numa seção retangular é 50% maior que a tensão média $\frac{V_y(x)}{A(x)}$ obtida pelo modelo de Timoshenko.

Considere agora a área hachurada na seção retangular mostrada na Figura 6.37(a). Deseja-se calcular o momento estático $M_{sz}(x)$ da área hachurada em relação ao eixo z do sistema de referência. Pela definição, tem-se que

$$M_{sz}(x) \int_A y dA. \quad (6.119)$$

Tomando-se $dA = bdy$, como ilustrado na Figura 6.37(a), o momento estático passa a ser dado por

$$M_{sz}(x) = \int_y^{\frac{h}{2}} bydy = b \int_y^{\frac{h}{2}} ydy = b \frac{y^2}{2} \Big|_y^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]. \quad (6.120)$$

Uma outra forma de se calcular $M_{sz}(x)$ é obtida a partir da Figura 6.37(b), ou seja,

$$M_{sz}(x) = A\bar{y}, \quad (6.121)$$

sendo $A = b\left(\frac{h}{2} - y\right)$ a área considerada e $\bar{y} = y + \frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} - y \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} + y \right]$ a distância do centróide da área hachurada ao centróide da seção retangular. Portanto,

$$M_{sz}(x) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]. \quad (6.122)$$

Como era esperado as expressões (6.120) e (6.122) são iguais e representam o momento estático de uma área que dista y do centróide da seção retangular, a qual por sua vez está a uma distância x da origem do sistema de referência adotado. Assim, a partir de (6.120) ou (6.122) vem que

$$\left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] = \frac{2M_{sz}(x)}{b}.$$

Substituindo a expressão anterior em (6.117) tem-se que

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{V_y(x)M_{sz}(x, y)}{bI_z(x)}. \quad (6.123)$$

Esta é a expressão comumente obtida de forma indireta a partir da flexão da viga nos textos de resistência dos materiais [?, ?].

O fluxo de cisalhamento $q_c(x, y)$ na seção x de uma área distando y do centróide da seção é dado por

$$q_c(x, y) = -\frac{V_y(x)M_s(x, y)}{I_z(x)}. \quad (6.124)$$

Supondo que as forças são dadas em N e os comprimentos em m , o fluxo de cisalhamento possui as seguintes unidades

$$[q_c(x, y)] = \frac{Nm^3}{m} = \frac{N}{m}.$$

Logo, $q_c(x, y)$ representa a quantidade de força na direção y por unidade de comprimento que a seção pode transmitir.

Substituindo (6.124) em (6.123), reescreve-se a tensão de cisalhamento como

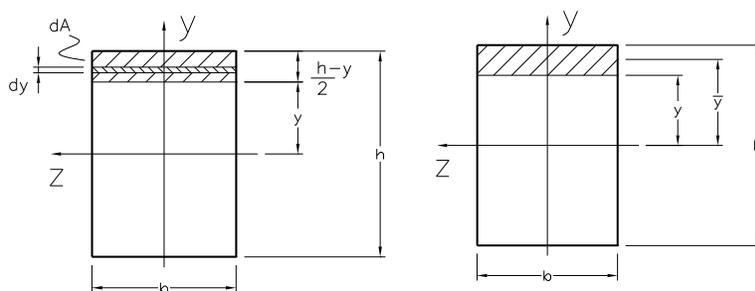
$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{q_c(x, y)}{b}. \quad (6.125)$$

O coeficiente de cisalhamento foi definido na expressão (6.81) como a relação entre a deformação média $\gamma_{xy}(x) = \tau_{xy}(x)/G(x) = -V_y(x)/A(x)G(x)$ e a deformação real no centróide. No caso da seção retangular, a tensão no centróide é máxima. A partir de (6.118) e da Lei de Hooke, tem-se a deformação correspondente

$$\gamma_{xy}(x) = \frac{\tau_{xy}(x)}{G(x)} = -\frac{3}{2} \frac{V_y(x)}{A(x)G(x)}. \quad (6.126)$$

Para obter K_c basta efetuar a divisão

$$K_c = \frac{-\frac{V_y(x)}{A(x)G(x)}}{-\frac{3}{2} \frac{V_y(x)}{A(x)G(x)}} = \frac{2}{3}. \quad (6.127)$$



(a) Elemento de área $dA = bdy$.

(b) Distância \bar{y} .

Figura 6.37: Momento estático na seção retangular.

Seção circular

Observa-se que em (6.105), ao assumir uma variação quadrática com y para a tensão de cisalhamento numa seção retangular, implicitamente assumiu-se que a tensão está distribuída verticalmente na seção transversal e é paralela a força cortante. Esta hipótese não é válida para a seção circular. Neste caso, de forma análoga ao problema de torção, a tensão de cisalhamento em cada ponto do contorno possui a direção tangente, como ilustrado na Figura 6.38(a) para os pontos A e A' .

Devido a simetria da seção, a tensão no ponto médio P da corda AA' tem a mesma direção vertical da força cortante. Logo, as direções das tensões de cisalhamento nos pontos A e P interceptam-se num

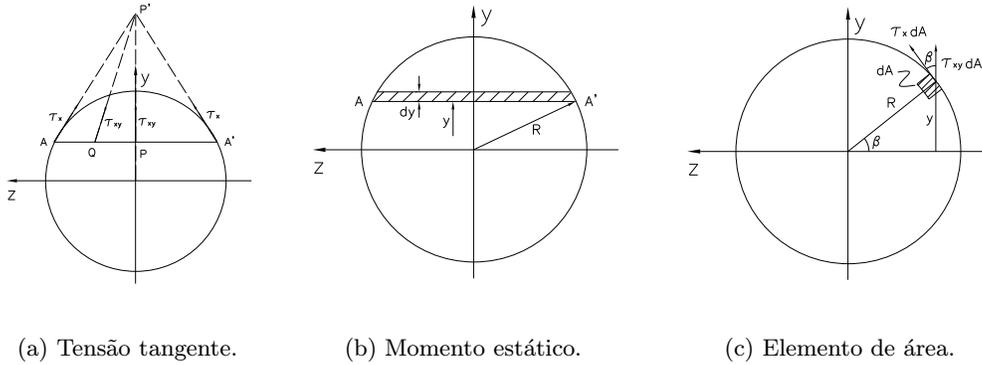


Figura 6.38: Tensão de cisalhamento numa seção circular.

ponto P' ao longo do eixo y como ilustrado na Figura 6.38(a). Assume-se, então, que a direção da tensão de cisalhamento em qualquer outro ponto Q da linha AA' também seja dirigida para o ponto P' . Desta maneira, é possível determinar a direção da tensão de cisalhamento em qualquer ponto na corda AA' e por consequência em qualquer ponto da seção.

A outra hipótese é admitir que as componentes verticais das tensões de cisalhamento sejam iguais em todos os pontos da linha AA' . Esta foi a mesma hipótese utilizada para seções retangulares quando se assumiu uma variação quadrática de $\tau_{xy}(y)$ em (6.109). Isto permite empregar a equação (6.123) para calcular a componente vertical τ_{xy} da tensão de cisalhamento. Neste caso, a base b em (6.123) é tomada como o comprimento da corda AA' dada segundo a Figura 6.38(b) como

$$b = AA' = 2\sqrt{R^2 - y^2}, \quad (6.128)$$

sendo R o raio da seção circular.

Deve-se calcular o momento estático em relação ao eixo z da área acima da linha AA' , ilustrada na Figura 6.38(b), a qual dista y do eixo z . Para isso, considere o elemento de área dA dado por

$$dA = 2\sqrt{R^2 - y^2}dy.$$

Logo, empregando a definição do momento estático vem que

$$M_{sz}(x, y) = \int_A y dA = 2 \int_y^R y \sqrt{R^2 - y^2} dy.$$

Efetuada a integração anterior, determina-se

$$M_{sz}(x, y) = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (6.129)$$

Substituindo (6.128) e (6.129) em (6.123) vem que

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{V_y(x)}{I_z(x)} \frac{\frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{R^2 - y^2}},$$

ou seja,

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{V_y(x) (R^2 - y^2)}{3I_z(x)}. \quad (6.130)$$

Para determinar a tensão de cisalhamento tangencial τ_t nos pontos A e A' , considere o elemento de área dA no contorno da seção. As forças resultantes nas direções y e tangente no elemento de área dA são, respectivamente, $\tau_{xy}dA$ e $\tau_t dA$. A partir da Figura 6.38(c), observa-se que

$$(\tau_t dA) \cos \beta = \tau_{xy} dA,$$

sendo $\cos \beta = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R}$. Portanto

$$\tau_t = \frac{\tau_{xy} R}{\sqrt{R^2 - y^2}}. \quad (6.131)$$

Substituindo (6.130) na expressão anterior, vem que

$$\tau_t(x, y) = -\frac{V_y(x)}{I_z(x)} R \sqrt{R^2 - y^2}. \quad (6.132)$$

A partir desta expressão, observa-se que a tensão de cisalhamento máxima na seção x ocorre nos pontos da seção situados ao longo do eixo z , o qual passa pelo centro de gravidade da seção. Logo

$$\tau_t^{\max}(x) = \tau_t(x, y = 0) = -\frac{V_y(x)}{3I_z(x)} R^2. \quad (6.133)$$

Substituindo o momento de inércia $I_z(x) = \frac{\pi R^4}{4}$ tem-se que

$$\tau_t^{\max}(x) = -V_y(x) \frac{R^2}{\frac{3\pi R^4}{4}} = -\frac{4}{3} \frac{V_y(x)}{\pi R^2}. \quad (6.134)$$

Lembrando que a área da seção circular é $A(x) = \pi R^2$, obtém-se a seguinte expressão final para τ_t^{\max}

$$\tau_t^{\max}(x) = -\frac{4}{3} \frac{V_y(x)}{A(x)}. \quad (6.135)$$

Desta maneira, a tensão de cisalhamento máxima na seção circular é cerca de 33% maior que a tensão média $\frac{V_y(x)}{A(x)}$ determinada na formulação da viga de Timoshenko.

Observa-se que a máxima tensão de cisalhamento exata, obtida considerando-se o empenamento real da seção, é dada por [?, Timoshenko]

$$\sigma_t^{\max}(x) = -1,38 \frac{V_y(x)}{A(x)}. \quad (6.136)$$

Assim, o erro na expressão (6.135) é cerca de 4%, o que pode ser considerado bastante razoável sob o ponto de vista de engenharia.

De forma análoga ao efetuado para seção retangular, o coeficiente de cisalhamento é obtido a partir de (6.135) sendo igual a

$$K_c = \frac{3}{4}. \quad (6.137)$$

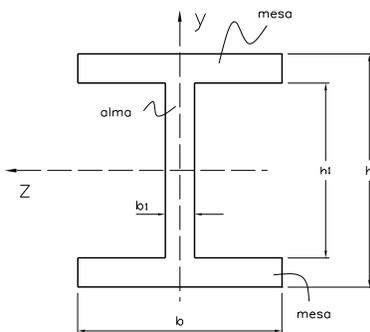


Figura 6.39: Perfil I.

Perfil I

O perfil I ilustrado na Figura 6.39 faz parte de um conjunto de seções transversais padronizadas utilizados frequentemente em estruturas em geral. O dimensionamento de vigas construídas com perfis laminados será discutido na Seção 6.4. Nesta seção, apresenta-se como determinar a distribuição da tensão de cisalhamento em perfis I. Estes perfis podem ser considerados como 3 retângulos, desprezando-se os raios internos. Os dois retângulos horizontais são denominados mesas enquanto o retângulo vertical é a alma.

Para determinar a distribuição da tensão de cisalhamento em perfis I, considera-se que as tensões são paralelas a força cortante e uniformemente distribuídas na espessura da alma, de forma análoga à seção retangular. Como se tem duas transições de espessura entre as mesas e a alma, consideram-se os 3 cortes na seção, ilustrados na Figura 6.40, para o cálculo do momento estático.

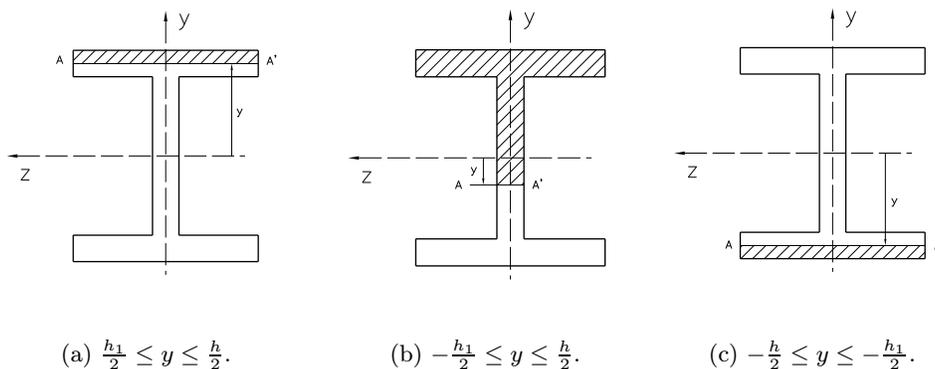


Figura 6.40: Cortes no perfil I.

Tomando-se a área indicada na Figura 6.40(a), o momento estático é dado de forma análoga a (6.120), ou seja,

$$M_{sz}(x, y) = \int_y^h y dA = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad \frac{h_1}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} \quad (6.138)$$

Substituindo a expressão anterior em (6.123) vem que

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{V_y(x)}{2I_z(x)} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]. \quad (6.139)$$

Calculando a tensão para $y = \frac{h_1}{2}$ e $y = \frac{h}{2}$, obtém-se

$$\begin{cases} \tau_{xy}^{\max} \left(x, y = \frac{h_1}{2} \right) = \frac{V_y(x)}{8I_z(x)} [h^2 - h_1^2] \\ \tau_{xy}^{\min} \left(x, y = \frac{h}{2} \right) = 0 \end{cases} . \quad (6.140)$$

O momento estático da área indicada na Figura 6.40(b) é dado por

$$M_{sz}(x, y) = \int_y^{\frac{h}{2}} y dA = b_1 \int_y^{\frac{h_1}{2}} y dy + b \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h}{2}} y dy \quad -\frac{h_1}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} . ,$$

onde se separou a expressão anterior em duas integrais devido a mudança de espessura em b_1 na alma para b na mesa. Efetuando as integrações indicadas, obtém-se

$$M_{sz}(x, y) = \frac{b_1}{2} \left[\left(\frac{h_1}{2} \right)^2 - y^2 \right] + \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 \right] . \quad (6.141)$$

Logo, a tensão de cisalhamento é dada por

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{V_y(x)}{2b_1 I_z(x)} \left\{ b_1 \left[\left(\frac{h_1}{2} \right)^2 - y^2 \right] + b \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 \right] \right\} . \quad (6.142)$$

Para $y = 0$ e $y = \pm \frac{h_1}{2}$, tem-se, respectivamente, as tensões máxima e mínima na alma, ou seja,

$$\begin{cases} \tau_{xy}^{\max} = \tau_{xy} \left(x, y = 0 \right) = \frac{V_y(x)}{8I_z(x)} [bh^2 - h_1^2(b - b_1)] \\ \tau_{xy}^{\min} = \tau_{xy} \left(x, y = \pm \frac{h_1}{2} \right) = \frac{V_y(x)}{8I_z(x)} [bh^2 - bh_1^2] \end{cases} \quad (6.143)$$

Observe a diferença da tensão de cisalhamento para $y = \frac{h_1}{2}$ calculada em (6.140) e (6.143). Isto indica uma descontinuidade da tensão na interface da mesa e da alma.

A última área é obtida com um corte na mesa inferior do perfil como mostrado na Figura 6.40(c). O momento estático é dado neste campo por

$$M_{sz}(x, y) = \int_y^{\frac{h}{2}} y dA .$$

Ao invés de se calcular o momento estático da área acima do corte, pode-se considerar a área abaixo devido a seguinte relação entre os momentos estáticos

$$M_{sz}(x, y) = \int_y^{\frac{h}{2}} y dA = \int_y^{-\frac{h}{2}} y dA .$$

Logo

$$M_{sz}(x, y) = \int_y^{-\frac{h}{2}} y dA = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h_1}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq -\frac{h_1}{2} . \quad (6.144)$$

Calculando-se os momentos estáticos para $y = -\frac{h}{2}$ e $y = \frac{h}{2}$, tem-se as mesmas expressões indicadas em (6.140).

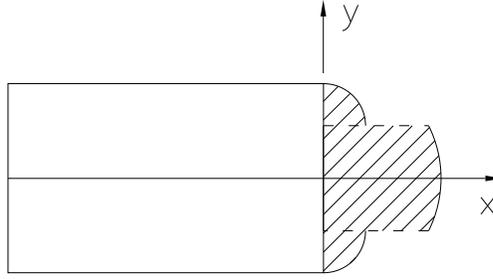


Figura 6.41: Distribuição de tensão no perfil I.

A Figura 6.41 ilustra a distribuição da tensão de cisalhamento num perfil I. Observa-se a descontinuidade da tensão nos pontos com mudança de espessura entre a alma e as mesas. De forma análoga às seções circular e retangular, a tensão de cisalhamento máxima em perfis I ocorre no centróide da seção e está dada na equação (6.143).

No entanto, obtém-se uma boa aproximação para a tensão de cisalhamento máxima dividindo-se a força cortante pela área da alma apenas. Isto se deve ao fato que as tensões de cisalhamento na alma integradas nas suas áreas fornecem uma força $V_a(x)$ que é praticamente igual a cortante $V_y(x)$. Para mostrar isto, considere as expressões (6.59) e (6.142) na área da alma, ou seja,

$$\begin{aligned} V_a(x) &= - \int_A \tau_{xy}(x) dA = -b_1 \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(x) dy \\ &= - \frac{V_y(x)}{2I_z(x)} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ b_1 \left[\left(\frac{h_1}{2} \right)^2 - y^2 \right] + b \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 \right] \right\} dy. \end{aligned}$$

Integrando a expressão anterior obtém-se

$$V_a(x) = - \frac{V_y(x)}{6I_z(x)} \left[\frac{b(h-h_1)(h-h_1)h_1}{2} + \frac{b_1 h_1^3}{12} \right]. \quad (6.145)$$

O momento de inércia $I_z(x)$ da seção é dado pela soma dos momentos de inércia da alma $[I_z(x)]_a$ e das mesas $[I_z(x)]_m$ em relação ao centróide da seção, isto é,

$$I_z(x) = [I_z(x)]_z + 2 [I_z(x)]_m. \quad (6.146)$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} [I_z(x)]_a &= \frac{b_1 h_1^3}{12}, \\ [I_z(x)]_m &= \frac{b(h-h_1)^3}{12} + \frac{b(h-h_1)(h+h_1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Observa-se que se utilizou o teorema dos eixos paralelos para o cálculo de $[I_z(x)]_m$. Logo

$$I_z(x) = \frac{b_1 h_1^3}{12} + 2 \left[\frac{b(h-h_1)^3}{12} + \frac{b(h-h_1)(h+h_1)^2}{4} \right]. \quad (6.147)$$

Quando a espessura das mesas é pequena, ou seja, h_1 se aproxima de h , a expressão anterior simplifica-se para o momento de inércia $I_z(x) = \frac{b_1 h_1^3}{12}$ da alma. O mesmo acontece para o termo entre colchetes na expressão (6.145). Assim, para espessuras de mesa pequenas, a alma absorve toda força cortante, pois a força $V_a(x)$ dada em (6.145) se aproxima da cortante $V_y(x)$.

6.4 Perfis Padronizados

Visando a redução de custos na construção de estruturas mecânicas constituídas de vigas, definiram-se alguns tipos padronizados de seções transversais. A Figura 6.42 ilustra alguns perfis padronizados tais como I e U. As propriedades destes perfis (tais como dimensões, área, momentos de inércia, módulo de resistência, etc) encontram-se tabeladas e são utilizadas para a seleção de um perfil apropriado após o dimensionamento da viga. Estes perfis podem ser colocados na posição vertical (Figuras 6.42(a) e 6.42(b)) e horizontal (Figuras 6.42(c) e 6.42(d)). Além disso, pode-se soldar ou rebitar vários perfis para construir a seção da viga, tal como ilustrado na Figura 6.42(e) para um perfil duplo U.

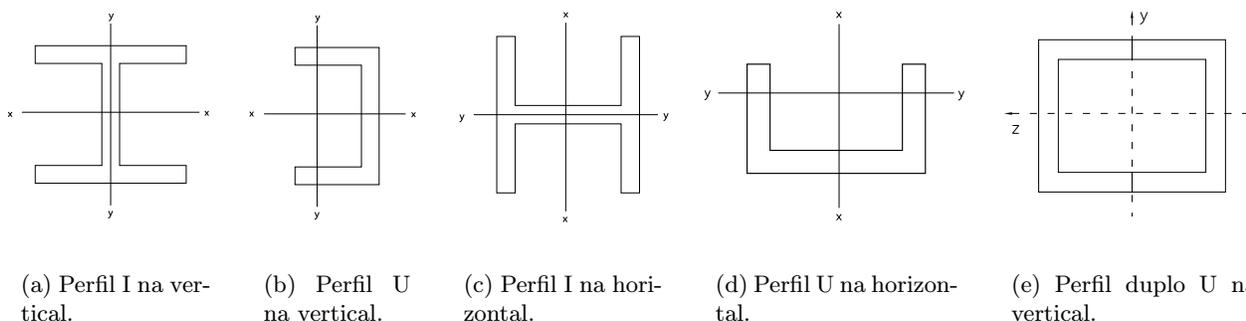


Figura 6.42: Perfis laminados.

O procedimento para o dimensionamento de vigas à flexão pura empregando perfis é análogo àquele apresentado na Seção 6.2.8 e está dado a seguir.

1. Determinar a seção mais solicitada da viga através da solução do PVC (6.67). Esta seção é aquela onde o momento fletor absoluto é máximo. Caso se tenha mais de uma seção com o mesmo momento fletor máximo, utiliza-se como critério de desempate a seção com a maior força cortante. O momento fletor máximo é denotado como M_z^{\max} .
2. Calcula-se o módulo de resistência a flexão W_z através da expressão para a máxima tensão normal σ_{xx}^{\max} , ou seja,

$$\sigma_{xx}^{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} \quad (6.148)$$

No dimensionamento à flexão pura, impõe-se que σ_{xx}^{\max} seja igual a tensão normal admissível $\bar{\sigma}$ do material. A partir desta condição e da relação anterior, chega-se a seguinte expressão para W_z

$$W_z = \frac{M_z^{\max}}{\bar{\sigma}}.$$

3. Sendo n_p o número de perfis, tem-se que o módulo de resistência à flexão W_z^p de cada perfil é dado por

$$W_z^p = \frac{W_z}{n_p}.$$

Por exemplo, para as Figuras 6.42(a) e 6.42(e), tem-se $n_p = 1$ e $n_p = 2$, respectivamente.

4. Sabendo-se o módulo de resistência mínimo de cada perfil para que a viga permaneça na fase elástica, seleciona-se na tabela aquele perfil cujo módulo de resistência é maior ou igual a W_z^P . Observa-se que se o perfil estiver na vertical, deve-se utilizar a coluna da tabela correspondente $x - x$. Caso o perfil esteja na horizontal, emprega-se a coluna referente ao eixo $y - y$ (ver Figura 6.42).
5. Indica-se o perfil selecionado fornecendo o número de perfis, o tipo, a altura e o peso específico. Por exemplo, 2U6", 35,7Kgf/m, indica que foram selecionados 2 perfis U de 6" de altura e peso específico de 35,7Kgf/m.
6. Deve-se verificar se a viga permanece na fase elástica considerando-se o seu peso próprio dado pelo seu peso específico como uma carga distribuída constante. A Figura 6.43(a) ilustra uma viga bi-apoiada a qual foi dimensionada com o procedimento aqui explicado. Após selecionado o perfil, recalcula-se a viga incluindo o peso próprio como carregamento distribuído conforme ilustrado na Figura 6.43(b).

(a) . (b) .

Figura 6.43: Efeito do peso próprio devido ao peso da viga.

Calcula-se a nova tensão máxima através de (6.148), lembrando-se que M_z^{\max} é obtido agora incluindo o peso próprio no carregamento original da viga (ver Figura 6.43(b)). Se σ_{xx}^{\max} assim calculado for inferior a $\bar{\sigma}$, a viga permanece na fase elástica. Caso contrário, deve-se redimensionar a viga, aplicando o procedimento anterior. Em geral, este processo é iterativo até selecionar um perfil adequado.

6.4.1 Exercícios resolvidos

Exercício 6.5 Uma viga foi construída a partir de duas chapas de dimensão $H \times t$ e de dois perfis U, como mostrado na Figura 6.44a). A junção das peças é feita com rebites de diâmetro $d = 10,0\text{mm}$. Os rebites estão colocados exatamente na linha que cruza o centro geométrico y_1 do perfil U. Esta seção é utilizada na viga mostrada na Figura 6.44b), a qual está engastada numa extremidade e sujeita a uma força concentrada $F = 120\text{kN}$ na outra extremidade. Sabe-se que o material dos rebites suporta uma tensão máxima de cisalhamento $\tau_{\max} = 35\text{N/mm}^2$. Sob estas condições, pede-se qual o espaçamento homogêneo L_d entre os rebites, como mostrado na Figura 6.44b). Dados: $H = 400\text{mm}$; $t = 15\text{mm}$. Dados geométricos do perfil U: distância da base até o centro geométrico da seção $y_1 = 14,5\text{mm}$; área da seção transversal do perfil $A = 35,4\text{cm}^2$; momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo furo dos rebites $I_{zz} = 83,24\text{cm}^4$. Desprezar a retirada de material causada pelo furo do rebite.

Força de cisalhamento que o rebite pode suportar (F_d):

$$A_d = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} (1,0\text{cm}) = 0,7854\text{cm}^2$$

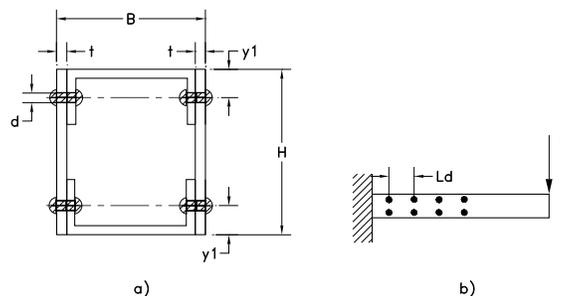


Figura 6.44: Questão 2: a) seção transversal; b) viga.

$$F_d = \tau_{\max} \cdot A_d = 35 \frac{N}{mm^2} \left(\frac{10mm}{1cm} \right)^2 0,7854cm^2 = 3500 \times 0,7854 = 2748,9N$$

Cálculo do momento de inércia total (I_{zz}) da seção

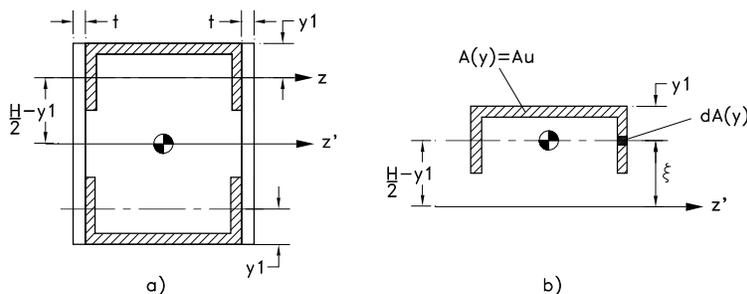


Figura 6.45: a) seção transversal; b) momento estático.

A Figura 6.45a) ilustra a seção transversal da viga com as dimensões necessárias para o cálculo do momento de inércia da seção. Observa-se que,

$$I_{zz} = 2 \times I_{zzC} + \left[I_{zzu} + A_u \left(\frac{H}{2} - y_1 \right)^2 \right] \times 2$$

onde $I_{zzC} = tH^3/12$ é o momento de inércia das chapas; I_{zzu} e A_u representam, respectivamente, o momento de inércia e a área da seção obtidos de uma tabela de perfis U. Logo,

$$I_{zzT} = 2x \frac{(1,5cm)(40cm)^3}{12} + x2 \left[83,24cm^4 + (35,4cm^2)(20cm - 1,45cm)^2 \right]$$

$$I_{zz} = 2x8000cm^4 + x2 \left[83,24cm^4 + (35,4)(18,55)^2 \right]$$

$$I_{zz} = 16000cm^4 + 2x \left[83,24 + 12181,23 \right] cm^4 = 40528,94cm^4$$

Fluxo de cisalhamento (força por unidade de comprimento) atuando em um perfil U:

$$q_c = -\frac{V_y}{I_{zz}} Q_z(y)$$

onde $V_y = F = 120KN = 120000N$.

Cálculo do momento estático de área

Aqui testa-se o desbalanceamento de força normal atuando em uma secção do perfil U, como ilustrado na Figura 6.45b). Portanto,

$$Q_z = \int_{A(y)} \xi dA(\xi) = \int_{A_u} \xi dA_u = \left(\frac{H}{2} - y_1\right) A_u$$

$$Q_z = \left(\frac{H}{2} - y_1\right) A_u = (20 - 1,45) (35,4 \text{ cm}^2) = Q_z = 656,67 \text{ cm}^3$$

Fluxo de cisalhamento, em todo o perfil U

$$q_c = -\frac{F}{I_{zz}} \cdot Q_z(y) = -\frac{120000 \text{ N}}{40528,94 \text{ cm}^4} 656,67 \text{ cm}^3 = 1944,3 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

Metade deste fluxo deve ser suportado pelos rebites fixos em cada lado. Fazendo o balanço de forças:

$$F_d = \frac{q_c}{2} L_D \rightarrow L_D = \frac{2F_D}{q_c} = \frac{2 \times 2748,9 \text{ N}}{1944,3 \frac{\text{N}}{\text{cm}}} \rightarrow L_D = 2,828 \text{ cm}$$

□

Exercício 6.6 A Figura 6.46a) ilustra uma ponte rolante com um vão central $L = 25 \text{ m}$, a qual deve suportar uma força concentrada máxima $P = 300 \text{ kN}$. Deseja-se dimensionar a viga cobrindo este vão segundo as máximas tensões normal e de cisalhamento. A seção transversal da viga está ilustrada na Figura 6.46b), sendo constituída de chapas de aço de espessuras $t_1 = 25 \text{ mm}$ e $t_2 = 8 \text{ mm}$, sendo a altura $H_1 \leq 80 \text{ cm}$. Adota-se um coeficiente de segurança igual a 2,0. Deseja-se ainda dimensionar a solda das chapas de aço da seção. Dados do material: módulo de elasticidade $E = 210 \text{ kN/mm}^2$; peso específico $\gamma = 78 \text{ kN/mm}^3$; tensão de escoamento $\sigma_e = 200 \text{ N/mm}^2$; tensão de cisalhamento $\tau = 150 \text{ N/mm}^2$.

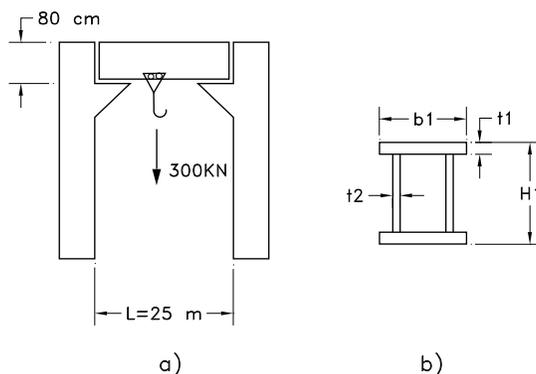


Figura 6.46: a) ponte rolante; b) seção transversal da viga central.

Dimensionamento à flexão pura (tensão normal) : inicialmente, deve-se verificar em que ponto da viga, a carga P causa o maior momento fletor. A Figura 6.47 ilustra alguns pontos de aplicação de P e os respectivos diagramas da força cortante e momento fletor. A partir daí, tem-se que o maior momento fletor ocorre quando a força estiver aplicada no centro do vão, sendo dado por,

$$M_{x_{\max}}(P) = \frac{PL}{4} = \frac{(300)(25)}{4} = 1875 \text{ kNm}$$

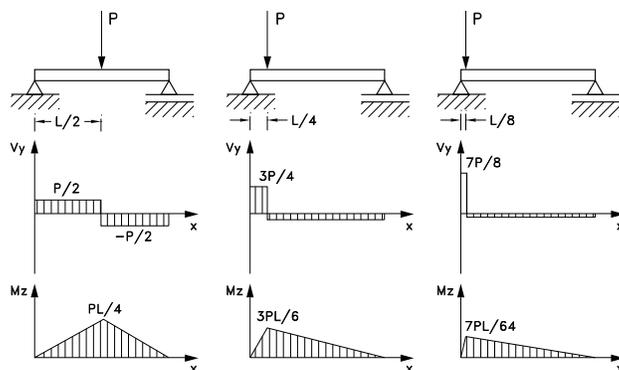


Figura 6.47: Aplicação do carregamento em vários pontos e respectivos esforços.

A partir daí, a máxima tensão de flexão na viga é calculada como,

$$\sigma_{xx_{\max}} = \frac{M_{z_{\max}}}{I_{zz}} y_{\max} = \frac{M_{z_{\max}}}{W_{z_{\min}}} \Rightarrow W_{z_{\min}} = \frac{M_{z_{\max}}}{\sigma_{xx_{\max}}}$$

onde $W_{z_{\min}}$ representa o módulo de resistência à flexão mínimo para que a viga permaneça na fase elástica. Tomando-se os valores da tensão de escoamento e do coeficiente de segurança dados, a máxima tensão normal na viga é dada por,

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_e}{2} = 100 \text{ N/mm}^2$$

Logo, o módulo de resistência mínimo $W_{z_{\min}}$ será,

$$W_{z_{\min}} = \frac{1875 \text{ kNm}}{100 \text{ N/mm}^2} \Rightarrow W_{z_{\min}} = 18750 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Na seção transversal da viga, tem-se como incógnita o valor de b_1 , o qual pode ser calculado a partir de $W_{z_{\min}}$. Para isso, deve-se calcular o momento de inércia da seção. Como estimativa inicial, despreza-se as almas da seção e calcula-se o momento de inércia em função apenas das mesas, como ilustrado na Figura 6.48a). Tal procedimento é justificável pois em geral para este tipo de perfil, os momentos de inércia das mesas correspondem a cerca de 80% a 90% do valor total. Portanto,

$$I_{zz} = 2 \left\{ I'_{zz} + \bar{y}^2 A \right\}$$

onde, a área da seção é $A = b_1 t_1 = 2,5 b_1 \text{ cm}^2$ e $\bar{y}^2 = 38,75^2 = 1502 \text{ cm}^2$. Assim,

$$I_{zz} = 2 \left(\frac{b_1 t_1^3}{12} + b_1 t_1 \bar{y}^2 \right) \rightarrow I_{zz} = 7500 b_1 \text{ cm}^4$$

O módulo de resistência à flexão em função de b_1 é dado por,

$$W_{zz} = \frac{I_{zz}}{y_{\max}} = \frac{7500 b_1}{40} = 187,5 b_1 \text{ cm}^3$$

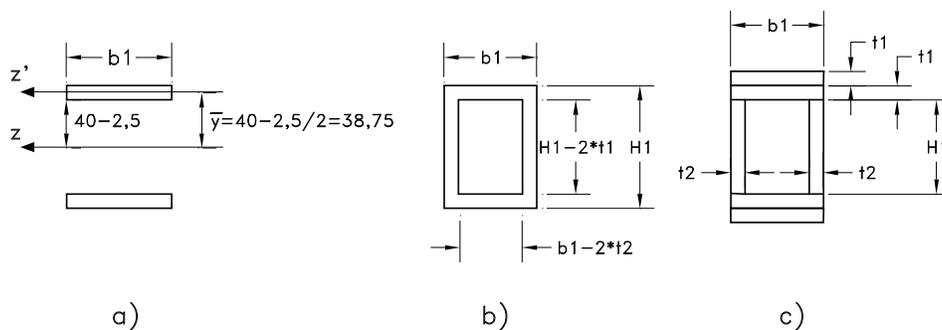


Figura 6.48: Seções transversais: a) estimativa inicial; b) perfil completo; c) perfil reforçado.

Mas,

$$W_{z_{\min}} = 18750 \text{ cm}^3 = 187,5b_1 \Rightarrow b_1 = 100 \text{ cm}$$

Caso se adote este valor de b_1 , a largura da viga será maior que a sua altura. Para evitar este inconveniente, considera-se duas vigas como solução construtiva e portanto $b_1 = 50 \text{ cm}$. Uma vez fixado o valor de b_1 , pode-se calcular o momento de inércia real I_{zz_R} da seção completa, incluindo as almas, conforme mostrado na Figura 6.48b). Logo,

$$I_{zz_R} = \frac{b_1 H_1^3}{12} - \frac{(b_1 - 2t_2)(H_1 - 2t_2)^3}{12} = 431,77 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

Por sua vez, o módulo de resistência à flexão real W_{z_R} é o seguinte,

$$W_{z_R} = \frac{I_{zz_R}}{y_{\max}} = \frac{431,77 \times 10^3}{40} = 10794 \text{ cm}^3$$

Deve-se então verificar se este módulo de resistência para as duas vigas é superior ao valor mínimo determinado anteriormente,

$$W_{z_R}(2\text{vigas}) = (10794)(2) = 21588 \text{ cm}^3 \geq W_{z_{\min}} = 18750 \text{ cm}^3$$

concluindo-se que a seção dimensionada permanece na fase elástica. Deve-se no entanto verificar o peso próprio.

Dimensionamento incluindo o peso próprio : considera-se o peso próprio como uma carga uniformemente distribuída de intensidade q_{pp} aplicada sobre cada viga como mostrado na Figura 6.49. Como cada viga está bi-apoiada, o momento fletor máximo devido ao peso próprio ocorre em $x = L/2$ com valor igual a $q_{pp}L^2/8$. Como o problema é linear e para os dois carregamentos (carga P e peso próprio q_{pp}) os momentos máximos estão na mesma seção, basta somar os respectivos valores para se obter o momento máximo. Logo,

$$M_{z_{\max}}^{pp} = \frac{1}{2} \frac{PL}{4} + \frac{q_{pp}L^2}{8}$$

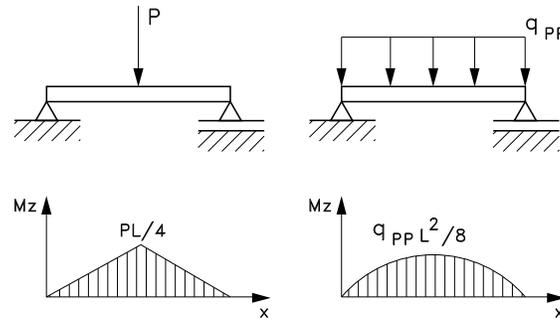


Figura 6.49: Carregamento original e efeito do peso próprio da viga.

Dado o peso específico γ do material, para calcular o peso próprio P_p basta multiplicar γ pelo volume V da viga. Neste caso, o volume é igual a área da seção $A = 370\text{cm}^2$ vezes o comprimento L . Dividindo-se por L , tem-se a intensidade da carga distribuída devido ao peso próprio,

$$q_{pp} = \frac{P_p}{L} = \frac{\gamma V}{L} = \frac{\gamma AL}{L} \rightarrow q_{pp} = 2886\text{N/m}$$

O peso de uma viga será $q_{pp}L = 72150\text{N}$ e o momento fletor máximo igual a $q_{pp}L^2/8 = 255,45 \times 10^3\text{Nm}$. Por sua vez, o momento fletor máximo em cada viga é calculado como,

$$M_{z_{\max}}^{pp} = \frac{1}{2} \frac{PL}{4} + \frac{q_{pp}L^2}{8} = 11630\text{N.cm}$$

sendo a respectiva tensão normal máxima para uma viga igual a,

$$\sigma_{xx_{\max}}^{pp} = \frac{M_{z_{\max}}^{pp}}{W_{z_R}} = \frac{11630}{10794} = 107,75\text{N/mm}^2 > \sigma_{\max} = 100\text{N/mm}^2$$

Assim, ao se incluir o peso próprio, verifica-se que a tensão excede o valor máximo admissível e a viga não permanece mais na fase elástica. Para contornar este problema, reforça-se a seção transversal como ilustrado na Figura 6.48c). Neste caso, o momento de inércia $I_{zz_{ref}}$ e o módulo de resistência à flexão $W_{z_{ref}}$ no perfil reforçado para uma viga serão dados, respectivamente, por

$$I_{zz_{ref}} = \frac{b_1 H_1^3}{12} - \frac{(b_1 - 2t_2)(H - 4t_1)^3}{12} = 749,9 \times 10^3\text{cm}^4$$

$$W_{z_{ref}} = \frac{I_{zz_{ref}}}{\frac{H}{2}} = \frac{749,9 \times 10^3}{40} = 18750\text{cm}^3$$

Analogamente, tem-se os seguintes valores para a intensidade da carga distribuída devido ao peso próprio $q_{pp_{ref}}$ e ao próprio peso $P_{p_{ref}}$ de uma viga,

$$q_{pp_{ref}} = \gamma A_{ref} = 4774\text{N/m} \quad P_{p_{ref}} = q_{pp_{ref}}L = 119300\text{N} \approx 120\text{kN}$$

Da mesma maneira, obtém-se o momento fletor $M_{z_{\max}}^{ref}$ e a tensão $\sigma_{xx_{\max}}^{ref}$ de flexão máximos em cada viga. Logo,

$$M_{z_{\max}}^{ref} = \frac{1}{2} \frac{PL}{4} + \frac{q_{pp_{ref}}L^2}{8} = 131 \times 10^6\text{N.cm}$$

$$\sigma_{xx_{\max}}^{ref} = \frac{M_{z_{\max}}^{ref}}{W_{z_{ref}}} = 6987 \text{ N/cm}^2 < \sigma_{\max} = 100 \text{ N/mm}^2$$

verificando-se neste caso que a tensão máxima na viga é inferior ao valor admissível fornecido. Portanto, adota-se a seção transversal ilustrada na Figura 6.48c). Deve-se, entretanto, verificar o dimensionamento ao cisalhamento.

Dimensionamento ao cisalhamento : a partir do valor da tensão de cisalhamento do material $\tau = 150 \text{ N/mm}^2$ e do coeficiente de segurança, tem-se que a tensão de cisalhamento máxima admissível τ_{\max} será,

$$\tau_{\max} = \frac{150}{2} = 75 \text{ N/mm}^2$$

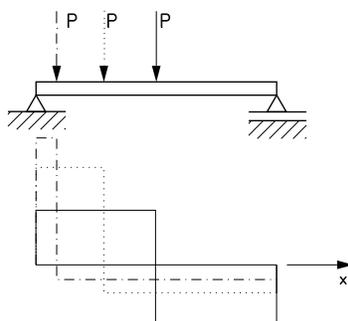


Figura 6.50: Força cortante máxima na viga.

Deve-se determinar a máxima força cortante na viga. Como a solução construtiva é constituída de duas vigas, tem-se que a força na ponte $P = 300 \text{ kN}$ é igualmente suportada por cada uma delas. Em relação ao peso próprio, aproximadamente igual a 120 kN , a Figura 6.50 mostra que o caso mais crítico em termos da cortante, ocorre quando este peso estiver concentrado nas extremidades da viga. Assim, a força cortante máxima $V_{y_{\max}}$ em cada uma das vigas será

$$V_{y_{\max}} = V_y(P) + V_y(q_{pp}) = \frac{1}{2} (300 + 120) = 210 \text{ kN}$$

De forma geral, o fluxo de cisalhamento numa altura y da seção transversal é calculado como,

$$q_c(y) = -\frac{V_y(x)}{I_{zz}(x)} Q_{z_p}(y)$$

Como ilustrado na Figura 6.51a), deve-se calcular o fluxo para as 3 alturas y_1, y_2, y_3 indicadas. Os respectivos momentos estáticos estão dados por,

$$Q_{z_p}(y = y_1) = \bar{y}_1 A_1 = \left(40 - \frac{2,5}{2}\right) A_1 = 4844 \text{ cm}^3$$

$$Q_{z_p}(y = y_2) = Q_{z_p}(y = y_1) + \bar{y}_2 A_2 = 9375 \text{ cm}^3$$

$$Q_{z_p}(y = y_3) = Q_{z_p}(y = y_2) + A_3 \bar{y}_3 = Q_{z_p}(y = y_2) + 2 \left(\frac{H - 2t_1}{2}\right) (H - 2t_1) t_2 = 10360 \text{ cm}^3$$

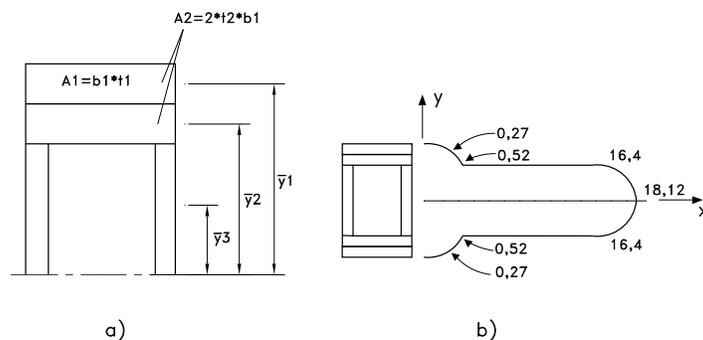


Figura 6.51: a) cálculo dos momentos estáticos; b) distribuição das tensões de cisalhamento.

A partir daí, os respectivos fluxos são calculados como $q_c(y) = -\frac{V_y(x)}{I_{zz}(x)}Q_{z_p}(y)$. Logo,

$$q_{c1} = 1356 \text{ N/cm} \quad q_{c2} = 2625 \text{ N/cm} \quad q_{c3} = 2900 \text{ N/cm}$$

As respectivas tensões de cisalhamento são obtidas como,

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y_1) &= \frac{q_{c1}}{b_1} = 0,27 \text{ N/cm}^2 & \tau_{xy}(y_2^-) &= \frac{q_{c2}}{2t_2} = 16,40 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{xy}(y_2^+) &= \frac{q_{c2}}{b_1} = 0,52 \text{ N/mm}^2 & \tau_{xy}(y_3) &= \frac{q_{c3}}{2t_2} = 18,12 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

estando ilustradas na Figura 6.51b). Como os valores de tensão de cisalhamento são inferiores ao valor admissível τ_{\max} , verifica-se que a viga dimensionada não falhará por cisalhamento.

Dimensionamento de solda : a Figura 6.52 mostra o esquema de solda adotado na seção transversal de cada viga. Deseja-se determinar os valores de R_1 e R_2 . Os respectivos fluxos de cisalhamento são dados por,

$$q_{c1} = \tau_{R1}(2R_1) \quad q_{c2} = \tau_{R2}(2R_2)$$

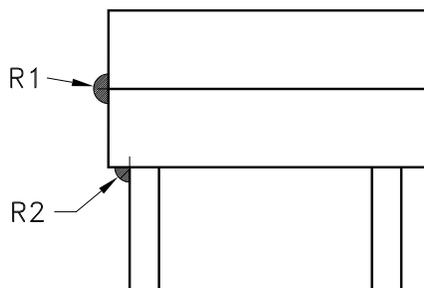


Figura 6.52: Esquema da solda.

Igualando as tensões τ_{R1} e τ_{R2} com a tensão de cisalhamento admissível τ_{\max} , vem que,

$$R_1 = \frac{q_{c1}}{2\tau_{\max}} = 0,09 \text{ cm} = 0,9 \text{ mm} \quad R_2 = \frac{q_{c2}}{2\tau_{\max}} = 0,175 \text{ cm} = 1,75 \text{ mm}$$

□