PRINCÍPIOS DE CONTROLE E SERVOMECANISMO

JOSÉ C. GEROMEL e RUBENS H. KOROGUI

DSCE / Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
UNICAMP, CP 6101, 13083 - 970, Campinas, SP, Brasil,
geromel@dsce.fee.unicamp.br

Campinas, Janeiro de 2007

NOTA AO LEITOR

- Este material foi preparado como suporte às aulas e é inteiramente baseado no livro texto, em fase de redação :
    - José C. Geromel e Rubens H. Korogui, *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos : Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*, 2007.

onde o leitor deverá encontrar maiores informações e detalhes a respeito dos tópicos aqui abordados. Sugestões, de qualquer natureza, que permitam o aprimoramento deste texto serão muito apreciadas e desde já agradecidas.

Conteúdo

Introdução

- No capítulo anterior, realizamos o projeto de controladores no domínio da transformada de Laplace, traduzindo as especificações de projeto nas posições em que os pólos dominantes do sistema em malha fechada deveriam ser alocados.
- Inicialmente, fixamos a estrutura do controlador e calculamos a melhor alocação para seus pólos e zeros, a fim de respeitar o desempenho durante o transitório. Por fim, o ajuste do ganho estático permitiu definir o comportamento em regime.
- Entretanto, com esta técnica não temos atuação eficaz sobre a posição dos pólos não dominantes em malha fechada, o que leva a comportamentos da saída controlada que não são exatamente os especificados.

Introdução

- Esta dificuldade na alocação de todos os pólos de um sistema de controle em malha fechada, pode ser contornada aumentando-se o número de parâmetros do controlador.
- Para um sistema de ordem n, se dispusermos de, no mínimo, n parâmetros de projeto poderíamos alocar os n pólos em malha fechada em posições pré-especificadas.
- Porém, o aumento do número de graus de liberdade no projeto do controlador é acompanhado pelo aumento de sua complexidade e, portanto, de seu custo.
- Neste capítulo abordaremos o projeto de controladores no contexto de espaço de estado e estudaremos como alocar convenientemente os pólos de um sistema em malha fechada, como uma alternativa à resolução de equações Diofantinas.

Realimentação de estado

- Nosso enfoque será restrito a sistemas dinâmicos que possuam apenas uma entrada e uma saída com função de transferência expressa na forma

$$G(s) = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \cdots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} + d$$

com $m < n$.

- Denotando a entrada do sistema por $u(t)$ e sua saída por $y(t)$, podemos representá-lo, alternativamente, através das equações de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$ e $y(t) \in \mathbb{R}$.

Realimentação de estado

- A correspondência entre os parâmetros da função de transferência $G(s)$ com as matrizes da sua representação de estado é dada pela forma canônica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad D = d$$

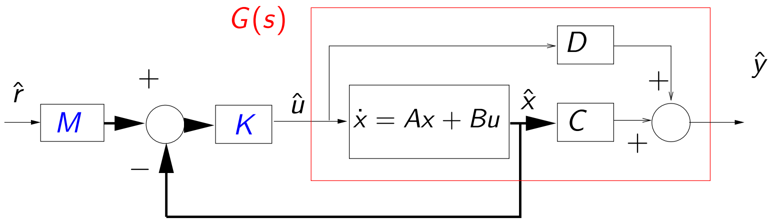
- Condições iniciais podem ser impostas através da especificação do estado inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Realimentação de estado

- Portanto, concluímos que as dimensões das matrizes envolvidas são $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ e $D \in \mathbb{R}$. A maneira como elas definem a função de transferência do sistema é
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$
- Um procedimento bastante simples para se projetar um controlador com n parâmetros livres é calcular um vetor $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ de modo que cada um de seus componentes multiplique uma variável de estado, a fim de sintetizar o sinal de controle $u(t)$. Esta estratégia de controle é denominada realimentação de estado.

Realimentação de estado

- Esta estrutura de controle é representada no diagrama



- Esta estratégia de projeto requer que todos os estados sejam mensuráveis, o que nos obriga a medir as n variáveis de estado, ou caso não seja possível fazê-lo, devemos estimá-las.

Realimentação de estado

- A partir do diagrama de blocos anterior temos

$$u(t) = K(Mr(t) - x(t))$$

onde $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ e $M \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Observe que r é a referência para a saída y enquanto que Mr é a referência para o estado. Os ganhos K e M são variáveis a serem projetadas. Assim, o sistema em malha fechada fica definido pelas equações de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + BKMr \quad , \quad x(0) = x_0 \\ y &= (C - DK)x + DKMr \end{aligned}$$

cuja função de transferência é dada por

$$F(s) = (C - DK)\Big(sI - (A - BK)\Big)^{-1} BKM + DKM$$

Realimentação de estado

- A partir desta descrição, as seguintes considerações são pertinentes:
  - Podemos determinar o vetor de ganho K de tal forma a alocar os pólos do sistema em malha fechada em posições adequadas no plano complexo, de acordo com os critérios de desempenho especificados para o projeto.
  - Com $S(s) = (C - DK)(sI - (A - BK))^{-1}B + D$ escalar, após a determinação de K podemos calcular M de tal forma que $F(0) = S(0)KM = 1$. Por exemplo

    $$M = S(0)^{-1}K'(KK')^{-1}$$

    faz com que o erro em regime permanente para a entrada degrau seja sempre nulo.
- Calculamos K para posicionar os pólos do sistema em malha fechada e, em seguida, determinamos o ganho de referência M para assegurar o desempenho em regime permanente.

Projeto do regulador

- Dado um sistema linear assintoticamente estável com entrada constante, a sua saída em regime permanente será constante. Se ele for submetido a um distúrbio externo ou algum de seus parâmetros se alterar, deseja-se que a sua saída retorne ao valor original após um determinado tempo - transitório. Esta propriedade é denominada comportamento regulador do sistema.
- Ao tratarmos sistemas lineares, podemos encarar o problema de regulação de maneira mais simples, impondo que

$$r(t) = 0 \implies \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \; \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

Ou, em outras palavras, o sistema em malha fechada deve ser assintoticamente estável.

Projeto do regulador

- No contexto de realimentação de estado o problema de regulação da saída deve ser formulado da seguinte maneira: Calcular um vetor de constantes

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

de tal forma que o sinal de controle $u = -Kx$ garanta a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Dada a sua representação de estado, fixando $r = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) \quad , \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= (C - DK)x(t) \end{aligned}$$

Projeto do regulador

- Com as matrizes A e B da representação de estado anteriormente consideradas, determinamos a equação característica do sistema em malha fechada

$$\det(sI - (A - BK)) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + k_{i+1})s^i$$

- Se os pólos do sistema em malha fechada são especificados, então conhecemos os coeficientes $p_0, \cdots, p_{n-1}$ do polinômio

$$P(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i$$

cujas raízes são os referidos pólos. Igualando estes polinômios obtemos

$$K = \begin{bmatrix} p_0 - a_0 & p_1 - a_1 & \cdots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Projeto do regulador

- Os seguintes aspectos são importantes :
  - O ganho de realimentação K que acabamos de determinar só é válido quando as matrizes A e B estiverem na forma canônica apresentada anteriormente.
  - A técnica de projeto via realimentação de estado é escolher as raízes do polinômio $P(s)$ de modo que os pólos dominantes do sistema em malha fechada apresentem as características desejadas da resposta transitória.
  - Com relação aos demais pólos, eles devem estar suficientemente afastados, à esquerda, dos pólos dominantes.
- O exemplo a seguir dá uma idéia do que ocorre quando tentamos alocar os pólos muito distantes do eixo imaginário. Deve-se esperar que o ganho aumente quando desejamos fazer com que o sistema responda com um tempo de estabilização menor.

Exemplo

- A representação des estado do motor de corrente contínua já considerado é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1429 & -1.0714 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0.0714 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

onde y é a velocidade angular da carga e u a tensão de alimentação. O objetivo é determinar os ganhos $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ e $M \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ de tal forma que o sistema em malha fechada:

  - seja estável e acompanhe um degrau unitário com erro nulo em regime permanente.
  - não apresente sobre-elevação no sinal de saída, em relação ao degrau de entrada, no domínio do tempo.

Exemplo

- Três casos distintos foram considerados :
  - Pólos em malha fechada definidos por $P(s) = (s + 0.25)^2$.

$$K = \begin{bmatrix} -0.0804 & -0.5714 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -0.2114 \\ -1.5022 \end{bmatrix}$$

  - Pólos em malha fechada definidos por $P(s) = (s + 0.50)^2$.

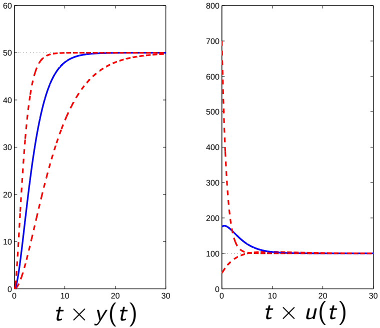
$$K = \begin{bmatrix} 0.1071 & -0.0714 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 22.6335 \\ -15.0890 \end{bmatrix}$$

  - Pólos em malha fechada definidos por $P(s) = (s + 1.00)^2$.

$$K = \begin{bmatrix} 0.8571 & 0.9286 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 7.5171 \\ 8.1442 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Como ilustração, na figura abaixo, mostramos a evolução da saída $y(t)$ e do sinal de controle $u(t)$ para o primeiro, segundo e terceiro casos definidos anteriormente. O sinal de referência adotado foi $\hat{r}(s) = 50/s$ [rad/s].



Exemplo

- É importante observar que :
  - Quanto mais distante os pólos do sistema em malha fechada estiverem dos pólos em malha aberta, maiores devem ser os módulos dos elementos do ganho de realimentação K.
  - No exemplo anterior este efeito fica bastante claro. As duas figuras anteriores mostram que ao alocarmos os pólos em malha fechada mais à esquerda, o sistema responde com um tempo de estabilização menor. Porém, em contra-partida, a intensidade do controle $u(t)$ aumenta de forma expressiva.
- A lei de realimentação obtida é dada por

$$u = K(Mr - x)$$

a qual pode, naturalmente, ser re-escrita na forma $u = hr - Kx$ com $h = KM \in \mathbb{R}$.

Controlabilidade

- Ao realizarmos um projeto via realimentação de estado não basta que tenhamos acesso a todas as variáveis de estado. Devemos nos certificar de que o ganho de realimentação é capaz de alocar arbitrariamente os pólos do sistema em malha fechada.
- Em outras palavras, é necessário que exista uma entrada $u(t)$ que seja capaz de transferir o sistema de um estado inicial $x(0) = 0$ para um estado final qualquer $x(T)$, em um intervalo de tempo finito.
- Esta propriedade é chamada controlabilidade e pode ser verificada através do teste

$$\det(\mathcal{C}) \neq 0 \,, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Controlabilidade

- Se o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ for controlável, com $x(0) = 0$ e $T > 0$ dado temos

$$x(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Podemos verificar que uma possível solução para esta equação é expressa na forma

$$u(t) = B' e^{A'(T-t)} W^{-1} x(T)$$

onde

$$W = \int_0^T e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} d\tau \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Notando que

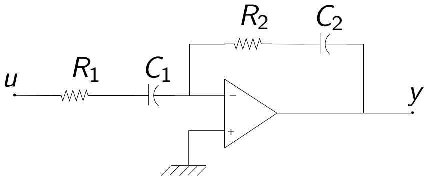
$$\det(\mathcal{C}) \neq 0 \iff W > 0$$

a existência da inversa de $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ está assegurada.

Exemplo

- No circuito abaixo o amp-op é considerado ideal. A tensão u é a entrada e a tensão y é a saída. Considerando como variáveis de estado as tensões v_1 e v_2 nos capacitores, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1/R_1C_1 & 0 \\ 1/R_1C_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/R_1C_1 \\ -1/R_1C_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} R_2/R_1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -R_2/R_1 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$



Exemplo

- Com $u = -Kx$ a equação característica do sistema em malha fechada é
$$s\left(s + \frac{1+k_1}{R_1C_1} - \frac{k_2}{R_1C_2}\right) = 0$$
Uma das raízes não depende do ganho de realimentação $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Este sistema não é controlável.
- A matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ é singular
$$\mathcal{C} = \frac{1}{R_1C_1}\begin{bmatrix} 1 & -1/R_1C_1 \\ -C_1/C_2 & 1/R_1C_2 \end{bmatrix}$$
- A matriz W é singular para todo $T > 0$
$$W = \left(\frac{1-e^{-2T/R_1C_1}}{2R_1C_1}\right)\begin{bmatrix} 1 & -C_1/C_2 \\ -C_1/C_2 & C_1^2/C_2^2 \end{bmatrix}$$

Regulador linear quadrático

- Não é fácil decidir onde alocar os pólos de um determinado sistema dinâmico que se deseja controlar. Pólos estáveis muito distantes do eixo imaginário geram as seguintes implicações:
    - O sistema em malha fechada responde mais rapidamente.
    - A largura de faixa aumenta e, conseqüentemente, o sistema pode não atenuar de forma adequada ruídos de alta freqüência.
    - Os ganhos de realimentação tornam-se elevados.
    - O controlador deve gerar um sinal de grande amplitude para controlar o sistema.
- Para conciliar um comportamento transitório adequado para o sistema em malha fechada com a energia do sinal de controle dentro de limites aceitáveis, define-se um critério de desempenho que nos permite calcular o ganho de realimentação de estado.

Regulador linear quadrático

- O critério mais conhecido consiste em encontrar uma lei de controle de modo a minimizar

$$J = \int_0^\infty \left(x(t)' Q x(t) + \rho u(t)^2 \right) \, dt$$

onde $x(t)$ e $u(t)$ satisfazem as equações de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \; , \; u(t) = -Kx(t)$$

a partir da condição inicial $x(0) = x_0$.

- O controlador que resolve este problema é chamado de regulador linear quadrático.
- Na situação que estamos estudando, consideramos apenas uma entrada no sistema e, por isso, $\rho > 0$ é um escalar. Por sua vez, $Q = V'V \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Regulador linear quadrático

- O papel da matriz Q e do escalar ρ é definir o peso relativo que o estado e o sinal de controle têm no cálculo do critério J.
- Se $Q \gg \rho I_n > 0$
  - O peso do sinal de controle no cálculo do critério é reduzido.
  - O sinal de controle pode atingir valores elevados.
  - O sistema responde com maior velocidade.
  - Há a possibilidade de saturação de atuadores.
- Em contrapartida, se $0 \leq Q \ll \rho I_n$
  - A energia do sinal de controle tem maior peso no cálculo do critério.
  - As componentes do ganho de realimentação de estado serão de pequeno valor absoluto.
  - O sistema não apresentará uma resposta rápida.

Regulador linear quadrático

- A solução do problema anterior, que permite calcular o regulador linear quadrático, é dada através do seguinte teorema :

Teorema (RLQ)

O critério quadrático J é minimizado pela lei de controle linear $u = -Kx$ *e, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

- *O ganho ótimo é dado por* $K = \rho^{-1}B'P$ *onde* $P = P' > 0$ *é solução da equação de Riccati*

$$A'P + PA - \rho^{-1}PBB'P + Q = 0$$

- *O sistema em malha fechada é assintoticamente estável.*
- *O critério é dado por* $J_{min} = x_0'Px_0$.

Regulador linear quadrático

- A prova (simplificada) do teorema anterior decorre do sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad x(0) = x_0$$

e da função de Lyapunov $v(x) = x'Px$, com $P > 0$ calculada a partir da equação de Riccati. Derivando em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= x'(A'P + PA)x + u'B'Px + x'PBu \\ &= x'(\rho^{-1}PBB'P - Q)x + u'B'Px + x'PBu \\ &= -x'Qx - \rho u'u + \rho(u + \rho^{-1}B'Px)'(u + \rho^{-1}B'Px) \end{aligned}$$

cuja integral de 0 a $+\infty$ fornece

$$J = v(x(0)) - v(x(\infty)) + \rho \int_0^\infty (u + \rho^{-1}B'Px)'(u + \rho^{-1}B'Px)\, dt$$

Regulador linear quadrático

- Como $v(x) = 0$ se e apenas se $x = 0$ e queremos que a lei de controle garanta a estabilidade do sistema em malha fechada, devemos impor $v(x(\infty)) = 0$. Portanto, com a equação anterior obtemos

$$\begin{aligned} J &= v(x_0) + \rho \int_0^{\infty} (u + \rho^{-1} B' P x)' (u + \rho^{-1} B' P x) \, dt \\ &\geq v(x_0) \end{aligned}$$

que é válida para todo controle que estabiliza o sistema em malha fechada. Em conclusão, fazendo $u = -Kx$ com $K = \rho^{-1} B' P$ o critério quadrático é minimizado e seu valor é dado por $J_{min} = x_0' P x_0$.

Regulador linear quadrático

- A partir de

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad , \quad x(0) = x_0$$

como já sabemos, para todo $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ que estabiliza o sistema em malha fechada, podemos expressar o critério quadrático como

$$J = x_0' P x_0$$

onde $P = P' > 0$ resolve a equação de Lyapunov

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + Q + \rho K'K = 0$$

O Teorema anterior coloca em evidência que o ganho de realimentação de estado que minimiza J é obtido através da relação $K = \rho^{-1}B'P$ com a qual, substituída na equação acima, obtemos a equação de Riccati.

Regulador linear quadrático

- Ao ponderarmos no critério quadrático uma combinação linear dos estados, definida por $Q = V'V$ com $V \in \mathbb{R}^{1\times n}$, temos:

Fato (Lugar das raízes simétrico)

Seja $\varphi(s) = V(sI - A)^{-1}B$ e $\rho > 0$. Os pólos do sistema em malha fechada são todas as raízes de

$$1 + \rho^{-1}\varphi(-s)\varphi(s) = 0$$

situadas no semi-plano esquerdo complexo.

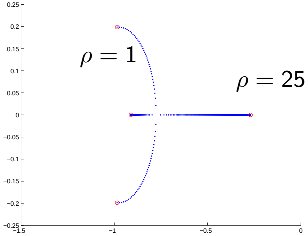
- Como $\varphi(s)$ é conhecida, o lugar das raízes em relação a $\rho^{-1} > 0$ pode ser obtido. Uma localização desejada dos pólos é imposta através da escolha de $\rho > 0$.
- É preciso ter cuidado pois a equação característica acima pode não estar na forma padrão.

Exemplo

- Considere novamente o modelo do motor de corrente contínua. Resolvemos o problema linear quadrático para

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $1 \leq \rho \leq 25$. A figura abaixo mostra a posição dos pólos do sistema em malha fechada em função de ρ.



Exemplo

- Para $\rho = 25$ a solução da equação de Riccati é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 3.4271 & 2.5726 \\ 2.5726 & 2.7289 \end{bmatrix} > 0$$

a qual permite determinar o ganho de realimentação

$$K = \begin{bmatrix} 0.1029 & 0.1092 \end{bmatrix}$$

que posiciona os pólos em $\{-0.2699, -0.9106\}$. Como anteriormente, podemos determinar a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 15.7423 \\ 16.6982 \end{bmatrix}$$

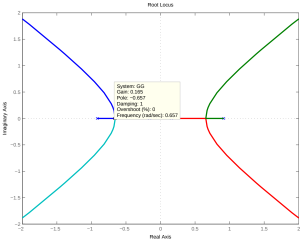
para assegurar erro nulo em regime permanente para a entrada degrau.

Exemplo

- Considerando $V = [1\ 0]$ obtemos imediatamente

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^2 + 1.0714s + 0.1429}$$

A figura abaixo mostra o lugar das raízes simétrico. O valor de $\rho \approx 6$ permite obter, através do regular linear quadrático, um sistema em malha fechada com excelente desempenho e com um baixo esforço de controle. Verifique !



Observador de estado

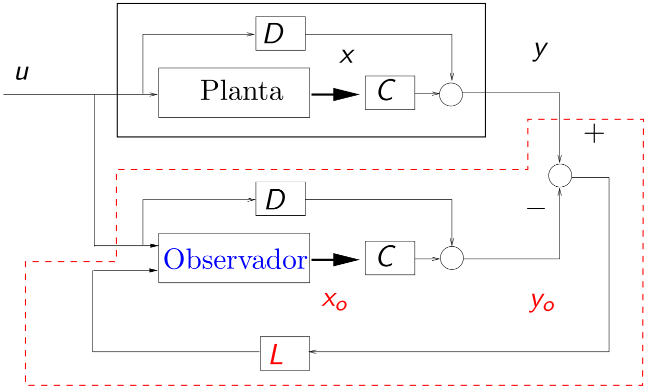
- A grande vantagem do projeto de controladores via realimentação de estado reside na possibilidade de alocarmos todos os pólos do sistema em malha fechada, em posições convenientes no plano complexo.
- Entretanto, nem sempre temos condições de medir todos os estados de um sistema, seja por motivos de custo de sensores ou por impossibilidade física de alocarmos os medidores.
- Uma forma de contornar esta dificuldade é estimar os estados de um sistema dinâmico através das suas saídas mensuráveis e, de posse da estimativa do estado, utilizá-la como se fosse o estado verdadeiro.

Observador de estado

- O observador de estado é a estrutura que nos permite estimar o estado de um sistema dinâmico tendo como entrada o sinal que atua no sistema físico e a sua saída mensurável.
- Para sintetizá-lo é necessário conhecermos com boa precisão o modelo do sistema que desejamos controlar, a fim de que as estimativas dos estados sejam mais fiéis possíveis aos valores reais.
- Como o estado não é conhecido, as condições iniciais do sistema físico e as do estimador de estado são, em geral, diferentes. Portanto, devemos assegurar que o estado estimado convirja para o estado verdadeiro o mais rápido possível.

Observador de estado

- Em termos de diagramas de blocos a sua estrutura, baseada no modelo interno da planta, é dada abaixo:



Observador de estado

- Lembrando que o modelo da planta é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

da figura anterior, as equações de estado do observador são

$$\begin{aligned} \dot{x}_o &= Ax_o + Bu + L(y - y_o) \\ y_o &= Cx_o + Du \end{aligned}$$

- Devemos notar que a comparação entre a saída estimada $y_o(t)$ e a saída real $y(t)$ é fundamental para assegurarmos que o estado estimado $x_o(t)$ se aproxime do estado verdadeiro $x(t)$.
- O ganho $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ deve ser determinado de maneira a garantir que $x_o(t)$ se aproxime de $x(t)$ de forma adequada.

Observador de estado

- Definindo o erro entre o estado verdadeiro e o estado estimado como sendo $e_o(t) \triangleq x(t) - x_o(t)$, temos:

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_o &= \dot{x} - \dot{x}_o \\
&= Ax + Bu - (Ax_o + Bu + LCx - LCx_o) \\
&= (A - LC)\, e_o
\end{aligned}
$$

- Portanto, devemos calcular L de modo que o erro $e_o(t)$ entre a estimativa e o estado verdadeiro tenda para zero com uma velocidade aceitável para qualquer condição inicial $e_o(0)$.
- Devemos alocar os pólos de $A - LC$ de forma que eles sejam estáveis e mais rápidos que a dinâmica do sistema original!

Observador de estado

- Analogamente ao que ocorre na realimentação de estado, se as componentes do vetor L possuírem módulos grandes, o erro de estimação tende a zero com uma velocidade muito alta, pois o observador de estado apresentará pólos com parte real muito negativa.
- Por outro lado, a largura de faixa do observador também será grande e, conseqüentemente, o ruído de medição da saída $y(t)$ afetará o desempenho do processo de estimação.
- Uma das maneiras de se conseguir um compromisso adequado é determinar L através da solução de uma equação de Riccati.

Observador de estado

- De fato, considerando a existência de ruídos no sistema, a sua representação de estado torna-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + Du + v \end{aligned}$$

e o erro de observação obedece a equação

$$\dot{e}_o = (A - LC)\, e_o + w - Lv$$

com a qual concluímos que o aumento do ganho do observador faz com que a dinâmica do erro torne-se mais rápida mas, em contra partida, a intensidade do ruído aditivo que interfere no erro de observação aumenta. Portanto, é imperativo estabelecermos um compromisso!

Observador de estado

- Considerando $w(t)$ e $v(t)$ dois ruídos brancos independentes com intensidades $Q = UU'$ e $\mu > 0$, o melhor compromisso é estabelecido ao resolvermos um problema linear quadrático que fornece o ganho ótimo do observador

$$L = \mu^{-1} R C'$$

onde $R > 0$ é a solução da equação de Riccati

$$AR + RA' - \mu^{-1} RC'CR + UU' = 0$$

Comparando com o regular linear quadrático, definindo $\psi(s) = C(sI - A)^{-1} U$, verifica-se que os pólos do observador são as soluções estáveis da equação algébrica

$$1 + \mu^{-1} \psi(-s) \psi(s) = 0$$

Exemplo

- Consideramos o modelo do motor de corrente contínua apresentado no Capítulo I. Porém, a carga está engastada em um ponto fixo através de um eixo flexível com constante elástica κ. Assim, o modelo é dado por :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - cK\frac{d\theta}{dt}$$

$$(J_c + J_m c^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = cKi$$

Portanto, a partir da definição da variável de estado

$$x = \begin{bmatrix} i \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

considerando os valores numéricos já adotados anteriormente e $\kappa = 2$ $[\mathrm{Nm/rad}]$, obtemos

Exemplo

- a sua representação de estado na forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.0714 & -0.1429 & -0.0714 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

sendo que a saída y representa a velocidade angular da carga.

- Como o pólo mais rápido do sistema é -0.9, projetamos um observador de estado com todos os seus pólos iguais a -2, portanto, apenas um pouco mais rápido que aquele citado. Isso nos fornece o ganho

$$L = \begin{bmatrix} -15.0000 \\ -55.0000 \\ 4.9286 \end{bmatrix}$$

Exemplo

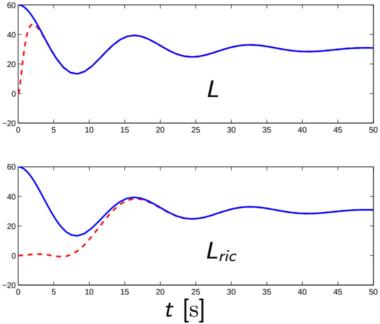
- Para comparação, consideramos os sinais de controle $u(t)$ e de saída $y(t)$ submetidos a ruídos aditivos brancos de tal forma que $U = 10^{-1}B$ e $\sqrt{\mu} = 10^{-2}$. Isto corresponde a implementar o sinal de controle com erro de 10% e medir o sinal de saída com erro de 1%. Neste caso, a partir da equação de Riccati determinamos o ganho ótimo

$$L_{ric} = \begin{bmatrix} 1.7587 \\ 0.0000 \\ 0.4349 \end{bmatrix}$$

e $\{-0.6087 \pm j0.3521, -0.2889\}$ os pólos do observador. Note a diferença entre L e L_{ric}, como conseqüência de termos levado em conta ruídos aditivos nos sinais de controle e de saída.

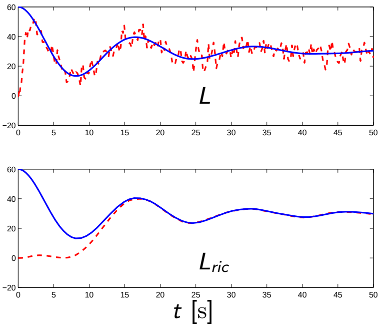
Exemplo

- A figura abaixo mostra a simulação do sistema a partir de $x(0) = [1\ \pi/3\ 0]'$ e entrada $u(t) = \pi/3$ para todo $t \geq 0$. O observador parte com condição inicial nula e, após um breve período de tempo, a posição angular da carga é perfeitamente estimada. Os ruídos não foram introduzidos na simulação.



Exemplo

- A figura abaixo mostra a simulação do sistema sob condições idênticas às anteriores mas com os ruídos aditivos nos sinais de controle e de saída. Neste caso, o desempenho de L_{ric} é muito melhor e é, praticamente, o mesmo que aquele observado na simulação anterior (sem ruído).



Observabilidade

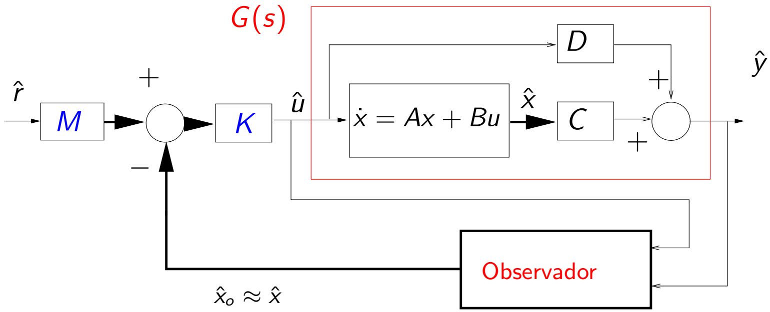
- Na construção de observadores, devemos atentar para a possibilidade de inferirmos os valores de todas as variáveis de estado, a partir de medidas disponíveis do sistema físico.
- Esta propriedade que o sistema deve apresentar é chamada observabilidade e, uma forma de testá-la é verificar se a matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

chamada matriz de observabilidade, é não singular. No exemplo anterior, o sistema deixa de ser observável se $\kappa = 0$. Verifique!

Projeto de servomecanismos

- O projeto de um servomecanismo diz respeito à determinação dos ganhos K, M e L do observador de estado, tal modo que :
  - A saída y siga a referência r com erro nulo.
  - Só os sinais disponíveis u e y sejam utilizados.



Projeto de servomecanismos

- Da figura anterior, notamos que o presente projeto tem a mesma estrutura de realimentação de estado porém, com o estado verdadeiro substituído pelo estimado fornecido por um observador. Temos portanto:
  - Representação de estado da planta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

  - Representação de estado do observador

$$\begin{aligned} \dot{x}_o &= Ax_o + Bu + L(y - y_0) \\ y_0 &= Cx_0 + Du \end{aligned}$$

  - Sinal de controle

$$u = K(Mr - x_o)$$

Projeto de servomecanismos

- É importante determinarmos a representação de estado do sistema em malha fechada. Neste sentido, definindo a variável de estado aumentada

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ \underbrace{x - x_o}_{e_o} \end{bmatrix}$$

com as equações anteriores obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= \begin{bmatrix} (A - BK) & BK \\ 0 & (A - LC) \end{bmatrix} x_a + \begin{bmatrix} BKM \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} (C - DK) & DK \end{bmatrix} x_a + DKMr \end{aligned}$$

a qual, permite duas conclusões muito importantes a respeito do projeto em estudo.

Projeto de servomecanismos

- A equação característica do sistema em malha fecha é

$$\det(sI - (A - BK))\det(sI - (A - LC)) = 0$$

ou seja, os seus pólos são aqueles alocados através da escolha do ganho de controle K como se o estado estivesse disponível para realimentação e, aqueles alocados através da escolha do ganho do observador L.

- Com a transformada de Laplace, determinamos a função de transferência

$$\hat{y} = \underbrace{\left[(C - DK)\Big(sI - (A - BK)\Big)^{-1} BKM + DKM\right]}_{F(s)} \hat{r}$$

Projeto de servomecanismos

- Estes cálculos permitem as seguintes conclusões :
  - A estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada dependem de escolhas independentes dos ganhos K e L.
  - A função de transferência entre a referência e a saída é idêntica àquela obtida via realimentação de estado, como se o estado estivesse disponível para realimentação. Portanto, como anteriormente, podemos determinar o ganho M de tal forma que
  $$F(0) = S(0)KM = 1$$
  Neste caso, a saída segue com erro nulo um degrau unitário.
- Estas propriedades decorrem de um resultado mais geral denominado Teorema da Separação.

Projeto de servomecanismos

- Tendo sido determinados os ganhos K, M e L é importante verificar como a estrutura de controle pode ser implementada, da maneira mais simples possível. Lembrando que

$$\hat{u} = KM\hat{r} - K\hat{x}_o$$

definimos o ganho escalar $h = KM$ e, aplicando a transformada de Laplace nas equações anteriores, obtemos

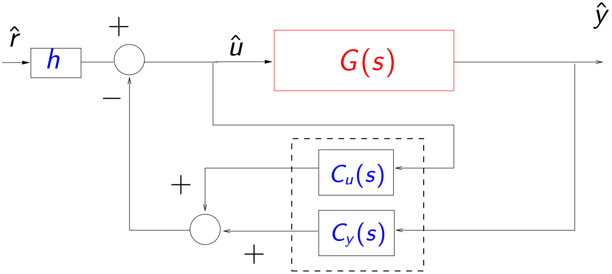
$$K\hat{x}_o = C_u(s)\hat{u} + C_y(s)\hat{y}$$

onde

$$\begin{aligned} C_u(s) &= K(sI - (A - LC))^{-1}(B - LD) \\ C_y(s) &= K(sI - (A - LC))^{-1}L \end{aligned}$$

Projeto de servomecanismos

- A figura abaixo mostra a implementação final do controle que realimenta apenas as variáveis disponíveis em todo instante de tempo. Note que as funções de transferência $C_u(s)$ e $C_y(s)$ estão localizadas na malha de realimentação e são funções escalares.



Projeto final

- Vamos novamente considerar o modelo linearizado de um pêndulo invertido tratado no Capítulo I. Com os dados numéricos já fornecidos, a sua representação de estado é expressa na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 11.7600 & 0 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.1 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x_p \end{aligned}$$

onde as componentes de $x_p \in \mathbb{R}^4$ denotam a posição do carro, sua velocidade, a posição angular do pêndulo em relação à vertical e a sua velocidade angular, respectivamente. A variável u denota a força externa e y é o deslocamento horizontal do pêndulo.

Projeto final

- O objetivo é equilibrar pêndulo na posição vertical e, simultaneamente, levar o carro para a origem do referencial inercial adotado. Inicialmente, determinamos os ganhos de controle K e M.
- Ganhos de Controle : Foi obtido através da solução do problema linear quadrático com

$$Q = \mathrm{diag}\{1, 0, 1, 0\} \ , \ \rho = 10^{-2}$$

onde apenas os deslocamentos do carro e do pêndulo são penalizados. Resolvendo a equação de Riccati, determinamos

$$K = \begin{bmatrix} -10.0000 & -21.4443 & 342.9299 & 103.0445 \end{bmatrix}$$

Como o sinal de referência é nulo, adotamos $h = KM = 1$.

Projeto final

- A variável de saída indica que apenas o deslocamento horizontal do pêndulo é medido em todo instante de tempo $t \geq 0$. Com esta informação, construímos um observador para estimar todos os estados do sistema.
- Ganho do Observador : A matriz $A - BK$ tem autovalores

$$-3.4307 \pm j0.1475 \ , \ -0.6493 \pm j0.6399$$

indicando que os pólos dominantes têm um fator de amortecimento de aproximadamente 0.7 e margem de fase de aproximadamente 70^o. Situam-se portanto em valores adequados. Para o observador, considerando $U = 10^{-1} \times \mathrm{diag}\{1, 1, 1, 1\}$ e $\sqrt{\mu} = 10^{-2}$, obtemos

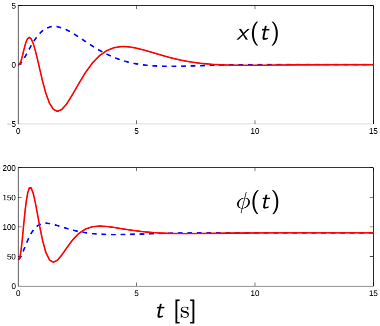
$$L = \begin{bmatrix} -25.2191 & -35.9366 & -46.1407 & -154.7921 \end{bmatrix}'$$

Projeto final

- Em seguida, determinamos as funções de transferência $C_u(s)$ e $C_y(s)$ que permitem implementar o controle final projetado. A seguir, mostramos a simulação do deslocamento horizontal do carro (primeira figura) e do deslocamento angular do pêndulo em relação à horizontal (segunda figura). As seguintes considerações são pertinentes:
  - Em $t = 0$ o carro está em repouso na origem e o pêndulo está em repouso em uma posição que forma um ângulo de 45^o com a horizontal.
  - As trajetórias obtidas com o controle acima determinado estão mostradas em vermelho.
  - Para mera comparação, em azul, mostramos as trajetórias obtidas com o controle de realimentação de estado com o mesmo ganho K calculado, assumindo que todos os estados sejam conhecidos.

Projeto final

- Note a grande diferença entre as trajetórias! O controle via realimentação de estado é muito superior pois dispõe de muito mais informações do que simplesmente a saída. Note, entretanto, que só com a medida de $y(t)$ os critérios de desempenho, inicialmente estabelecidos, são atendidos.



Projeto final

- Para os mesmos ganhos de controle K e do observador L, consideramos dois outros aspectos bastantes relevantes em qualquer projeto de controle, a saber :
  - As versões digitais dos controladores $C_u(s)$ e $C_y(s)$ foram calculadas considerando um SOZ nas respectivas entradas. Adotou-se o período de amostragem $T = 30$ $[\mathrm{ms}]$.
  - Para $F_z(s) = [1\ 0\ 0\ 0](sI - (A - BK))^{-1}BKM$, determinamos a matrix M e o ganho $h = KM = -10$ fazendo com que a primeira variável - deslocamento do carro - do sistema em malha fechada, acompanhe uma entrada degrau, com erro nulo em regime permanente.
- A simulação a seguir mostra o carro equilibrando o pêndulo e voltando à origem $x = 0$. Em $t = 5$ $[\mathrm{s}]$, um degrau de amplitude $r = 10$ é aplicado indicando que o carro deve equilibrar o pêndulo e se deslocar para a posição $x = 10$ $[\mathrm{m}]$.

Projeto final

- A seguir vemos o deslocamento do carro e do pêndulo, com os controladores $C_u(s)$, $C_y(s)$ e suas respectivas versões digitais $C_u(z)$, $C_y(z)$. Note a queda no desempenho que se acentua conforme o período de amostragem aumenta, até o limite de estabilidade que ocorre, aproximadamente, para $T = 50$ [ms].