Controle de Sistemas Mecânicos

Profa. Grace S. Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Primeiro Semestre de 2025

NOTA AO LEITOR

Estas notas de aula foram baseadas nas seguintes referências :

- J. C. Geromel e R. H. Korogui, "*Controle Linear de Sistemas Dinâmicos : Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*", Edgard Blucher Ltda (segunda edição), 2019.
- J. C. Geromel e A. G. B. Palhares, "*Análise Linear de Sistemas Dinâmicos : Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*", Edgard Blucher Ltda (terceira edição), 2019.
- G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, "*Feedback Control of Dynamic Systems*", Prentice Hall, 2006.
- K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice Hall, 2002.

1 Capítulo I: Análise de Sistemas LIT
- Introdução
- Sistemas lineares e invariantes no tempo
  - Transformada de Laplace
  - Decomposição em frações parciais
  - Solução via transformada de Laplace
- Representação de sistemas LIT
  - Representação em espaço de estado
  - Função de transferência
- Resposta em freqüência
  - Diagramas de Bode
  - Diagrama polar
- Modelagem de sistemas dinâmicos

Introdução

O objetivo deste curso é estudar conceitos fundamentais relacionados à análise e ao projeto de controle de sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT), considerando-se o domínio do tempo contínuo. Ele é basicamente dividido em três partes:

- **Análise de sistemas LIT:** São estudadas algumas propriedades básicas de sistemas LIT. Após uma revisão de Transformada de Laplace (TL), a solução de equações diferenciais utilizando a TL é obtida. A representação do sistema em termos de equações em espaço de estados e função de transferência é apresentada. A resposta em frequência é abordada e os diagramas de Bode e Polar são fornecidos. O estudo de estabilidade é realizado utilizando os critérios de Routh e de Nyquist. A modelagem de sistemas dinâmicos e sua linearização também são pontos a serem tratados nesta parte.

Introdução

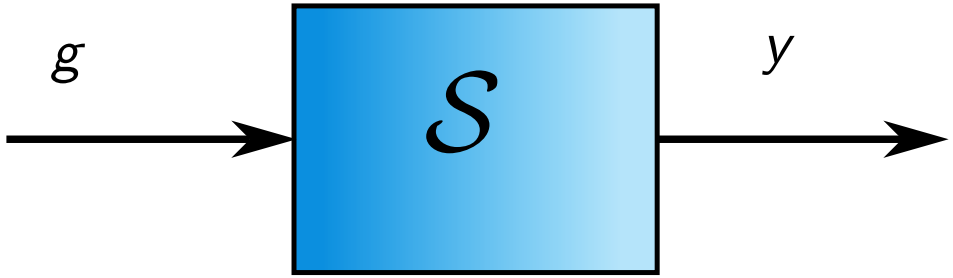
- **Controle clássico:** Técnicas de projeto de controle baseadas na representação do sistema em termos de sua função de transferência são estudadas. Algumas classes de controladores, com ênfase no controlador PID, são apresentadas e o projeto via lugar das raízes e resposta em frequência são vistos em detalhes.
- **Controle moderno:** Técnicas de projeto de controle baseadas na representação em espaço de estados do sistema são estudadas. São apresentados conceitos como controlabilidade e observabilidade. É realizado o projeto de reguladores, observadores de estado e servomecanismos com ênfase no regulador linear quadrático.

Sistemas lineares e invariantes no tempo

Um sistema dinâmico a tempo contínuo definido para todo $t \in \mathbb{R}$ é um dispositivo que converte um sinal de entrada $g(t)$ (definido para todo $t \in \mathbb{R}$) em um sinal de saída $y(t)$ (definido para todo $t \in \mathbb{R}$), através da relação

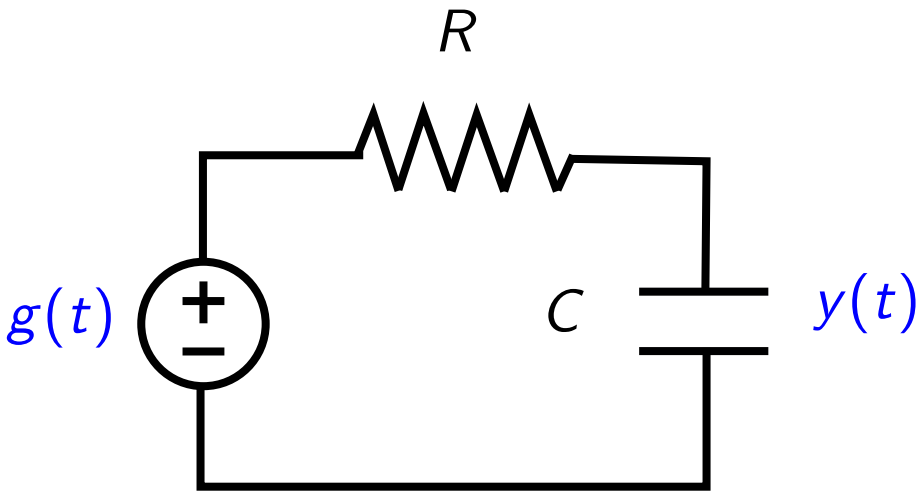
$$y = \mathcal{S}[g]$$

em que $\mathcal{S}[\cdot]$ representa o ente matemático que associa sinais de entrada e saída.



Sistemas lineares e invariantes no tempo

Considere, o circuito RC em série:



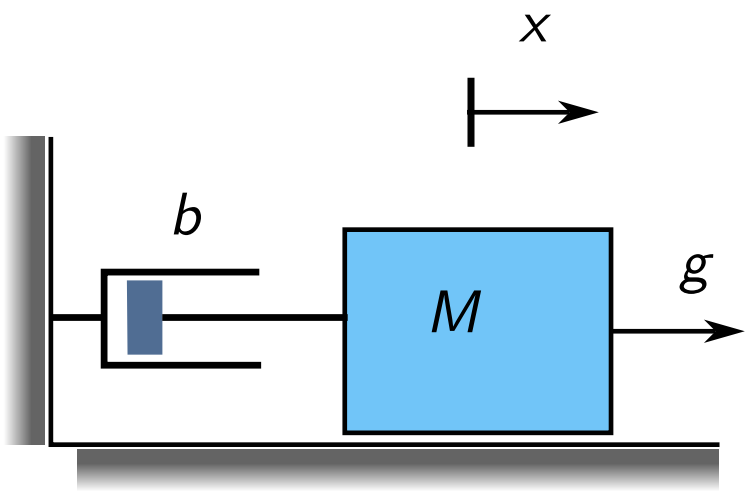
que é descrito pela seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}g(t), \; y(0) = 0.$$

Esta equação descreve a relação entre a entrada $g(t)$ (tensão na fonte) e a saída $y(t)$ (tensão no capacitor).

Sistemas lineares e invariantes no tempo

Considere, o circuito massa-amortecedor sujeito a uma força externa g. Neste diagrama, x indica a posição da massa M.



O sistema é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{b}{M}y(t) = \frac{1}{M}g(t), \; y(0) = 0.$$

que representa a relação entre a entrada $g(t)$ (força externa) e a saída $y(t)$ (velocidade $\dot{x}$).

Sistemas lineares e invariantes no tempo

Neste curso, estamos particularmente interessados em sistemas dinâmicos que apresentam as seguintes propriedades:

- Linearidade: Um sistema linear é aquele que obedece ao princípio da superposição, ou seja, quando $y(t) = \sum_i \alpha_i y_i(t)$ for a resposta do sistema a uma entrada $g(t) = \sum_i \alpha_i g_i(t)$ em que $y_i = \mathcal{S}[g_i]$ para todo escalar $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Exemplos:
  - Sistema linear: $y(t) = tg(t)$,
  - Sistema não-linear: $y(t) = 2g(t) + 3$.
- Causalidade: Um sistema é causal se a sua saída depender apenas da entrada ocorrida no passado e no presente, ou seja, $y(t)$ depende apenas de $g(\tau)$ para $\tau \leq t$.
- Invariância no tempo: Um sistema é invariante no tempo se um deslocamento no sinal de entrada causa o mesmo deslocamento no sinal de saída, ou seja, se $y(t - \tau)$ for a saída para uma entrada $g(t - \tau)$.

Sistemas lineares e invariantes no tempo

Sistemas LIT são totalmente definidos pela sua resposta ao impulso:

$$h(t) = \mathcal{S}[\delta(t)].$$

- O impulso unitário permite decompor sinais contínuos no tempo utilizando a integral de convolução:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Aplicando esta entrada no sistema LIT, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{S}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\mathcal{S}[\delta(t-\tau)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Sistemas lineares e invariantes no tempo

A segunda igualdade vem da propriedade de linearidade e a terceira decorre da invariância no tempo.

Sistema LIT

A resposta $y(t)$ é dada pela convolução do sinal de entrada $g(t)$ com a resposta ao impulso $h(t)$, ou seja:

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Sistemas lineares e invariantes no tempo

A causalidade de um sistema se reflete na sua resposta ao impulso.

Causalidade

Um sistema LIT é causal quando a sua reposta ao impulso for tal que $h(t) = 0$ para $t < 0$.

Da integral de convolução apresentada anteriormente é fácil verificar que se o sistema for causal então $h(t - \tau) = 0$ para $\tau > t$ fazendo com que sua resposta seja dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)h(t - \tau)d\tau,$$

o que torna evidente que, apenas sob esta condição, a saída $y(t)$ depende da entrada $g(\tau)$ para todo $\tau \leq t$.

Sistemas lineares e invariantes no tempo

- Resposta ao degrau unitário $g(t) = \upsilon(t)$ de um sistema LIT:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \upsilon(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} h(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Para sistemas LIT causais

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau) d\tau$$

é a integral da resposta ao impulso unitário.

Sistemas lineares e invariantes no tempo

- Resposta à função exponencial $g(t) = e^{\lambda t}$ de um sistema LIT:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda\tau} h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(t-\tau)} h(\tau) d\tau \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\tau} h(\tau) d\tau \right) e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Para sistemas LIT causais

$$y(t) = \left(\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} h(\tau) d\tau \right) e^{\lambda t}$$

é proporcional à entrada, por um fator que depende de λ.

Sistemas lineares e invariantes no tempo

Sistemas LIT causais de grande interesse são descritos por equações diferenciais do tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{i=0}^{m} e_i \frac{d^i}{dt^i} g(t) \ , \ \ t \in \mathbb{R}$$

onde a_i e e_i são escalares e $n \geq m$. Note que especificar a função de entrada $g(t)$ não é condição suficiente para que a resposta $y(t)$ correspondente seja única. Dentre muitas, uma solução específica pode ser individualizada impondo-se algumas condições suplementares sobre $y(t)$. Por exemplo, o seu valor e de suas derivadas em alguns instantes de tempo previamente selecionados.

Em vários momentos, vamos adotar a notação mais compacta

$$D[y] = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t).$$

Sistemas lineares e invariantes no tempo

- Sendo $t = 0$ adotado como instante inicial a função de saída é definida para $t \geq 0$. Para selecionar uma solução específica pode-se impor os valores de

$$y(0), \frac{d}{dt}y(0), \cdots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(0)$$

que caracterizam as condições iniciais do sistema.

- Uma resposta específica $y(t)$ correspondente a uma entrada $g(t)$ dada, pode ser determinada observando que se $y(t)$ satisfaz a equação diferencial então $h_0(t) + y(t)$ onde

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} h_0(t) = 0$$

também a satisfaz.

Sistemas lineares e invariantes no tempo

- O seguinte resultado é fundamental no presente contexto:

Solução geral

Qualquer solução da equação diferencial em estudo, definida para todo $t \geq 0$, pode ser unicamente individualizada pela escolha adequada de $h_0(t)$ e é dada por

$$y(t) = h_0(t) + \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

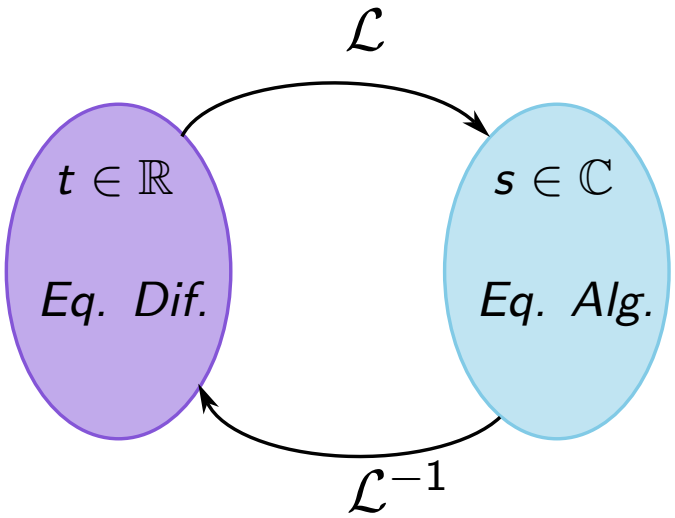
As funções $h_0(t)$ e $h(t)$, definidas para todo $t \geq 0$, precisam ser determinadas com o devido cuidado.

A seguir vamos revisar Transformada de Laplace e mostrar como podemos usá-la para obter a solução da equação diferencial em estudo.

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace $\mathcal{L}(\cdot)$ é um operador matemático que permite converter um problema difícil de resolver no domínio do tempo $t \in \mathbb{R}$, em outro mais simples definido em $s \in \mathbb{C}$.

- Utilizando $\mathcal{L}(\cdot)$, uma equação diferencial linear definida para todo $t \in \mathbb{R}$ é convertida em um conjuto de equações algébricas na variável complexa $s \in \mathbb{C}$.
- O problema é resolvido em $s \in \mathbb{C}$ e a transformação inversa $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ fornece a solução do problema original em $t \in \mathbb{R}$.



Transformada de Laplace

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$, denotada por $\hat{f}(s)$ ou $\mathcal{L}(f(t))$, é uma função de variável complexa

$$\hat{f}(s) \ : \ \mathcal{D}(\hat{f}) \to \mathbb{C}$$

onde $\mathcal{D}(\hat{f})$ é o seu domínio e

$$\hat{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{D}(\hat{f}) := \{s \in \mathbb{C} \ : \ \hat{f}(s) \ existe\}$$

É importante ressaltar que $\hat{f}(s)$ existe indica que a integral acima converge e é finita. Geralmente $\mathcal{D}(\hat{f})$ não coincide com $\mathbb{C}$, o que torna essencial determinar o domínio da transformada.

Transformada de Laplace

Para ilustrar este fato, considere a função

$$f(t) = e^{-at} \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

sua transformada de Laplace é dada por

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

que apresenta domínio vazio $\mathcal{D}(\hat{f}) = \emptyset$.

- De fato, note que a primeira integral:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a}\left[\lim_{t\to 0} e^{-(s+a)t} - \lim_{t\to -\infty} e^{-(s+a)t}\right]$$
$$= -\frac{1}{s+a}$$

só é válida para $\mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)$.

Transformada de Laplace

- Por outro lado, a segunda integral

$$\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}\left[\lim_{t\to 0} e^{-(s+a)t} - \lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t}\right]$$
$$= \frac{1}{s+a}$$

só é válida para $\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$.

O domínio de válidade de ambas as integrais possui intersecção nula, indicando que a função exponencial e^{-at} quando definida em $t \in \mathbb{R}$ não admite transformada de Laplace.

Em geral, funções definidas em $t \in \mathbb{R}$ possui domínio da transformada muito restrito.

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

Para funções $f(t)$ definidas para todo $t \geq 0$, temos:

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

sendo seu domínio dado por

$$\mathcal{D}(\hat{f}) := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ a ser adequadamente determinado.

Determinação do domínio: O domínio de $\hat{f}(s)$ é o menor valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que à direita de uma linha vertical passando por α, a função $\hat{f}(s)$ é analítica e, portanto, finita em todo $s \in \mathcal{D}(\hat{f})$.

Transformada de Laplace

Uma função racional é da forma

$$\hat{f}(s) := \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} e_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

onde $m \leq n$, $e_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, \cdots, m\}$ e $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Se $n = m$ ela é chamada própria, caso contrário ela é dita estritamente própria.

Esta função deixa de ser analítica nos seus polos p_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$, raízes de $D(s) = 0$. Assim sendo

$$\alpha = \max_{i=1,\cdots,n} \mathrm{Re}(p_i)$$

O impulso unitário (Dirac) :

$$\hat{\delta}(s) = 1 \ , \quad \mathcal{D}(\hat{\delta}) = \mathbb{C}$$

Transformada de Laplace

Vários cálculos envolvendo a transformada de Laplace dependem da determinação correta do seu domínio :

- Integral: A integral de uma função em todo o seu domínio é dada por

$$\int_0^\infty f(t)dt = \hat{f}(0)$$

desde que $0 \in \mathcal{D}(\hat{f})$.

Teorema do valor final:

O limite de uma função definida em $t \geq 0$ satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\hat{f}(s)$$

desde que $0 \in \mathcal{D}(s\hat{f})$.

Transformada de Laplace

No estudo de equações diferenciais via transformada de Laplace, as seguintes propriedades são importantes para funções definidas em $t \geq 0$ e escalares $\theta_1, \theta_2, \cdots$

- Combinação linear:

$$\mathcal{L}\left(\sum_i \theta_i f_i(t)\right) = \sum_i \theta_i \hat{f}_i(s)$$

- Convolução a tempo contínuo:

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \hat{f}(s)\hat{g}(s)$$

- Escalamento no tempo:

$$\mathcal{L}(f(\omega t)) = \left(\frac{1}{\omega}\right)\hat{f}\left(\frac{s}{\omega}\right)$$

Transformada de Laplace

- Deslocamento em frequência:

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = \hat{f}(s+a), \ a \in \mathbb{C}$$

- Deslocamento no tempo: Considere a função:

$$q(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in [0, \tau) \\ f(t-\tau) & , \quad t \in [\tau, \infty) \end{cases} , \tau \geq 0$$

então

$$\mathcal{L}(q(t)) = e^{-\tau s}\hat{f}(s)$$

- Integração no tempo:

$$q(t) = \int_0^t f(\xi)d\xi$$

então

$$\mathcal{L}(q(t)) = \frac{\hat{f}(s)}{s}$$

Transformada de Laplace

Como as funções que estamos considerando são definidas apenas para $t \geq 0$, a sua derivada em $t = 0$ deve ser melhor qualificada (note que $f(t)$ pode não existir para $t < 0$).

- Derivada em relação ao tempo :

$$q(t) := \begin{cases} \dot{f}(t) & , \quad t > 0 \\ \text{valor finito} & , \quad t = 0 \end{cases}$$

geralmente adota-se $q(0) = \lim_{t \to 0^+} \dot{f}(t) = \dot{f}(0^+) < \infty$.

Derivada temporal

A transformada de Laplace de $q(t)$ definida acima é dada por:

$$\hat{q}(s) = s\hat{f}(s) - f(0) \ , \quad \mathcal{D}(\hat{q}) = \mathcal{D}(s\hat{f})$$

Transformada de Laplace

Infelizmente, a definição anterior não permite levar em conta a possibilidade de $f(t)$, $\forall t \geq 0$ variar arbitrariamente rápido em $t = 0$. Ou seja, considerar $f(t)$ descontínua em $t = 0$, o que ocorre quando $f(0) \neq 0$. Nestes casos, $q(t)$ não possui valor finito em $t = 0$:

- Derivada generalizada :

$$q(t) := \begin{cases} \dot{f}(t) & , \quad t > 0 \\ \text{valor infinito} & , \quad t = 0 \end{cases} .$$

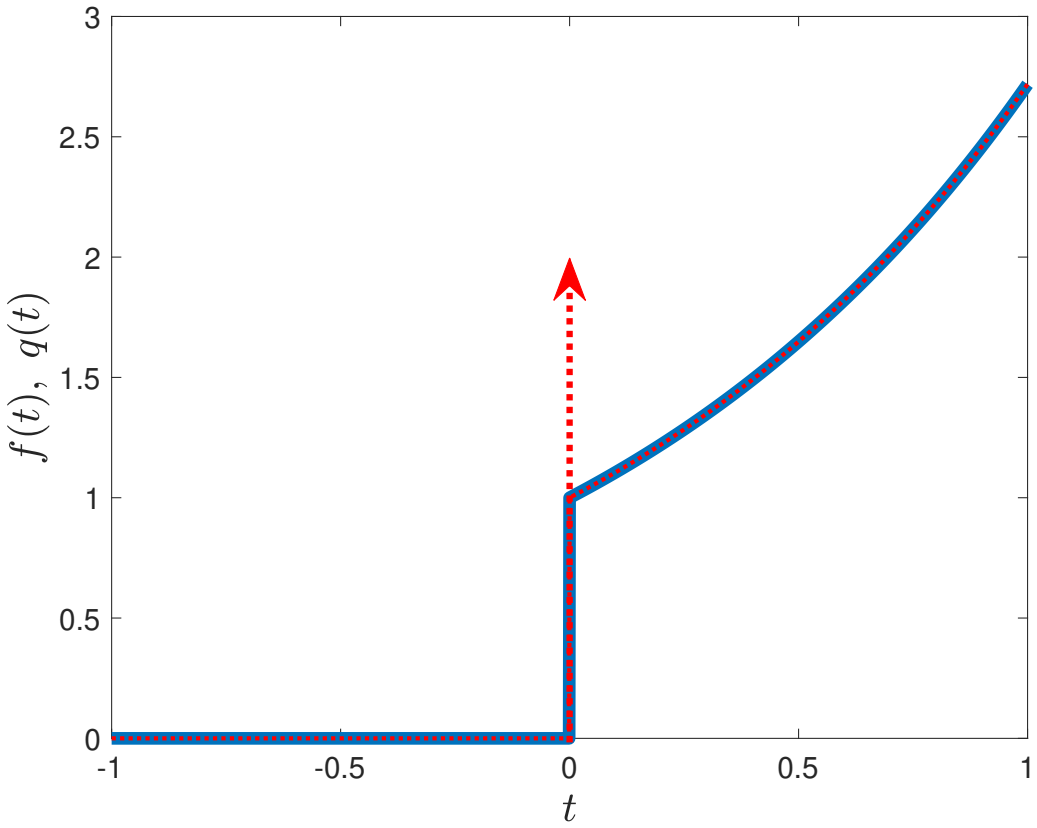
Derivada generalizada

A transformada de Laplace de $q(t)$ definida acima é dada por:

$$\hat{q}(s) = s\hat{f}(s) \ , \quad \mathcal{D}(\hat{q}) = \mathcal{D}(s\hat{f})$$

Transformada de Laplace

Para ilustrar este fato, vamos estudar a derivada da função $f(t) = e^t, \ t \geq 0$, cujo gráfico é apresentado a seguir.



Transformada de Laplace

- A transformada de Laplace da derivada temporal fornece:

$$q(s) = \frac{s}{s-1} - 1 = \frac{1}{s-1}$$

que no domínio do tempo resulta em $q(t) = e^t, \ \forall t \geq 0$.

- A transformada de Laplace da derivada generalizada fornece:

$$q(s) = \frac{s}{s-1} = \frac{1}{s-1} + 1$$

que no domínio do tempo resulta em $q(t) = e^t + \delta(t), \ \forall t \geq 0$, que está ilustrado em vermelho na figura anterior.

Decomposição em frações parciais

Para funções racionais, a inversa da transformada de Laplace pode ser obtida via Decomposição em Frações Parciais com a qual determinamos os escalares α_i tais que

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} e_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{M} \frac{\alpha_i}{(s-p_i)^{n_i}}$$

em que p_i são seus polos e $\sum_{i=1}^{M} n_i = n$. Observe que estamos considerando que cada polo p_i tenha multiplicidade n_i para todo $i = 1, \cdots, M$. A inversa é determinada com a relação

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-p)^{r+1}}\right) = \frac{1}{r!}\frac{d^r}{dp^r}e^{pt} = \frac{t^r}{r!}e^{pt} \ , \ \forall \ t \geq 0$$

válida para todo $r \geq 0$.

Decomposição em frações parciais

Exemplo: A decomposição em frações parciais a seguir

$$\hat{f}(s) = \frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)} = \frac{\alpha_1}{s+3} + \frac{\alpha_2}{(s+2)^3} + \frac{\alpha_3}{(s+2)^2} + \frac{\alpha_4}{s+2}$$

pode ser obtida realizando-se o seguinte procedimento:

- Para polos com multiplicidade 1, como é o caso de $s = -3$, multiplica-se ambos os lados por $s+3$ e substitui-se o resultado por $s = -3$, obtendo-se $\alpha_1 = 2$.
- O polo $s = -2$ possui multiplicidade 3. Neste caso, para a fração com a maior potência, repete-se o procedimento anterior, obtendo-se

$$\frac{s+1}{s+3} = \underbrace{\frac{\alpha_1(s+2)^3}{s+3}}_{r(s)} + \alpha_2 + \alpha_3(s+2) + \alpha_4(s+2)^2$$

que ao substituir por $s = -2$ fornece $\alpha_2 = -1$.

Decomposição em frações parciais

- Para a obtenção de α_3 deriva-se o resultado do passo anterior obtendo-se

$$\frac{2}{(s+3)^2} = \frac{dr}{ds}(s) + \alpha_3 + 2\alpha_4(s+2)$$

que ao substituir por $s = -2$ fornece $\alpha_3 = 2$.

- Para a obtenção de α_4 deriva-se o resultado do passo anterior obtendo-se

$$-\frac{4}{(s+3)^3} = \frac{d^2r}{ds}(s) + 2\alpha_4$$

que ao substituir por $s = -2$ fornece $\alpha_4 = -2$.

Note que $s = -2$ é raiz de $r(s)$ e de suas derivadas até a segunda ordem. Após obter a decomposição em frações parciais, temos

$$f(t) = 2e^{-3t} + (-t^2/2 + 2t - 2)e^{-2t}, \ t \geq 0.$$

Decomposição em frações parciais

Exemplo: Utilizando o procedimento anterior, obtemos as seguintes decomposições em frações parciais:

$$1) \quad \hat{f}_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+5)} = -\frac{1/3}{s+2} + \frac{1}{s+3} - \frac{2/3}{s+5}$$

$$2) \quad \hat{f}_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2(s+3)} = -\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+3}$$

$$3) \quad \hat{f}_3(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+2)(s+3)} = \frac{(2+j)/10}{s+1+j} + \frac{(2-j)/10}{s+1-j} - \frac{2/5}{s+3}$$

cujas funções associadas no domínio do tempo são dadas por:

$$1) \quad f_1(t) = -(1/3)e^{-2t} + e^{-3t} - (2/3)e^{-5t}$$

$$2) \quad f_2(t) = (-t+2)e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

$$4) \quad f_3(t) = e^{-t}\Big((2/5)\cos(t) + (1/5)\mathrm{sen}(t)\Big) - (2/5)e^{-3t}$$

Solução via transformada de Laplace

Considere a equação diferencial já apresentada anteriormente

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{i=0}^{m} e_i \frac{d^i}{dt^i} g(t) \ , \ \forall t \geq 0$$

com condições iniciais $\frac{d^i}{dt^i} y(0)$, para todo $i = 0, \cdots, n-1$. Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros e levando em conta o efeito de impulsos na entrada (derivada generalizada), obtemos

$$\hat{y}(s) = \underbrace{H_0(s)}_{cond.\ iniciais} + H(s)\hat{g}(s)$$

Solução via transformada de Laplace

- Os aspectos mais importantes são :
  - $h_0(t) := \mathcal{L}^{-1}(H_0(s))$ é a parte da solução que depende exclusivamente das condições iniciais.
  - $h(t) := \mathcal{L}^{-1}(H(s))$ é a resposta ao impulso (obtida a partir de condições iniciais nulas). A função $h(t) * g(t)$ obtida pela transformada de Laplace inversa, é a parte da solução que depende exclusivamente da função de entrada.

$$\Downarrow$$

$$y(t) = h_0(t) + \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)d\tau \ , \quad \forall \ t \geq 0$$

Solução via transformada de Laplace

Exemplo: Considere a equação diferencial $\dot{y} + y = g$ com condição inicial $y(0) = y_0$. Vamos analisar dois casos particulares:

- Para $g(t) = \delta(t)$ e $y_0 = 0$, temos :

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s+1}$$

  que fornece a resposta no tempo $y(t) = e^{-t}, \ t \geq 0$. Note que $y(0^+) = 1 \neq y(0) = 0$.
- Para $g(t) = 0$ e $y_0 = 1$, temos

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s+1}$$

  que fornece a mesma resposta no tempo $y(t) = e^{-t}, \ t \geq 0$. Note que $y(0^+) = 1 = y(0)$.

O impulso faz com que a solução seja descontínua em $t = 0$.

Solução via transformada de Laplace

Exemplo: Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{g} - 3g$ com condições iniciais $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$ determinamos

$$H_0(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} \ , \ H(s) = \frac{s-3}{(s+2)(s+1)}$$

Sendo $g(t)$ o degrau unitário temos :

$$\hat{y}(s) = \frac{s^2 + 4s - 3}{s(s+2)(s+1)} = \frac{6}{s+1} - \frac{7/2}{s+2} - \frac{3/2}{s}$$

ou seja

$$y(t) = 6e^{-t} - (7/2)e^{-2t} - 3/2, \ \forall \ t \geq 0$$

Note que $y(0^+) = 1$ e $\dot{y}(0^+) = 1 \neq \dot{y}(0) = 0$. A derivada de $y(t)$ sofreu uma variação brusca em $t = 0$.

Representação de estado

Qualquer equação diferencial linear de ordem n pode ser convertida em um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem. Este sistema de equações diferenciais, geralmente acopladas, denominado representação em espaço de estado da equação original é expresso na forma matricial:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bg(t) \ , \ x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Dg(t) \end{aligned}$$

em que x é o estado do sistema, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz dinâmica, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ é a matrix de entrada $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ é a matriz de saída e $D \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ é o termo de transmissão direta. As matrizes (A, B, C, D) e a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ são tais que a função produzida pela representação de estado $y(t)$ coincida com a solução da equação diferencial em estudo para todo $t \geq 0$.

Representação de estado

Para qualquer matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ define-se a função exponencial de matriz:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

sendo que a soma indicada converge para todo $t \geq 0$.

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace da função $F(t) = e^{At}$ definida para todo $t \geq 0$ é dada por

$$\hat{F}(s) = (sI - A)^{-1} \ , \ \mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(s) > \max \mathrm{Re}(\lambda_i)\}$$

onde λ_i, $i = 1, \cdots, n$ são os autovalores de A.

Representação de estado

Aplicando a transformada de Laplace nas equações de estado temos

$$\hat{y}(s) = H_0(s) + H(s)\hat{g}(s)$$

em que

$$H_0(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 \ , \ H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Com o resultado anterior, obtemos as funções no tempo

$$h_0(t) = Ce^{At}x_0 \ , \ h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

Solução da equação de estado

A solução da equação de estado é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bg(\tau)d\tau \\ y(t) &= Cx(t) + Dg(t) \ , \ \ \forall \ t \geq 0 \end{aligned}$$

Representação de estado

Finalmente, deve ser notado que a representação de estado não é única. Única é a função $H(s)$ e, dada as condições iniciais, única também é a função $H_0(s)$. Com uma representação de estado (A, B, C, D) e uma matriz não singular $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a chamada Transformação de Similaridade permite obter uma nova representação de estado $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$ mas ambas representando a mesma função $H(s)$. De fato, simples cálculos levam a

$$\begin{aligned} H(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \end{aligned}$$

Ademais, observe que

$$\begin{aligned} \det(sI - T^{-1}AT) &= \det(T^{-1}(sI - A)T) \\ &= \det(T^{-1})\det(sI - A)\det(T) = \det(sI - A) \end{aligned}$$

Função de transferência

De maneira genérica, um sistema dinâmico LIT é caracterizado por ter seu comportamento, no decorrer do tempo, descrito por uma equação diferencial linear com coeficientes constantes. A partir das condições iniciais definidas em $t = 0$ e de uma função de entrada $g(t)$ definida para todo $t \geq 0$, a sua saída é dada por

$$\hat{y}(s) = H_0(s) + H(s)\hat{g}(s)$$

em que

Função de transferência

A função $H(s)$ é denominada função de transferência do sistema e $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))$ definida para todo $t \geq 0$ é a sua resposta ao impulso.

A função de transferência de um sistema torna explícito como a entrada influencia a saída.

Função de transferência

Para condições iniciais nulas $H_0(s) = 0$ temos:

$$\hat{y}(s) = H(s)\hat{g}(s) \Longleftrightarrow y(t) = h(t) * g(t)$$

Estabilidade

A função de transferência $H(s)$ é denominada assintoticamente estável se todos os seus polos estiverem localizados na região $\mathrm{Re}(s) < 0$.

Note que reescrevendo a função de transferência como

$$H(s) = \frac{C\mathrm{Adj}(sI - A)B}{\det(sI - A)} + D$$

temos que os polos de $H(s)$ são os autovalores da matriz dinâmica A e, portanto, o sistema é assintoticamente estável se todos os seus autovalores estiverem localizados na região $\mathrm{Re}(s) < 0$.

Forma canônica controlável

Considere um sistema SISO LIT de ordem n com a seguinte função de transferência

$$H(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{g}(s)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

com $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \cdots, n$ e $a_n = 1$. A equação diferencial correspondente é dada por

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i}(t) = g(t), \ \forall t \geq 0$$

que na forma compacta pode ser escrita como

$$D[y] = g$$

em que $D[y]$ é o operador diferencial.

Forma canônica controlável

Para $D[y] = g$ com $a_n = 1$, podemos definir as seguintes variáveis de estado:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \; x_i(t) = y^{(i-1)}(t), \; i = 1, \cdots, n$$

que implicam nas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \; D = [0]$$

Forma canônica controlável

Para o caso mais geral em que

$$H(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{g}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

com $m \leq n-1$, temos que o sistema correspondente $D[y] = N[g]$, com $N[g] = \sum_{i=0}^{m} b_i g^{(i)}(t)$, pode ser reescrito como

$$D[\xi] = g \ , \ y = N[\xi]$$

Assim, definimos as variáveis de estado como sendo

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \ x_i(t) = \xi^{(i-1)}(t), \ i = 1, \cdots, n.$$

Forma canônica controlável

As matrizes A e B são idênticas às anteriores, mas

$$y = N[\xi] = \sum_{i=0}^{m} b_i \xi^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i x_{i+1}$$

o que nos permite determinar as matrizes de saída como sendo

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \; D = [0].$$

Para funções de transferência próprias ($m = n$), podemos escrever

$$H(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{g}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m}(b_i - b_n a_i)s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} + b_n$$

com $a_n = 1$ e, neste caso, a representação de estado é obtida de maneira análoga, mas com $D = b_n$.

A representação que acabamos de apresentar está na forma canônica controlável, que é conveniente para realizar projetos de controle.

Forma canônica controlável

Exemplo: A função de transferência do deslocamento angular do elo rotacional de uma junta robótica é

$$H(s) = \frac{s^2 + 0.12s}{s^2 + 0.12s + 9.4}$$

A representação de estado aqui considerada é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.4 & -0.12 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} g \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} -9.4 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{[1]}_{D} g \end{aligned}$$

Note que os autovalores de A são iguais aos polos de $H(s)$. Isto é sempre verdade!

Resposta em freqüência

A resposta em freqüência de um sistema com função de transferência $H(s)$ é simplesmente dada por $H(j\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Isto exige que todos os pontos do eixo das ordenadas do plano complexo estejam no domínio de $H(s)$, isto é

$$s = j\omega \in \mathcal{D}(H) \ , \ \forall \ \omega \in \mathbb{R}$$

Desta forma, devemos nos restringir ao cálculo da resposta em freqüência apenas para sistemas assintoticamente estáveis.
Para esta classe de sistemas, o efeito das condições iniciais desaparece no decorrer do tempo pois $H_0(s)$ e $H(s)$ têm os mesmos polos e, portanto, $\lim_{t\to+\infty} h_0(t) = 0$. A sua saída tende a uma função que depende exclusivamente da entrada, denominada solução de regime permanente.

Resposta em freqüência

Considerando a entrada $g(t) = e^{j\omega_o t}$ para $t \geq 0$ temos

$$\hat{y}(s) = H_0(s) + H(s)\frac{1}{(s - j\omega_o)}$$

cuja decomposição em frações parciais resulta em

$$\hat{y}(s) = H_0(s) + R(s) + \frac{H(j\omega_o)}{(s - j\omega_o)}$$

onde $R(s)$ denota os demais termos da decomposição. Como os polos de $R(s)$ são aqueles de $H(s)$ tem-se $\lim_{t\to+\infty} r(t) = 0$ de tal forma que para t suficientemente grande

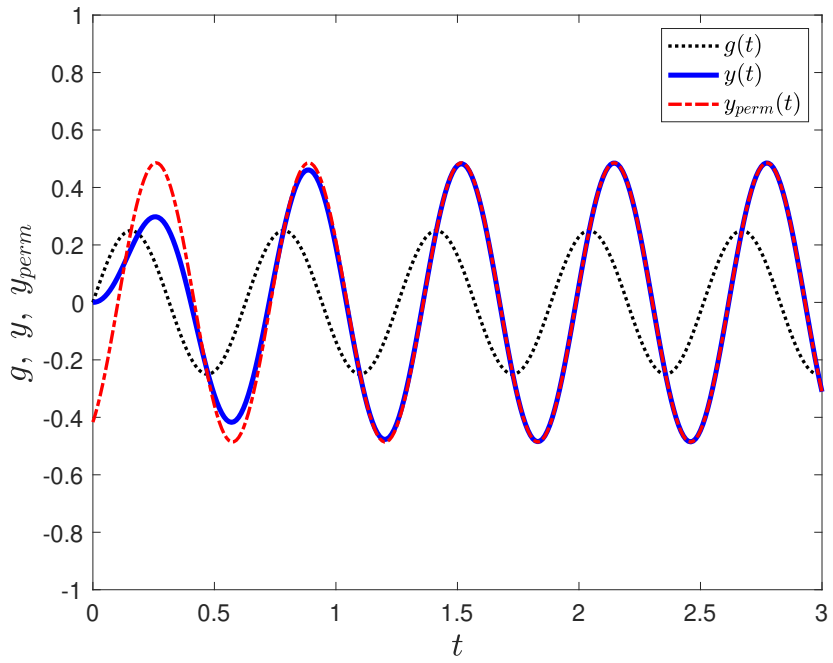
$$y_{perm}(t) = H(j\omega_o)e^{j\omega_o t} = |H(j\omega_o)|e^{j(\omega_o + \angle H(j\omega_o))}$$

indicando que a resposta em regime permanente é idêntica à entrada, com alteração apenas do módulo e da fase, calculadas a partir da resposta em frequência do sistema LIT na frequência ω_o.

Resposta em freqüência

- **Exemplo:** A figura abaixo mostra $y_{perm}(t)$ e a resposta $y(t)$, a partir de condições iniciais nulas, de uma suspensão

$$H(s) = \frac{6s + 100}{s^2 + 6s + 100} \ , \ g(t) = (1/4)\mathrm{sen}(10t)$$



Note que $y(t)$ e $y_{perm}(t)$ coincidem após um certo tempo.

Diagramas de Bode

A resposta em freqüência de um sistema pode ser representada graficamente através de diagramas. Os mais utilizados e disponíveis em vários pacotes computacionais são:

- Diagramas de Bode de Módulo e de Fase: Definidos respectivamente por

$$A(\omega)_{dB} \times \log(\omega) \ , \ \forall \ \omega > 0$$

$$\phi(\omega) \times \log(\omega) \ , \ \forall \ \omega > 0$$

onde $A(\omega)_{dB}$ é o módulo de $H(j\omega)$ expresso em decibéis e $\phi(\omega)$ é a fase de $H(j\omega)$ expressa em graus ou radianos.

Decibel

O módulo de $H(j\omega)$ expresso em decibéis é dado por $A(\omega)_{dB} := 20\log(|H(j\omega)|)$ onde $\log$ denota o logaritmo na base dez.

Diagramas de Bode

A grande vantagem dos diagramas de Bode é que devido à função logarítmica, a multiplicação de amplitudes é convertida em soma de amplitudes e, assim, é possível analisar separadamente a contribuição de cada polo e zero na resposta em frequência do sistema. Embora estes diagramas possam ser determinados numericamente, sem qualquer dificuldade, informações importantes são obtidas analisando os seus diagramas assintóticos de Bode. Considere a função de transferência racional escrita na forma

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \kappa \frac{\prod_{i=1}^{q} N_i(s)}{\prod_{i=1}^{p} D_i(s)}$$

em que $N_i(s)$ e $D_i(s)$ são sempre polinômios de grau 1 ou 2, podendo assumir as formas s, s^2, $\tau_i s + 1$, $\tau_i s^2 + \beta_i s + 1$, com $\tau_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Note que estes últimos estão normalizados para garantir ganho unitário em baixas frequências.

Diagramas de Bode

Utilizando $H(s)$ na estrutura mencionada, temos

$$A(\omega)_{dB} = \kappa_{dB} + \sum_{i=1}^{q} |N_i(j\omega)|_{dB} - \sum_{i=1}^{p} |D_i(j\omega)|_{dB}$$

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^{q} \psi_i - \sum_{i=1}^{p} \phi_i$$

em que $\psi_i = \angle N_i(j\omega)$ e $\phi_i = \angle D_i(j\omega)$. Note que, como mencionado, a contribuição de cada polo e zero pode ser analisada separadamente. A seguir, vamos mostrar através de alguns exemplos, como desenhar os diagramas assintóticos.

Diagramas de Bode

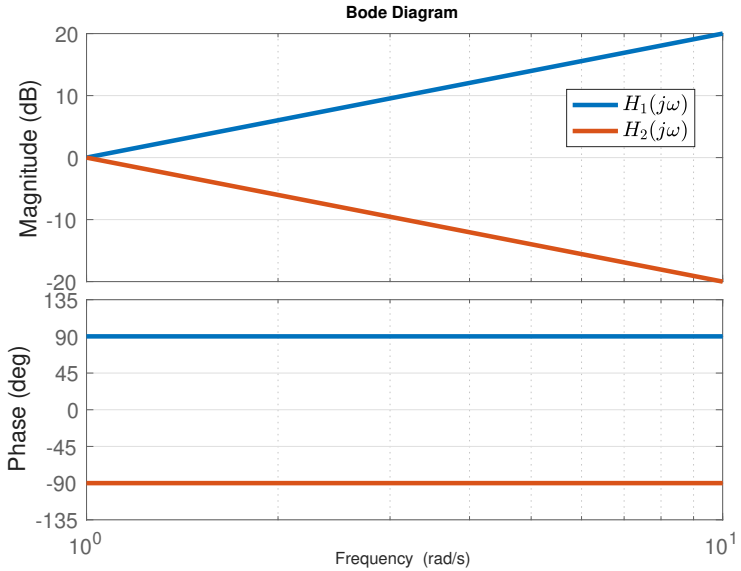
Exemplo: Esboce os diagramas de Bode das funções:

- Para $H_1(s) = s$, temos

$$A_1(\omega)_{dB} = 20\ \log(\omega),\ \ \phi_1(\omega) = 90^o,$$

- Para $H_2(s) = 1/s$, temos

$$A_2(\omega)_{dB} = -20\ \log(\omega),\ \ \phi_2(\omega) = -90^o.$$



Diagramas de Bode

Exemplo: Esboce os diagramas de Bode da função:

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}.$$

O seu módulo em decidel é dado por

$$A(\omega)_{dB} = -20 \log \left(\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1} \right).$$

Para os diagramas assintóticos, fazemos a seguinte **aproximação**:

- Para $\omega << 1/\tau$,temos

$$A(\omega)_{dB} \approx 0, \quad \phi(\omega) \approx 0^o$$

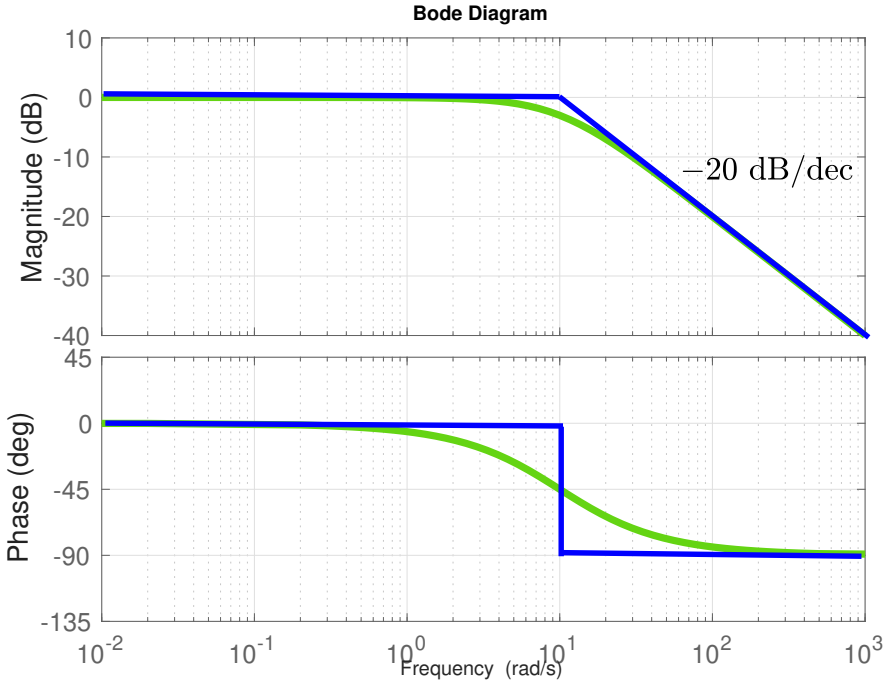
- Para $\omega >> 1/\tau$,temos

$$A(\omega)_{dB} \approx -20 \log(\omega) + 20\log(1/\tau), \quad \phi(\omega) \approx -90^o$$

A frequência $\omega_c = 1/\tau$ onde ocorre a intersecção de ambas as assíntotas é chamada de **frequência de corte**.

Diagramas de Bode

A figura apresenta os diagramas de Bode de $H(s)$ para $\tau = 0.1$.



Note que a aproximação não é boa para frequências próximas de $\omega_c = 10$.

Diagramas de Bode

Exemplo: Esboce os diagramas de Bode da função:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \ \xi \in [0, 1)$$

O seu módulo em decidel é dado por

$$A(\omega)_{dB} = -20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \right)$$

e a sua fase é dada por

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right).$$

Para os diagramas assintóticos, fazemos a seguinte **aproximação**:

- Para $\omega << \omega_n$, temos

$$A(\omega)_{dB} \approx 0, \quad \phi(\omega) \approx 0^o$$

- Para $\omega >> \omega_n$, temos

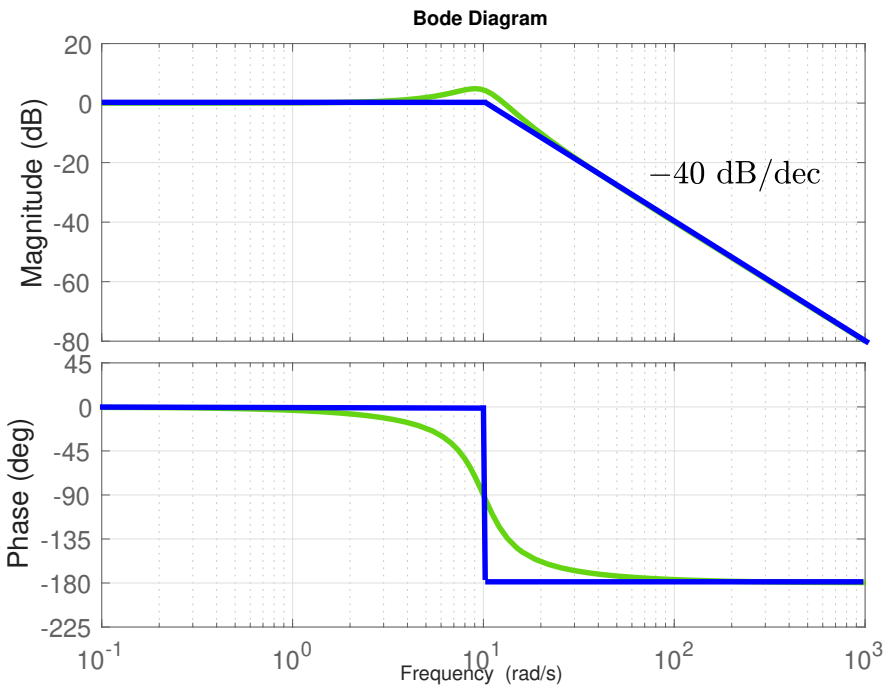
$$A(\omega)_{dB} \approx -40\ \log(\omega) + 40\log(\omega_n), \quad \phi(\omega) \approx -180^o$$

Neste caso, $\omega_c = \omega_n$ é a **frequência de corte**.

Note que o fator de amortecimento ξ não é levado em conta no diagrama assintótico e, portanto, a sua influência não é evidenciada nestes diagramas.

Diagramas de Bode

A figura a seguir apresenta os diagramas de Bode de $H(s)$ para $\omega_n = 10$ e $\xi = 0.3$.



A aproximação não é precisa para frequências próximas de $\omega_c = 10$ rad/s e a influência de ξ não aparece no diagrama assintótico.

Diagramas de Bode

Exemplo: Para esboçar os diagramas de Bode da função:

$$H(s) = \frac{s+10}{(s+1)^2} = 10\frac{0.1s+1}{(s+1)^2}$$

o primeiro passo é reescrevê-la na forma de ganhos unitários para baixas frequências. Assim, podemos desenhar os diagramas de cada um dos fatores levando em conta que

$$A(\omega)_{dB} = 20 + |0.1\omega j + 1|_{dB} - |(\omega j + 1)^2|_{dB}$$

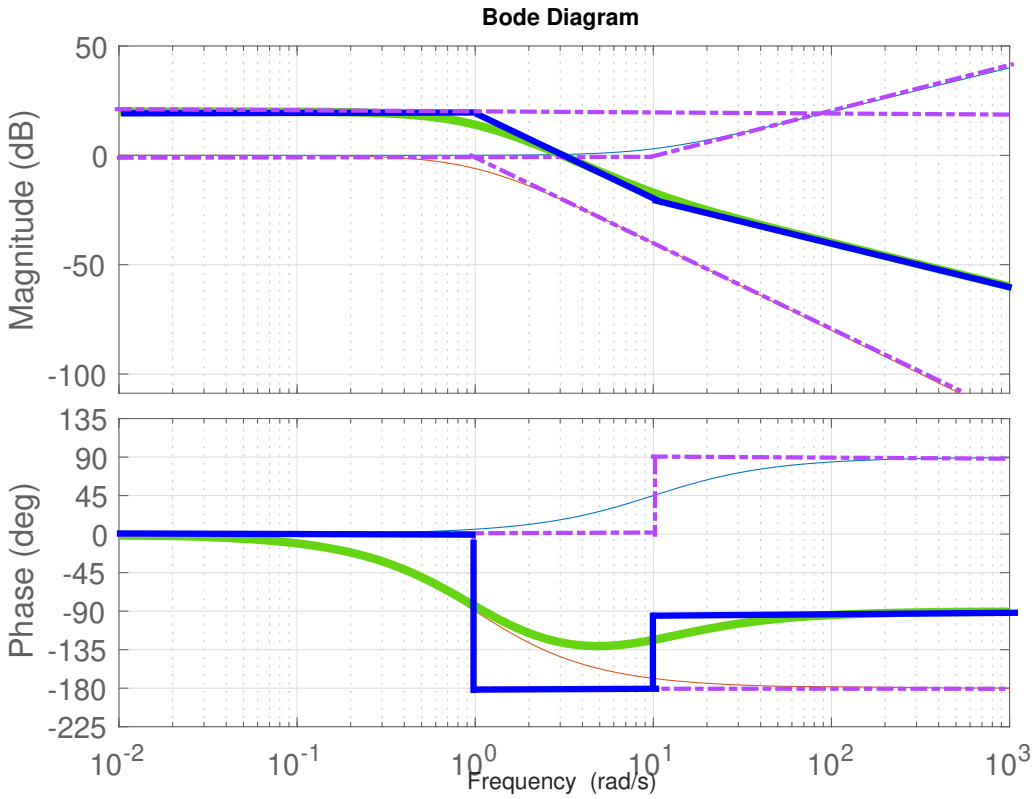
e que

$$\phi(\omega) = \angle(0.1\omega j + 1) - \angle(\omega j + 1)^2.$$

Veja as curvas em magenta no gráfico a seguir. Note que a influência do ganho 10 aparece sempre. Entretanto, a do polo duplo $s = -1$ aparece após $\omega = 1$ rad/s e a do zero $s = -10$ apenas após a frequência $\omega = 10$ rad/s.

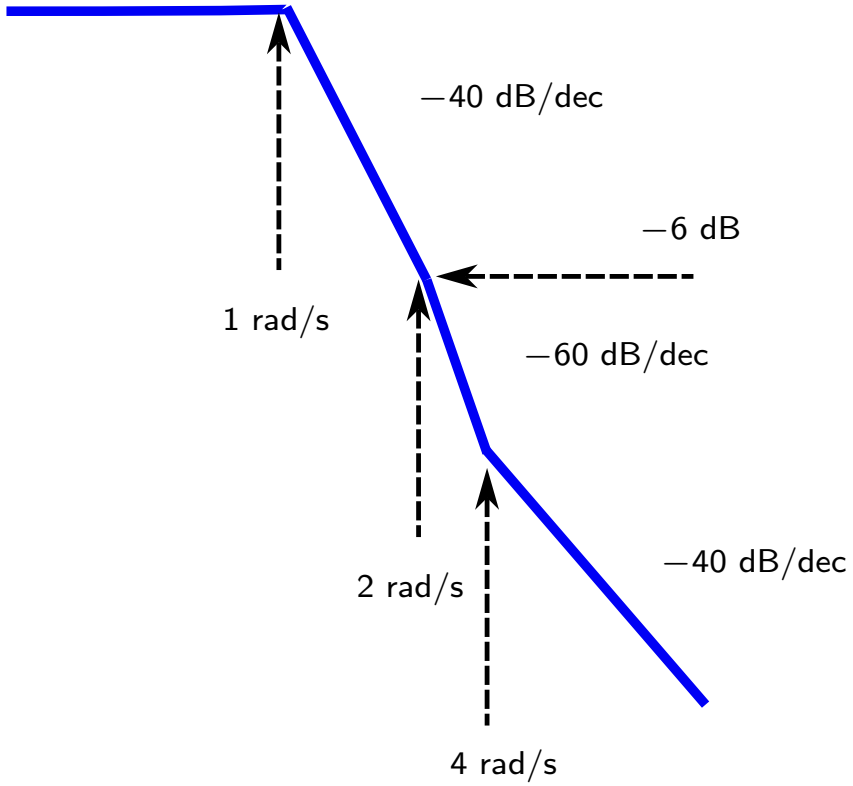
Diagramas de Bode

Na figura a seguir em verde temos os diagramas de Bode de $H(s)$ e em azul os diagramas assintóticos.



Diagramas de Bode

Exemplo: Na figura a seguir é apresentado o diagrama assintótico de Bode de módulo da função de transferência $H(s)$ de fase mínima com todos os polos e zeros reais. Determine $H(s)$.



Diagramas de Bode

Como o sistema é de fase mínima, ou seja possui todos os seus polos e zeros no semi-plano esquerdo do plano complexo, podemos determinar $H(s)$ utilizando apenas o diagrama assintótico de módulo.

- O primeiro passo é escrever a função $H(s)$ levando em conta apenas as suas dinâmicas (polos e zeros):

$$H(s) = \kappa \frac{(s/4+1)}{(s+1)^2(s/2+1)}$$

- Para a determinação do ganho κ, temos que $|H(2j)| \approx 1/2$ (-6 dB). Note que em $\omega = 2$, a contribuição do zero em $s = -4$ não aparece no diagrama assintótico e, portanto

$$|H(2j)| \approx \frac{1}{2} = \frac{\kappa}{4}$$

indicando que $\kappa = 2$.

Diagrama Polar

Vamos agora estudar outra forma muito comum de representar $H(j\omega)$, conhecida como diagrama polar. Neste diagrama, a trajetória da resposta em frequência é desenhada no plano complexo, onde cada ponto tem módulo $|H(j\omega)|$ e fase $\angle H(j\omega)$, à medida que ω varia de zero a infinito.

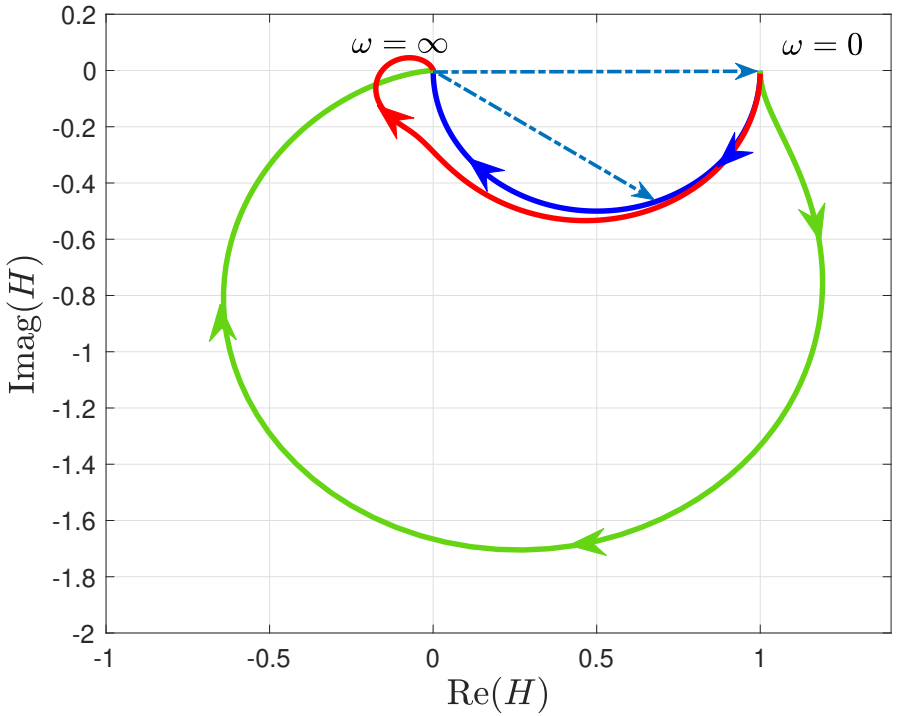


Diagrama Polar

No gráfico anterior, em azul temos o diagrama polar de $H_1(s)$ e em verde de $H_2(s)$ e em vermelho de $H_3(s)$ dados por

$$H_1(s) = \frac{1}{0.1s+1}, \quad H_2(s) = \frac{100}{s^2+6s+100}$$

$$H_3(s) = \frac{100}{(s^2+6s+100)(s+1)}$$

Note que:

- A distância a partir da origem representa a magnitude $|H_i(j\omega)|$.
- O ângulo com relação ao eixo real positivo representa a fase $\angle H_i(j\omega)$.
- A fase varia positivamente no sentido anti-horário.
- É possível realizar um esboço do diagrama polar do sistema a partir dos diagramas de Bode de módulo e de fase.

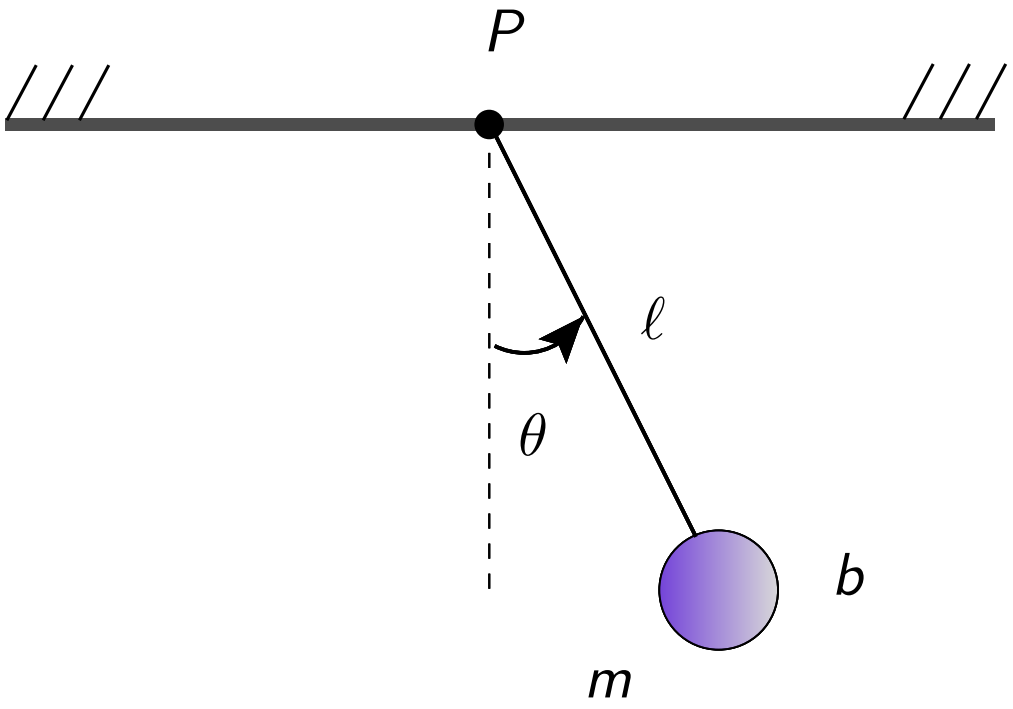
Modelagem de sistemas dinâmicos

Modelar um sistema dinâmico consiste em obter equações matemáticas que representem adequadamente o seu comportamento real. Estas equações baseiam-se em quatro atributos: leis básicas, simplicidade, precisão e validação. Um bom modelo deve ser caracterizado por máxima simplicidade e máxima precisão, que são características muitas vezes difíceis de serem obtidas ao mesmo tempo.

Geralmente ao modelarmos um sistema dinâmico real, obtemos um modelo não linear. Entretanto, na maioria das vezes, nosso interesse está voltado somente para uma região do espaço de estado que contém um ponto de interesse, chamado de ponto de operação. Isto ocorre porque na prática nosso objetivo é fazer com que a operação do sistema fique restrita a esta região. Por este motivo, é de grande interesse obter um modelo linearizado mais simples que descreve, com precisão, a dinâmica real do sistema próximo deste ponto.

Modelagem de sistemas dinâmicos

Considere, por exemplo, um pêndulo simples de massa m, com sua extremidade fixa no ponto P por uma haste rígida de massa desprezível e comprimento ℓ e imerso em um meio com atrito viscoso b, como ilustrado a seguir:



Modelagem de sistemas dinâmicos

Utilizando a segunda lei de Newton obtemos o seguinte modelo matemático do sistema:

$$m\ell^2\ddot{\theta} + b\ell^2\dot{\theta} + mg\mathrm{sen}(\theta)\ell = 0$$

Trata-se de um modelo não-linear de segunda ordem, cuja solução pode ser obtida somente por simulação numérica. Definindo $\xi_1 = \theta$ e $\xi_2 = \dot{\theta}$ como sendo as suas variáveis de estado, obtemos a seguinte representação em espaço de estado do sistema

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{g}{\ell}\mathrm{sen}(\xi_1) - \frac{b}{m}\xi_2\end{aligned}$$

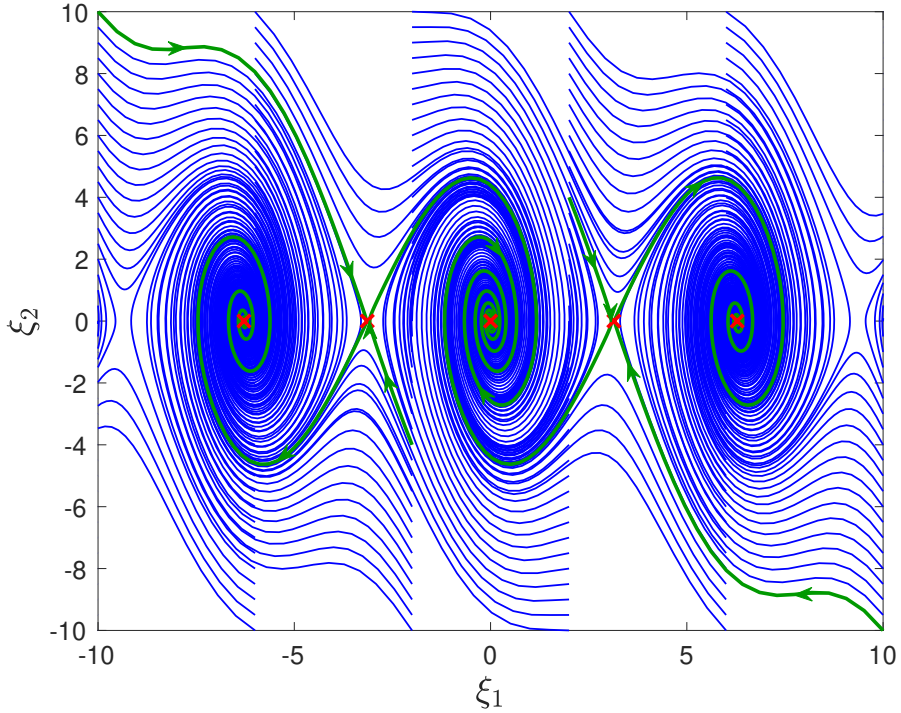
Os pontos de equilíbrio podem ser obtidos fazendo $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = 0$:

$$\xi_{1e} = \kappa\pi \quad , \quad \xi_{2e} = 0$$

com $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Modelagem de sistemas dinâmicos

Os gráficos com as trajetórias de (ξ_1, ξ_2) são chamados de plano de fase e apresentados a seguir para várias condições iniciais:



Os seguintes valores foram adotados $\ell = 1$ [m], $m = 1$ [kg], $g = 9.8$ [m/s^2] e $b = 1$ [N s/m]. Note que as trajetórias podem se comportar de maneira diferente no entorno de cada ponto de equilíbrio.

Modelagem de sistemas dinâmicos

Em geral, uma equação diferencial pode ser descrita por

$$\dot{\xi}(t) = f(\xi(t)),\ \xi(0) = \xi_0$$

em que $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $f(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ define a função de interesse que descreve sistema. Os pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico são definidos como segue:

Ponto de equilíbrio

O ponto $\xi_e \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto de equilíbrio do sistema $\dot{\xi} = f(\xi)$ se escolhida a condição inicial $\xi(0) = \xi_e$ então $\xi(t) = \xi_e,\ \forall t \geq 0$.

Da definição, temos que o ponto de equilíbrio pode ser obtido de

$$f(\xi_e) = 0$$

que, obviamente, pode ter múltiplas soluções.

Linearização

Considerando novamente o sistema $\dot{\xi} = f(\xi)$ na vizinhança do ponto de equilíbrio $\xi_e \in \mathbb{R}^n$, cada componente $f_i(\xi)$, $i = 1, \cdots, n$, pode ser aproximada por série Taylor considerada até a primeira ordem:

$$f_i(\xi) \approx f_i(\xi_e) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\xi_e)}{\partial \xi_j}(\xi_j - \xi_{ej}), \; i = 1, \cdots, n$$

que pode ser escrita de forma mais compacta como

$$f(\xi) \approx f(\xi_e) + A(\xi - \xi_e)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz quadrada com elementos

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(\xi_e), \; i, j = 1, \cdots, n.$$

também chamada de matriz Jacobiana de $f(\xi)$.

Linearização

Definindo a variável auxiliar $x = \xi - \xi_e$ e lembrando que $f(\xi_e) = 0$, obtemos a aproximação linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\xi} \\ &= f(\xi) \\ &\approx \cancelto{0}{f(\xi_e)} + A(\xi - \xi_e) \\ &\approx Ax \end{aligned}$$

cujo único ponto de equilíbrio é a origem $x_e = 0$, ou seja, $\xi = \xi_e$. Neste caso, o sistema apresenta solução fechada dada por

$$\xi(t) = \xi_e + e^{At}(\xi_0 - \xi_e), \ \forall t \geq 0$$

Comentários:

- Esta aproximação é válida em uma região próxima do ponto de equilíbrio ξ_e.

Linearização

Para fins de ilustração, vamos linearizar o pêndulo para dois pontos de equilíbrio distintos. Note que neste caso

$$f_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_2, \quad f_2(\xi_1, \xi_2) = -(g/\ell)\mathrm{sen}(\xi_1) - b/m\xi_2$$

Assim, temos

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}_{(\xi_{1e}, \xi_{2e})} x$$

No caso do pêndulo, temos:

Para $(\xi_{1e}, \xi_{2e}) = (0, 0)$:

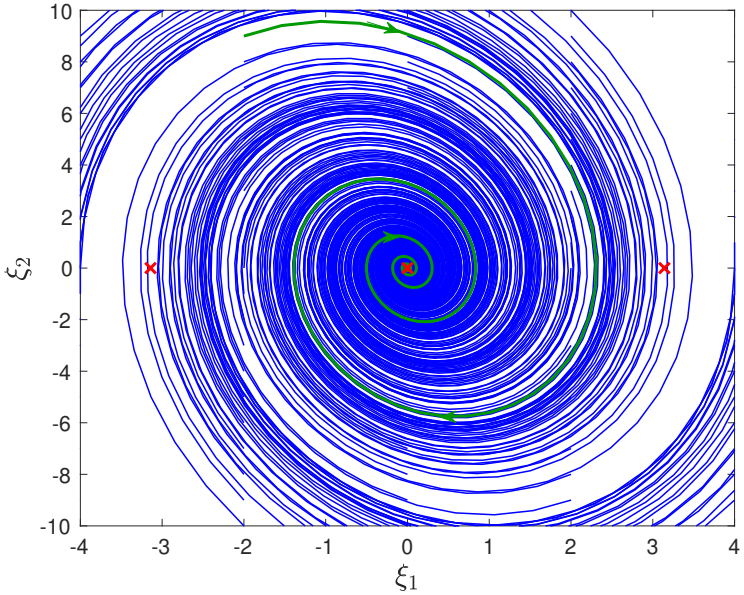
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell & -(b/m) \end{bmatrix} x$$

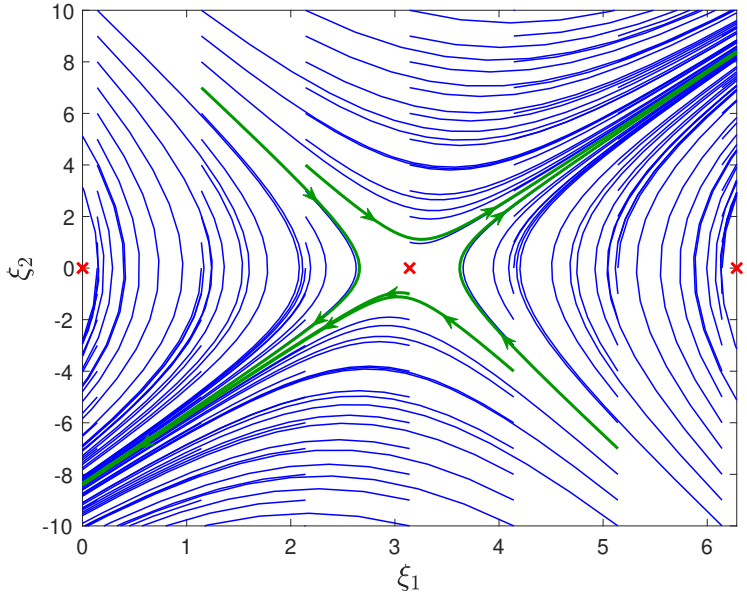
Para $(\xi_{1e}, \xi_{2e}) = (\pi, 0)$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & -b/m \end{bmatrix} x$$

Linearização

Considerando $\ell = 1$ [m], $m = 1$ [kg], $g = 9.8$ [m/s^2] e $b = 1$ [N s/m], as figuras a seguir apresentam o plano de fase de ambos os sistemas aproximados para $(\xi_{1e}, \xi_{2e}) = (0, 0)$ e $(\xi_{1e}, \xi_{2e}) = (\pi, 0)$.





Comparando com o plano de fase do sistema não-linear podemos observar que o sistema aproximado é adequado nas proximidades do ponto de equilíbrio.

Linearização

Considere agora, um sistema mais geral com entrada de controle $u_N \in \mathbb{R}^m$, ou seja, $\dot{\xi} = f(\xi, u_N)$ onde o objetivo é estabililizá-lo em torno de um ponto genérico ξ_e. Neste caso, precisamos calcular o valor de u_{Ne} da forma

$$f(\xi_e, u_{Ne}) = 0$$

que será responsável por manter o sistema em equilíbrio na posição desejada. A linearização segue o mesmo procedimento anterior, mas considerando também a entrada de controle

$$f_i(\xi, u) \approx f_i(\xi_e, u_{Ne}) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\xi_e, u_{Ne})}{\partial \xi_j}(\xi_j - \xi_{ej}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i(\xi_e, u_{Ne})}{\partial u_k}(u_{Nk} - u_{Nek})$$

para todo $i = 1, \cdots, n$.

Linearização

Definindo $u = u_N - u_{Ne}$ a expressão anterior pode ser escrita de forma mais compacta como

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

em que

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(\xi_e, u_{Ne}) \quad , \quad b_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial u_{Nk}}(\xi_e, u_{Ne})$$

para $i, j = 1, \cdots, n$ e $k = 1, \cdots, m$.

Para o pêndulo estudado, acrescentando um torque de controle u_N aplicado no sentido anti-horário, temos

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= -\frac{g}{\ell}\mathrm{sen}(\xi_1) - \frac{b}{m}\xi_2 + \frac{u_N}{m\ell^2}
\end{aligned}$$

Linearização

Se desejarmos equilibrar o pêndulo na posição $(\xi_{1e}, \xi_{2e}) = (\pi/4, 0)$ o valor de u_{Ne} necessário é

$$u_{Ne} = \frac{\sqrt{2}gm\ell}{2}$$

e o sistema linearizado fica

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2}g/(2\ell) & -b/m \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/(m\ell^2) \end{bmatrix}}_{B} u.$$

Modelagem de sistemas mecânicos

A elaboração de um modelo torna-se mais simples se :

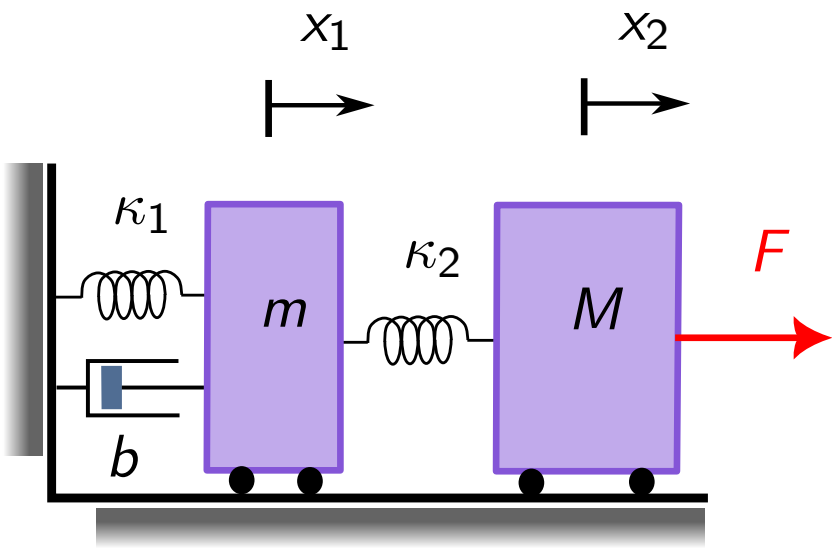
- O sistema for decomposto em partes, identificando as interações entre elas (forças e momentos).
- As forças externas forem identificadas e modeladas.
- As forças produzidas pelos dispositivos básicos (molas e amortecedores) forem consideradas dissipativas segundo os referenciais inerciais adotados.
- O Princípio de D'Alembert for adotado :

Princípio de D'Alembert

Em cada instante de tempo, incluída a força (torque) de inércia como dissipativa, a resultante das forças que agem no centro de massa é nula.

Modelagem de sistemas mecânicos

No sistema a seguir uma força externa com intensidade F é aplicada no sistema. Deseja-se obter o deslocamento da massa m a partir do repouso.



Com o procedimento anterior obtemos :

$$m \quad : \quad m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + \kappa_1 x_1 + \kappa_2(x_1 - x_2) = 0$$

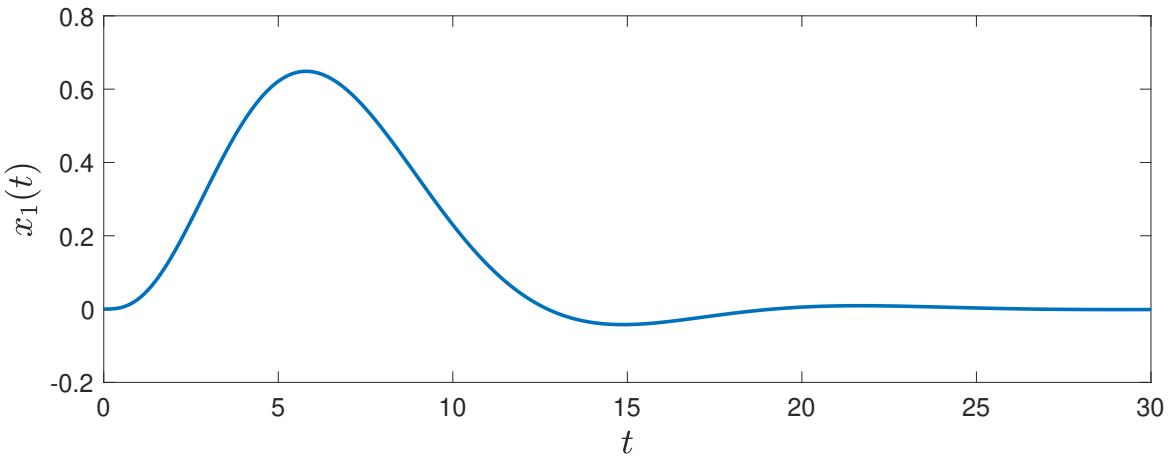
$$M \quad : \quad M\ddot{x}_2 + \kappa_2(x_2 - x_1) = F$$

Modelagem de sistemas mecânicos

Aplicando a Transformada de Laplace para condições iniciais nulas, obtemos a seguinte função de transferência

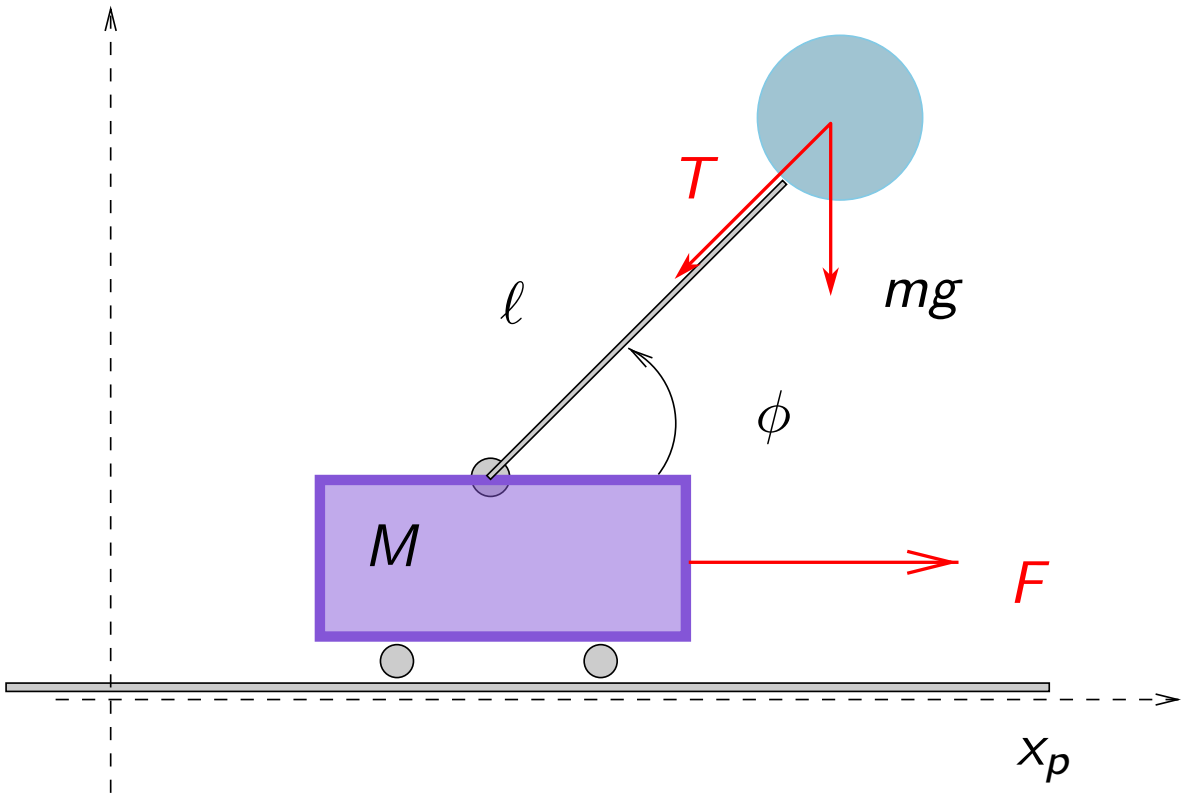
$$\frac{\hat{x}_1(s)}{\hat{F}(s)} = \frac{\kappa_2}{(Ms^2 + \kappa_2)(ms^2 + bs + \kappa_1 + \kappa_2) - \kappa_2^2}$$

Utilizando os valores numéricos $m = 1$ [kg], $M = 2$ [kg], $\kappa_1 = 0{,}25$ [N/m], $\kappa_1 = 0{,}5$ [N/m] e $b = 1,5$ [Ns/m], e considerando F igual ao impulso unitário, obtemos a seguinte resposta do sistema.



Modelagem de sistemas mecânicos

O sistema abaixo mostra um pêndulo invertido montado sobre um carro e imerso em um meio isento de atrito. Deseja-se equilibrar o pêndulo na posição vertical $\phi_e = 90^o$ através da aplicação da força F. O carro deve retornar à sua posição original $x_p = 0$.



Modelagem de sistemas mecânicos

Aplicando o princípio de D'Alembert, determinamos:

- Carro na posição horizontal:

$$M\frac{d^2}{dt^2}x_p = T\cos(\phi) + F$$

- Pêndulo na posição horizontal:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_p + \ell\cos(\phi)) + T\cos(\phi) = 0$$

- Pêndulo na posição vertical:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\ell\mathrm{sen}(\phi)) + T\mathrm{sen}(\phi) + mg = 0$$

Eliminando T temos as equações diferenciais que descrevem o deslocamento do carro x_p e o deslocamento angular do pêndulo ϕ para todo $t \geq 0$.

Considerando que

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(\phi) = -\cos(\phi)\dot{\phi}^2 - \mathrm{sen}(\phi)\ddot{\phi}, \quad \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{sen}(\phi) = -\mathrm{sen}(\phi)\dot{\phi}^2 + \cos(\phi)\ddot{\phi}$$

Das duas primeiras equações obtemos o

- deslocamento horizontal do carro:

$$(M+m)\ddot{x}_p - m\ell\sin(\phi)\ddot{\phi} - m\ell\cos(\phi)\dot{\phi}^2 = F$$

Multiplicando a segunda equação por $-\mathrm{sen}(\phi)$, a terceira por $\cos(\phi)$ e somando o resultado obtemos o

- deslocamento angular do pêndulo:

$$\ell\ddot{\phi} - \mathrm{sen}(\phi)\ddot{x}_p + g\cos(\phi) = 0$$

Estas duas equações diferenciais não-lineares acopladas representam o modelo não-linear do sistema.

Definindo as variáveis de estado do sistema como sendo $\xi_1 = x_p$, $\xi_2 = \dot{x}_p$, $\xi_3 = \phi$, $\xi_4 = \dot{\phi}$ podemos escrever

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M+m & -m\ell\mathrm{sen}(\xi_3) \\ -\mathrm{sen}(\xi_3) & \ell \end{bmatrix}}_{\Psi(\xi)} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m\ell\cos(\xi_3)\xi_4^2 + F \\ -g\cos(\xi_3) \end{bmatrix}}_{\Omega(\xi)}$$

Fazendo $\dot{\xi} = \Psi(\xi)^{-1}\Omega(\xi)$ obtemos a seguinte representação em espaço de estado do sistema não-linear

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \frac{m\ell\cos(\xi_3)\xi_4^2 - mg\mathrm{sen}(\xi_3)\cos(\xi_3)}{(M+m)-m\mathrm{sen}^2(\xi_3)} \\ \xi_4 \\ \frac{m\ell\mathrm{sen}(\xi_3)\cos(\xi_3)\xi_4^2 - (M+m)g\cos(\xi_3)}{(M+m)\ell - m\ell\mathrm{sen}^2(\xi_3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{(M+m)-m\mathrm{sen}^2(\xi_3)} \\ 0 \\ \frac{\mathrm{sen}(\xi_3)}{(M+m)\ell - m\ell\mathrm{sen}^2(\xi_3)} \end{bmatrix} F$$

Linearizando o pêndulo em torno de $x_{pe} = 0$ e $\phi_e = \pi/2$ e definindo $x_1 = x_p - x_{pe}$, $x_2 = \dot{x}_1$, $x_3 = \phi - \phi_e$ e $x_4 = \dot{x}_3$, obtemos o modelo linearizado

$$(M+m)\dot{x}_2 - m\ell\dot{x}_4 = F$$
$$\ell\dot{x}_4 - \dot{x}_2 - gx_3 = 0$$

o que nos fornece a seguinte representação em espaço de estado

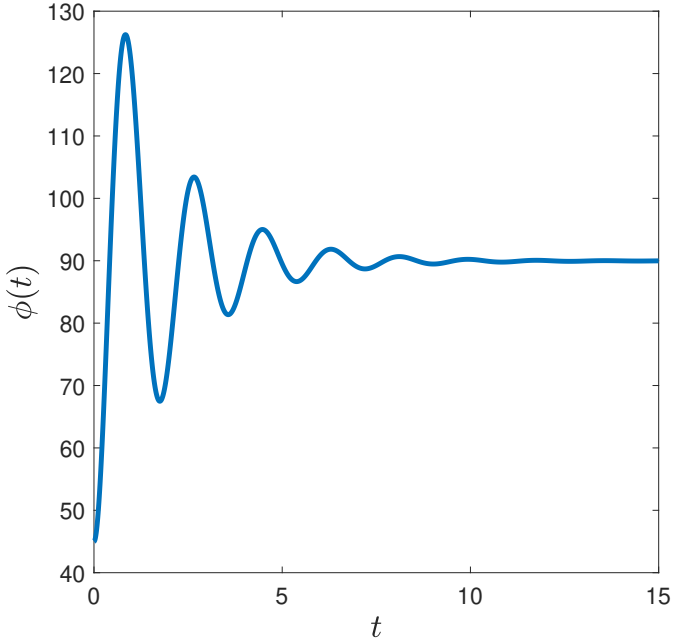
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{M\ell} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{M\ell} \end{bmatrix} F$$

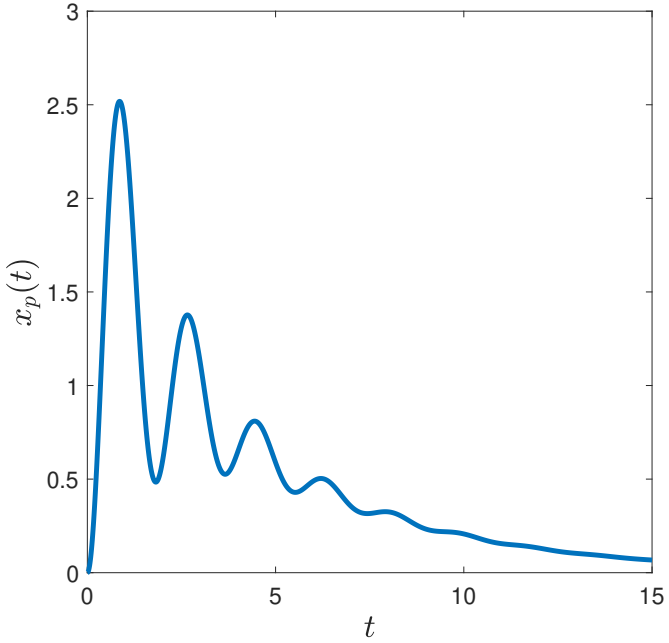
Utilizando os dados numéricos $M = 10$ [kg], $m = 2$[kg], $\ell = 1$[m] e $g = 9.8$[m/s^2] podemos verificar através dos autovalores $\{0, 0, 3.42, -3.42\}$ da matriz A que o sistema é instável.

Entretanto, aplicando a seguinte lei controle em malha fechada

$$F(t) = 10x_1(t) + 50x_2(t) - 300x_3(t) - 100x_4(t)$$

o sistema torna-se estável como pode ser verificado a seguir.

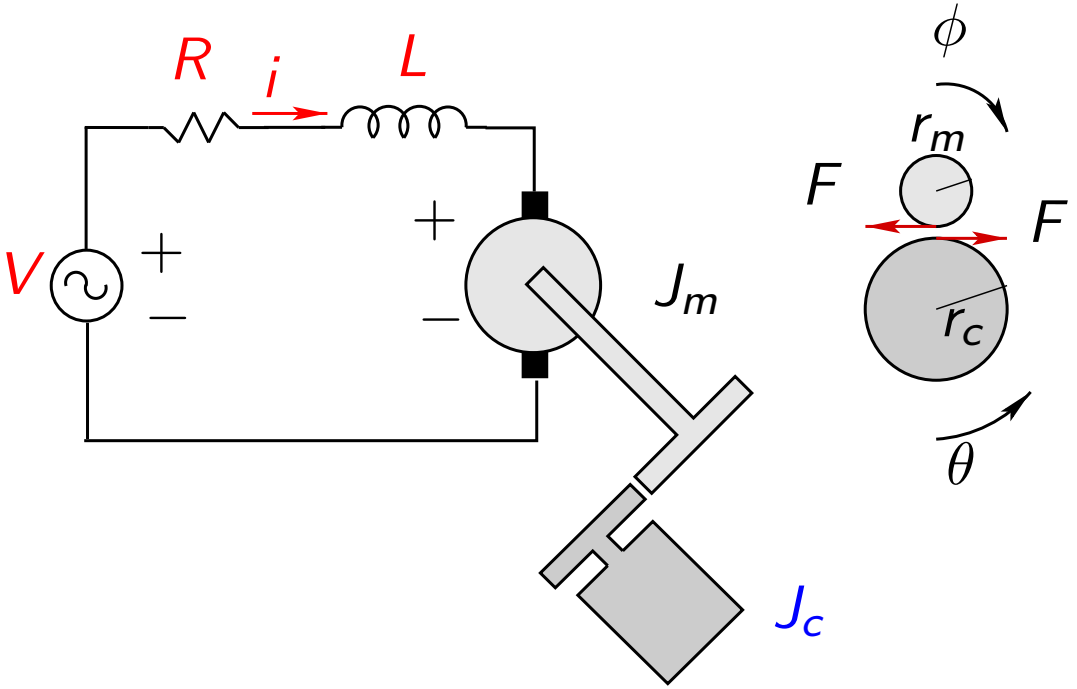




Um dos nossos objetivos neste curso é projetar de forma adequada a força de controle $F(t)$.

Motor de corrente contínua

Considere o motor de corrente contínua apresentado na figura:



Este motor com momento de inércia J_m movimenta uma carga com momento de inércia J_c e coeficiente de atrito viscoso torcional b. A transmissão de força entre o motor e a carga é feita através de engrenagens com raios r_m e r_c.

O modelo matemático deste sistema é dado por:

- Parte Elétrica:

$$L\frac{d}{dt}i + Ri = V - K\frac{d}{dt}\phi$$

- Parte Mecânica: O motor gera um torque $T_{tot} = Ki$ que é transferido à carga através do rotor. Portanto,

$$J_m\frac{d^2}{dt^2}\phi - Fr_m = T_{tot}$$

$$J_c\frac{d^2}{dt^2}\theta + b\frac{d}{dt}\theta + Fr_c = 0$$

A partir da relação $r_m\phi = r_c\theta$ e definindo $c = r_c/r_m$, obtemos

$$(J_c + J_m c^2)\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = cKi$$

Definindo $\nu = \dot{\theta}$, a função de transferência entre a velocidade angular da carga ν e a tensão de alimentação V é dada por

$$G(s) = \frac{\hat{\nu}(s)}{\hat{V}(s)} = \frac{cK}{((J_c + J_m c^2)s + b)(Ls + R) + c^2K^2}$$

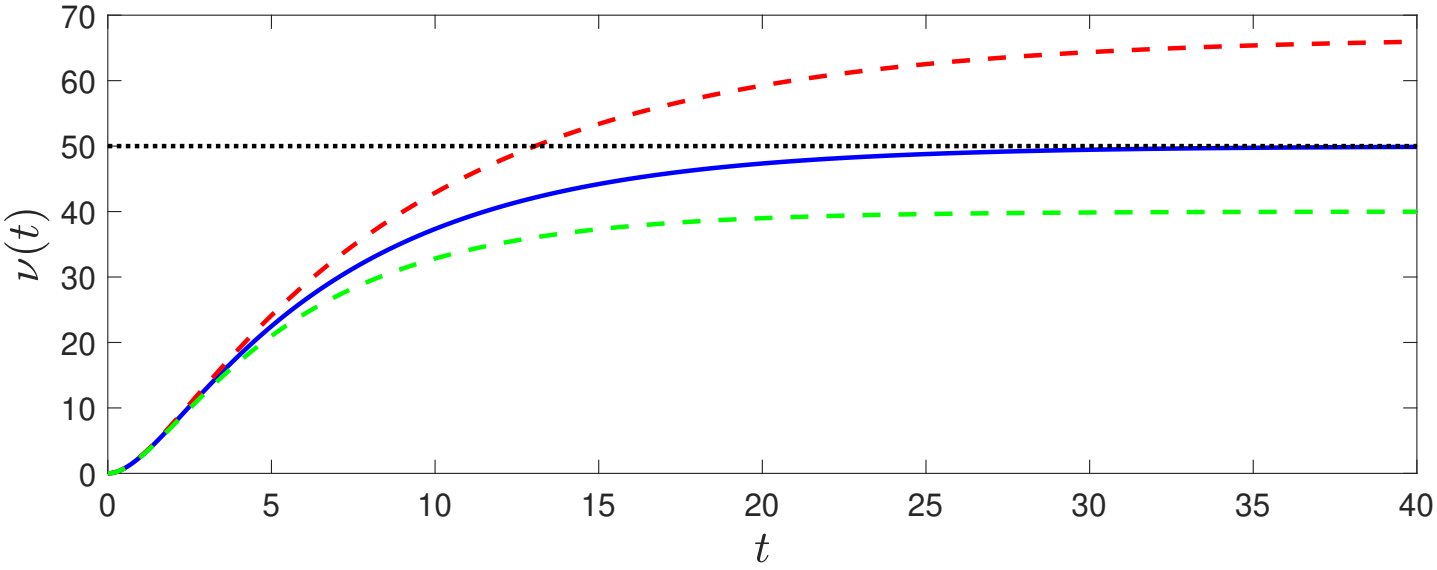
Sobre este sistema, podemos chegar às seguintes conclusões:

- Para quaisquer valores de parâmetros o sistema é sempre assintoticamente estável.
- Para a entrada degrau $\hat{V}(s) = V_0/s$, o teorema do valor final, fornece a seguinte velocidade angular em regime permanente

$$\nu_{perm} = \frac{cK}{Rb + c^2K^2} V_0$$

  que depende de vários parâmetros do motor.
- Para se ter uma velocidade desejada em regime permanente, devemos calcular a tensão V_0 correspondente.

Considerando os dados numéricos $c = 2$, $K = 0.5$ [volts.s], $J_c = 10$ [kg.m^2], $J_m = 1$ [kg.m^2], $b = 1.0$ [N.m.s], $L = 1$ [H] e aplicando um degrau de 100 [volts] obtemos a curva em linha contínua da figura a seguir.



As linhas tracejadas referem-se à resposta do sistema para $b = \{0{,}5, 1{,}5\}$. No próximo capítulo vamos realizar o controle deste sistema de forma que a resposta em regime permanente não se altere com a variação dos parâmetros do sistema.