



Autor: Guilherme Abreu

Desigualdades matriciais lineares diferenciais para sistemas afins com comutação.

Campinas, SP

2023

Autor: Guilherme Abreu

Desigualdades matriciais lineares diferenciais para sistemas afins com comutação.

Trabalho de graduação realizado na Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do grau de Bacharel de Engenharia de Controle e Automação.

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Faculdade de Engenharia Mecânica

Trabalho de Graduação II

Orientadora: Grace Silva Deaecto

Campinas, SP

2023

Este trabalho é dedicado a minha avó Hulda Abreu que durante sua passagem na Terra trouxe muita luz e que hoje nos olha lá de cima.

Agradecimentos

Neste ponto gostaria de deixar meus agradecimentos a todas as pessoas ao meu redor que me incentivaram e me deram condições de hoje estar me formando na Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, a qual desde mais novo sonhava e almejava em um dia fazer parte da minha formação.

Quero agradecer à Deus por me permitir as condições necessárias de estar realizando meu sonho de ser Engenheiro e me guiar durante todo o meu caminho até aqui. Aos meus pais, Ema e Oswaldo, agradeço por toda a educação, por todo amor, carinho e estrutura familiar que me deram desde o berço, me conduzindo e me fornecendo suporte em todas as minhas escolhas e momentos difíceis que passei. Ao meu avô Oswaldo, agradeço por ter constituído a nossa família e por cuidar de mim desde pequeno sendo além de um avô, um amigo verdadeiro. Também agradeço em especial à minha tia Chisleine, a quem sempre me espelhei durante meus estudos, e que desde meus primeiros passos para concorrer a uma vaga na universidade me incentivou, torceu e vibrou com minhas conquistas.

Aos meus amigos Vitor, Bruno e Thiago agradeço por estarem comigo durante todo o processo, e serem verdadeiros companheiros, são chaves essenciais na minha vida. Sou grato e agradeço ao Lucas Dias, Lucas Bernardi, Hugo, Bruno, José e Fernanda, amigos que fiz durante parte de minha graduação na UFSC - Blumenau, e foram minha família por três anos em Santa Catarina. Com carinho especial agradeço a Giovanna, que neste último ano foi um alicerce enorme na minha vida, me aconselhando e deixando a minha vida mais leve.

Finalmente, à minha orientadora Grace S. Deaecto, agradeço grandemente pela dedicação em apoiar e fornecer todo o conhecimento necessário para desenvolvimento deste trabalho. Agradeço por todas as horas disponibilizadas, e por todo empenho, mesmo que do outro lado do globo, me auxiliando durante toda a pesquisa e me guiando para realização da minha formação acadêmica. Obrigado pela oportunidade, por ter acreditado e confiado no meu trabalho desde a primeira conversa que tivemos.

*“Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas.”
(O Pequeno Príncipe)*

Resumo

Este trabalho lida com o problema de estabilidade assintótica de sistemas afins com comutação a tempo contínuo a partir de condições expressas em termos de desigualdades matriciais lineares diferenciais (DLMIs). Estas condições foram obtidas a partir da adoção de uma função de Lyapunov quadrática variante no tempo. Nossa principal contribuição foi aplicar uma nova metodologia, recentemente disponível na literatura, para resolver DLMIs relacionadas a sistemas afins com comutação. Esta metodologia consiste em um algoritmo de convergência global que converte problemas expressos em DLMIs na solução de um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMIs). Consideramos três aproximações da matriz de Lyapunov variante no tempo: a linear por partes, já utilizada na literatura, e as séries de Taylor e de Fourier. Analisamos as condições de contorno, específicas para o sistema com comutação em estudo, para cada aproximação. As estratégias de controle foram implementadas em Matlab e ilustradas por meio de um exemplo acadêmico. Os resultados obtidos estão coerentes com a teoria. Como perspectiva de trabalho futuro desejamos aplicar esta metodologia para estudar estabilidade assintótica de ciclos limites em sistemas afins com comutação.

Palavras-chaves: DLMI. sistemas afins com comutação. Lyapunov variante no tempo.

Abstract

This work deals with the problem of asymptotic stability of switched affine systems in continuous time based on conditions expressed in terms of differential linear matrix inequalities (DLMIs). These conditions were derived from a time-varying quadratic Lyapunov function. Our main contribution is to apply a new methodology, recently available in the literature, to solve DLMIs for switched affine systems. This methodology involves a global convergence algorithm that transforms problems expressed in DLMIs into the solution of a set of linear matrix inequalities (LMIs). We considered three approximations of the time-varying Lyapunov matrix: the piecewise linear, already used in the literature, and the Taylor and Fourier series. We analyzed the boundary conditions, specific to the studied switched affine system, for each approximation. The control strategies were implemented in Matlab and illustrated through an academic example. The obtained results are consistent with the theory. As a future work perspective, we aim to apply this methodology to study the asymptotic stability of limit cycles in switched affine systems.

Key-words: DLMI. switched affine system. time-varying Lyapunov.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Plano de fase para o exemplo acadêmico (regra quadrática)	22
Figura 2 – Evolução dos estados para o exemplo acadêmico (regra quadrática) . .	23
Figura 3 – Plano de fase em função do tempo para o exemplo acadêmico (regra quadrática)	23
Figura 4 – Plano de fase para o exemplo acadêmico (regra linear)	24
Figura 5 – Evolução dos estados para o exemplo acadêmico (regra linear)	25
Figura 6 – Plano de fase em função do tempo para o exemplo acadêmico (regra linear)	25
Figura 7 – Circuito elétrico - conversor buck-boost	26
Figura 8 – Plano de fase do conversor buck-boost	26
Figura 9 – Os estados do conversor buck-boost em relação ao tempo	27
Figura 10 – Os erros dos estados e a regra de comutação em relação ao tempo . . .	34
Figura 11 – Os estados em relação ao tempo	35

Lista de símbolos

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$.
\mathbb{K}	Conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$.
I	Matriz identidade.
X'	Transposto da matriz X .
$X \geq 0$	A matriz X é semi-definida positiva.
$X > 0$	A matriz X é definida positiva.
$X \leq 0$	A matriz X é semi-definida negativa.
$X < 0$	A matriz X é definida negativa.
$\text{Tr}(X)$	O traço da matriz X .
\mathcal{H}	Conjunto das matrizes reais com todos os autovalores no semiplano esquerdo do plano complexo ou matriz de Hurwitz.
$\ \cdot\ ^2$	Quadrado da norma Euclidiana.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
	Introdução	10
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	12
2.1	Sistemas lineares e invariantes no tempo	12
2.2	Estabilidade	12
2.3	Crítérios de desempenho	15
2.3.1	Norma \mathcal{H}_2	15
2.3.2	Norma \mathcal{H}_∞	16
3	SISTEMAS AFINS COM COMUTAÇÃO	18
3.1	Introdução	18
3.2	Definição	19
3.3	Exemplos didáticos	22
3.3.1	Exemplo acadêmico	22
3.3.2	Modelo prático: conversor buck-boost	25
4	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES DIFERENCIAIS	28
4.1	Formulação do problema	28
4.1.1	Linear por partes	30
4.1.2	Série de Taylor	31
4.1.3	Série de Fourier	31
4.1.4	Método de linearização externa	32
4.2	Exemplo didático	33
4.3	Discussão de resultados	36
	Conclusão	38
	REFERÊNCIAS	39
	APÊNDICES	41
	APÊNDICE A – CÓDIGO MATLAB	42

1 Introdução

Este trabalho de graduação visa tratar estabilidade e desempenho de sistemas afins com comutação a tempo contínuo através de condições expressas em termos de desigualdades matriciais lineares diferenciais (DLMI). Mais especificamente, a ideia é projetar uma função de comutação de forma a assegurar estabilidade assintótica global de um ponto de equilíbrio de interesse e um desempenho adequado. Os artigos (DEAECTO et al., 2010), (SILVA; DEAECTO; BARROS, 2022), (DEAECTO; GEROMEL; BRITO, 2022) e (GARCIA et al., 2009) são algumas referências sobre estabilidade de sistemas afins em que as DLMI não são consideradas e o artigo (GABRIEL; GONÇALVES; GEROMEL, 2018) é um exemplo em que a DLMI é empregada no contexto de controle robusto de sistemas com saltos markovianos. Este tópico de pesquisa tem atraído a atenção de diversos cientistas desde os anos 90, e se intensificado cada vez mais devido às suas propriedades matemáticas intrínsecas e sua ampla aplicação em diversas áreas da engenharia, como em eletrônica de potência e controle de máquinas elétricas, principalmente com conversores CC-CC como Boost, Buck-Boost, por exemplo. Referências básicas que tratam destas aplicações são (GARCIA et al., 2009), (DEAECTO et al., 2010), (ALBEA; GARCIA; ZACCARIAN, 2015), (MA; ZHANG, 2023), (MA et al., 2023).

Entretanto a maioria dos estudos relacionados a sistemas afins com comutação, como em (DEAECTO et al., 2010), (DEAECTO; EGIDIO, 2016), (DEAECTO; GEROMEL; BRITO, 2022), se restringe a funções de Lyapunov invariantes no tempo que podem ser quadráticas, do tipo mínimo ou do tipo máximo. Uma propriedade intrínseca desta classe de sistemas é que a estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio de interesse exige a ocorrência de modos deslizantes estáveis, que faz com que o sistema assuma uma dinâmica inédita, diferente das dinâmicas dos subsistemas. Isto ocorre pois o ponto de equilíbrio de interesse geralmente não coincide com o ponto de equilíbrio dos subsistemas isolados. Uma consequência destes modos deslizantes é a existência de uma frequência de comutação infinita, o que pode impossibilitar a implementação da regra de comutação em sistemas físicos, causando até mesmo danos aos dispositivos, vide (SANTOS, 2015), (BOLZERN; SPINELLI, 2004). Portanto, um ponto de grande interesse é o estudo de estabilidade desta classe de sistemas quando a frequência de comutação é limitada e deve respeitar um limitante superior. Neste caso a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio não pode ser garantida e estuda-se estabilidade prática ou, mais recentemente, estabilidade assintótica de ciclos limite, como em (EGIDIO; DEAECTO; GEROMEL, 2020) e (SERIEYE et al., 2023).

Este trabalho de graduação apresenta uma primeira etapa de um projeto de controle mais amplo que consiste na generalização das condições de estabilidade assintótica de ciclos limites, proposta em (EGIDIO; DEAECTO; GEROMEL, 2020), para incluir métodos de

solução de DLMIIs que resultem em condições menos conservadoras do que as adotadas na literatura, além de considerar a inclusão de índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Nesta primeira etapa, aplicamos os resultados do artigo recente (GONÇALVES; GABRIEL; GEROMEL, 2019) para a solução de DLMIIs que garantem estabilidade assintótica global de sistemas afins com comutação. Mais especificamente, implementamos o algoritmo de convergência global proposto em (GONÇALVES; GABRIEL; GEROMEL, 2019) para três aproximações da matriz de Lyapunov quadrática variante no tempo, a saber: a linear por partes, que já foi usada em (EGIDIO; DEAECTO; GEROMEL, 2020) no contexto de sistemas com comutação, e as séries de Taylor e Fourier. Discutimos as especificidades destas aproximações para levar em conta as condições de contorno das DLMIIs apresentadas. Esta metodologia foi ilustrada em um exemplo acadêmico e os resultados obtidos estão coerentes com os esperados teoricamente. Mais especificamente, como as condições obtidas são baseadas na estabilidade de um sistema médio invariante no tempo, as condições derivadas da função de Lyapunov quadrática são ótimas. Por este motivo, embora os resultados obtidos tenham sido importantes para a validação dos métodos numéricos empregados, ainda não foi possível avaliar os benefícios da utilização de DLMIIs no estudo de estabilidade de sistemas afins com comutação. Estes benefícios serão melhor caracterizados quando as DLMIIs forem aplicadas no caso de estabilidade de ciclos limites, que será abordada em uma nova etapa do projeto em tela.

2 Conceitos fundamentais

Este capítulo é dedicado à apresentação de alguns conceitos fundamentais sobre análise de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo que possuem como referências básicas (LUENBERGER, 1979), (SLOTINE; LI et al., 1991), (LATHI; GREEN, 2005), (KHALIL, 2015), (GEROMEL; KOROGUI, 2019).

Os temas discutidos e apresentados são: caracterização dos sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT), critério de Lyapunov para o estudo de estabilidade, definição de normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ e cálculo via desigualdades matriciais lineares (LMIs).

2.1 Sistemas lineares e invariantes no tempo

Considere um sistema linear e invariante no tempo (LIT) com sua representação no espaço de estado, dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), & x(0) = 0 \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo que as matrizes A , B , C e D possuem dimensões compatíveis, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada externa e $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada.

Aplicando a Transformada de Laplace no sistema de equações (2.1), temos que a função de transferência entre a entrada externa $w(t)$ e a saída controlada $z(t)$ é dada por:

$$H_{wz}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.2)$$

com resposta ao impulso:

$$h_{wz}(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (2.3)$$

em que $\delta(t)$ é a função impulso a tempo contínuo. Vale destacar que quando $D = 0$ o sistema (2.1) é dito estritamente próprio. Neste caso, a entrada não interfere instantaneamente na saída. Caso contrário, o sistema é dito próprio.

2.2 Estabilidade

Esta seção é dedicada à apresentação do critério de Lyapunov para o estudo de estabilidade do sistema LIT apresentado anteriormente. Porém, para entender o critério é preciso definir estabilidade. O termo estabilidade é de uso tão comum que seu significado,

pelo menos em termos gerais, é bem conhecido. Entretanto, no cenário de sistemas dinâmicos, a estabilidade é definida com respeito a um ponto de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio é estável se quando o vetor de estados $x(t)$ é afastado ligeiramente deste ponto, este tende a retornar para o ponto, ou pelo menos não continua se afastando dele. As seguintes definições formalizam estes conceitos:

Definição 1 (Ponto de equilíbrio). *O ponto $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$, é um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico, se para a condição inicial $x(0) = x_e$, os estados se mantiverem constantes neste ponto $x(t) = x_e$ para todo o tempo $t \geq 0$.*

Logo, pode-se concluir que quando a trajetória $x(t)$ atinge o ponto de equilíbrio x_e , lá permanece para todo o tempo subsequente.

Definição 2 (Estabilidade assintótica global). *Um ponto de equilíbrio x_e de um sistema LIT (2.1) é globalmente assintoticamente estável se para uma condição inicial qualquer, temos $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$.*

Partindo desta última definição, temos que uma condição necessária e suficiente para estabilidade assintótica global da origem $x_e = 0$ do sistema LIT (2.1) é ter todos os autovalores da matriz A localizados semiplano esquerdo do plano complexo. Se ao menos um autovalor tiver parte real não-negativa, o sistema é instável.

Definidos os pontos principais de estabilidade, agora é possível introduzir o critério de Lyapunov.

Segundo (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2015), Lyapunov apresentou dois métodos para o estudo de estabilidade de sistemas descritos por equações diferenciais ordinárias. O primeiro método (ou método indireto) é baseado na linearização de equações para concluir sobre a estabilidade de sistemas não-lineares. Já o segundo método (ou método direto) é baseado nas equações não-lineares do sistema.

Para o segundo método, Lyapunov definiu uma função escalar dos estados $v(x(t))$, chamada de Função de Lyapunov. Esta é caracterizada da seguinte maneira, veja (LUENBERGER, 1979), (SLOTINE; LI et al., 1991), (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2015):

Definição 3 (Função de Lyapunov). *Considere x_e um ponto de equilíbrio do sistema, contido no domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n_x}$. Uma função escalar continuamente diferenciável $v(x) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Função de Lyapunov, se possuir as seguintes características:*

1. $v(x) > 0, \forall x \neq x_e$
2. $v(x) = 0, \text{ para } x = x_e$
3. $\dot{v}(x) \leq 0, \forall x \neq x_e$

Por fim, o teorema de Lyapunov é exposto abaixo:

Teorema 1 (Teorema de Lyapunov). *Se existir uma Função de Lyapunov $v(x)$ para o sistema dinâmico, então o seu ponto de equilíbrio x_e é estável. Se a derivada da função de Lyapunov é tal que, $\dot{v}(x) < 0$, ou seja for estritamente negativa, então a estabilidade é assintótica. Se, além disso, esta condição for válida para todo o domínio $x \in \mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^{n_x}$ e $x_e \in \mathcal{D}$ a estabilidade assintótica é global.*

A complexidade deste teorema no estudo de sistemas dinâmicos genéricos se dá em encontrar funções de Lyapunov que cumpram esses critérios. Felizmente, para sistemas LIT esta tarefa é mais simples e uma candidata são as funções de Lyapunov quadráticas.

De fato, considere o sistema LIT mais simples

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.4)$$

que foi obtido de (2.1) com entrada $w(t)$ nula. Note que para $\det(A) \neq 0$ o único ponto de equilíbrio deste sistema é a origem $x_e = 0$. Considere também a função de Lyapunov quadrática $v(x)$ dada por

$$v(x) = x'Px, \quad P > 0 \quad (2.5)$$

Derivando (2.5) em relação ao tempo, temos:

$$\dot{v}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x}$$

e, substituindo (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= (Ax)'Px + x'P(Ax) \\ &= x'(A'P + PA)x \end{aligned} \quad (2.6)$$

Note que se $A'P + PA = -Q$ com $Q > 0$ então:

$$\dot{v}(x) = x'(A'P + PA)x = -x'Qx < 0$$

o que indica que o sistema (2.4) é globalmente assintoticamente estável. O lema seguinte formaliza este resultado que além de ser uma condição suficiente, é também necessária para garantir estabilidade de sistemas LIT.

Lema 1. *O ponto de equilíbrio $x_e = 0$ do sistema dinâmico (2.4) é globalmente assintoticamente estável se, e somente se, dada uma $Q > 0$, existir uma matriz $P > 0$ solução da equação de Lyapunov:*

$$A'P + PA < -Q \quad (2.7)$$

.

Demonstração. Disponível em (KHALIL, 2015) e (GEROMEL; KOROGUI, 2019). □

2.3 Critérios de desempenho

Em aplicações práticas a garantia de estabilidade não é suficiente para avaliar a qualidade do projeto de controle. É fundamental impor critérios de desempenho para o sistema global. Os mais comumente usados para avaliar sistemas dinâmicos LIT são as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Como ficará claro, a norma \mathcal{H}_2 é importante para estabelecer critérios no domínio do tempo, enquanto que a norma \mathcal{H}_∞ estabelece características importantes de robustez.

Antes de prosseguir é necessário relembrar o Teorema de Parseval (GEROMEL; KOROGUI, 2019), o qual relaciona a integral de uma função no domínio do tempo com a integral da mesma função no domínio da frequência (Transformada de Fourier).

2.3.1 Norma \mathcal{H}_2

A norma \mathcal{H}_2 de um sistema LIT estável e estritamente próprio ($D = 0$), é definida como:

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \int_0^\infty \text{Tr}(h_{wz}(t)'h_{wz}(t))dt \quad (2.8)$$

Nota-se que a norma \mathcal{H}_2 depende apenas da resposta ao impulso $h_{wz}(t)$ do sistema. Agora para encontrarmos esta norma no domínio da frequência, usamos o Teorema de Parseval, o que leva a:

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{Tr}(H_{wz}(-j\omega)'H_{wz}(j\omega))d\omega \quad (2.9)$$

Note que a propriedade do sistema ser estritamente próprio é fundamental para o cálculo desta norma. De fato, substituindo a resposta ao impulso (2.3) na definição da norma (2.8), obtemos:

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \int_0^\infty \text{Tr}((B'e^{A't}C' + D'\delta(t))(Be^{At}C + D\delta(t)))dt \quad (2.10)$$

$$= \text{Tr} \left(B' \left(\int_0^\infty e^{A't}C'Ce^{A't}dt \right) B \right) + 2\text{Tr}(B'C'D) + \text{Tr}(D'D) \int_0^\infty \delta(t)^2 dt \quad (2.11)$$

em que o último termo:

$$\int_0^\infty \delta(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \rightarrow \infty$$

diverge. Portanto, para que a norma \mathcal{H}_2 seja finita, é imperativo que o sistema seja estritamente próprio ($D = 0$), levando a norma:

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \text{Tr}(B'P_oB) \quad (2.12)$$

em que:

$$P_o = \int_0^\infty e^{A't}C'Ce^{A't}dt \quad (2.13)$$

é chamado de **Gramiano da Observabilidade**. Logo, a norma \mathcal{H}_2 é dada por:

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \{\text{Tr}(B'P_oB) : A'P_o + P_oA + C'C = 0\} \quad (2.14)$$

Alternativamente podemos realizar este cálculo por meio da solução de um problema de otimização convexa descrito por LMIs. De fato, note que a desigualdade de Lyapunov

$$A'P + PA + C'C < 0 \quad (2.15)$$

pode ser reescrita como

$$A'P + PA + C'C = -S \quad (2.16)$$

com $S > 0$. A solução desta equação é dada por

$$P = \int_0^\infty e^{A't}(C'C + S)e^{A't}dt > P_o \quad (2.17)$$

Por conseguinte, podemos concluir que

$$\|H(s)\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\text{Tr}(B'PB) : A'P + PA + C'C < 0\} \quad (2.18)$$

pois o ínfimo faz com que $S \rightarrow 0$ e a solução (2.17) da equação de Lyapunov (2.16) se aproxime arbitrariamente de P_o . É bom salientar que este método de cálculo, é uma importante ferramenta para aplicações práticas, pois já existem inúmeros métodos numéricos para cálculos de LMIs disponíveis na literature, veja (BOYD et al., 1994).

2.3.2 Norma \mathcal{H}_∞

Novamente considere o sistema LIT dado por (2.1), junto com sua função de transferência $H_{wz}(s)$ dada pela equação (2.2). Então a norma \mathcal{H}_∞ deste sistema pode ser calculada para funções de transferência analíticas no semiplano complexo direito fechado, e é definida por:

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{max} \{H_{wz}(j\omega)\} \quad (2.19)$$

sendo que $\mu_{max}\{\}$ é o máximo valor singular de $H_{wz}(j\omega)$, ou seja:

$$\mu_{max} \{H_{wz}(j\omega)\} = \max_{i=\{1,\dots,n_x\}} \sqrt{\lambda_i \{H_{wz}(-j\omega)'H_{wz}(j\omega)\}} \quad (2.20)$$

em que $\lambda_i\{V\}$ é o i -ésimo autovalor da matriz V . Como é fácil de visualizar, para um sistema com apenas uma entrada e uma saída (SISO¹), o valor singular máximo é $\mu_{max}\{H_{wz}(j\omega)\} = |H_{wz}(j\omega)|$ e, portanto, a norma \mathcal{H}_∞ é dada pelo valor de pico do diagrama de Bode de módulo.

Outro ponto de destaque desta norma, é o fato, de diferentemente da norma H_2 , não há exigência de funções de transferências estritamente próprias.

¹ Do inglês Single-input Single-output

Considerando uma entrada externa $w(t) \in \mathcal{L}_2$ em que

$$\int_0^\infty w(t)'w(t)dt < \infty \quad (2.21)$$

e a relação da entrada com a saída da função de transferência $z(s) = H_{wz}(s)w(s)$, temos:

$$\int_0^\infty z(t)'z(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty z(-j\omega)'z(j\omega)d\omega \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty w(-j\omega)'H_{wz}(-j\omega)'H_{wz}(j\omega)w(j\omega)d\omega \quad (2.23)$$

utilizando o Teorema de Parseval temos

$$\int_0^\infty z(t)'z(t)dt \leq \|H(s)\|_\infty^2 \int_0^\infty w(t)'w(t)dt$$

e, portanto, $\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 \leq \rho$ com $\rho > 0$, se somente se $\|z(t)\|_2^2 \leq \rho\|w(t)\|_2^2$.

Adotando agora uma função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'Px$ com $P > 0$, e impondo

$$\dot{v}(x(t)) < -z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.24)$$

para algum $\rho > 0$, após integrar ambos os lados de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\int_0^\infty \dot{v}(x(t)) < \int_0^\infty -z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t)dt$$

Lembrando que o sistema é estável, temos que $v(x(t)) = 0$ para $t \rightarrow \infty$ e além disso para $t = 0$, $v(x(t)) = 0$, pois $x(0) = 0$, assim:

$$\int_0^\infty z(t)'z(t) - \rho w(t)'w(t)dt < 0$$

concluindo, conseqüentemente, que $\|H(s)\|_\infty^2 \leq \rho$. Desta maneira, sempre que a desigualdade (2.24) for verificada, podemos obter a norma \mathcal{H}_∞ do sistema. Portanto,

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(t)) &= (\dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + z(t)'z(t) - \rho w(t)'w(t)) - z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t) \\ &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \rho I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} - z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$< -z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t) \quad (2.26)$$

sendo que a desigualdade é verificada sempre que a LMI

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

for satisfeita. Em conclusão, a norma \mathcal{H}_∞ de um sistema pode ser calculada através da solução do seguinte problema de otimização convexa

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \sup_{\rho > 0, P > 0} \left\{ \rho : \begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \rho I \end{bmatrix} < 0 \right\} \quad (2.28)$$

O capítulo seguinte apresenta alguns resultados preliminares sobre sistemas afins com comutação.

3 Sistemas afins com comutação

Este capítulo trata estabilidade assintótica global de sistemas afins com comutação, os quais possuem inúmeras aplicações práticas em várias áreas da engenharia, como por exemplo, na área de eletrônica de potência. As referências (EGIDIO; DEAECTO; GEROMEL, 2020), (SILVA; DEAECTO; BARROS, 2022), (GARCIA et al., 2009) e (DEAECTO et al., 2010) tratam estabilização desta classe de sistemas, com aplicações em conversores de potência CC-CC. Os artigos (SILVA; DEAECTO; BARROS, 2022) e (GARCIA et al., 2009) apresentam também dados experimentais.

Neste capítulo, os conceitos principais e a base matemática são apresentados e ilustrados através de um exemplo acadêmico e outro relacionado ao controle de um conversor buck-boost.

3.1 Introdução

Um sistema com comutação é caracterizado por um número finito de subsistemas, e uma regra de comutação que seleciona a cada instante de tempo qual subsistema deve ser ativado naquele instante. Esta regra pode ser uma perturbação e, portanto, o problema de controle consiste em garantir estabilidade para seleções arbitrárias de subsistemas, ou pode ser uma variável de controle $\sigma(x)$ a ser determinada para garantir estabilidade e desempenho do sistema global. Neste trabalho será abordado o segundo tipo e, portanto, teremos de determinar a estratégia de comutação mais adequada para cumprir os objetivos de controle.

Pontos de destaque desse conjunto de sistemas são as suas propriedades intrínsecas. Uma delas é a existência de modos deslizantes estáveis. Nesta situação, a comutação atinge uma frequência arbitrariamente elevada, fazendo com que o sistema apresente uma dinâmica inédita, que difere do comportamento de cada subsistema isolado.

Outra propriedade interessante, é que a comutação entre os subsistemas pode gerar novos pontos de equilíbrio, que são diferentes dos pontos de equilíbrio de cada subsistema isolado. Este fato é de grande interesse no campo da eletrônica de potência.

Para prosseguir na definição, existem algumas notações usuais. A combinação convexa de um conjunto de matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$ é denotada por $A_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i$ onde λ pertence ao conjunto Λ definido a seguir:

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i = 1\} \quad (3.1)$$

em que $\mathbb{K} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$.

3.2 Definição

Matematicamente a definição de sistemas afins com comutação no espaço de estados é a seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma, & x(0) = x_0 \\ z(t) = C_\sigma x(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

sendo que as matrizes A_i , b_i e C_i possuem dimensões compatíveis, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada e $\sigma(\cdot)$ é a estratégia de comutação a qual seleciona um dos N subsistemas disponíveis. O vetor b_i é o termo afim, que permite ao sistema possuir vários pontos de equilíbrio $x_e \in X_e$ com

$$X_e = \{x_e \in \mathbb{R}^{n_x} : x_e = -A_\lambda^{-1}b_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \quad (3.3)$$

Outra maneira de escrever estes sistemas é utilizando uma variável auxiliar $\xi(t) = x(t) - x_e$. A partir disso, obtemos o seguinte

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_\sigma \xi(t) + \ell_\sigma(t), & \xi(0) = \xi_0 \\ z_e(t) = C_\sigma \xi(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

em que $\ell_i(t) = A_i x_e + b_i$, para todo $i \in \mathbb{K}$, $z_e(t) = z(t) - C_\sigma x_e$ e $\xi_0 = x(0) - x_e$. A vantagem desta descrição alternativa é que a origem torna-se sempre o ponto de equilíbrio de interesse, uma vez que $x(t) \rightarrow x_e$ sempre que $\xi(t) \rightarrow 0$.

Para esta classe de sistemas, o objetivo de controle é determinar uma regra de comutação $\sigma(x(t))$ de forma a assegurar estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio de interesse $x_e \in X_e$. Idealmente, deseja-se determinar $\sigma(\cdot)$ que minimiza o custo:

$$\min_{\sigma} \int_0^{\infty} (z - C_\sigma x_e)'(z - C_\sigma x_e) dt \quad (3.5)$$

para um dado $x_e \in X_e$. Este problema é virtualmente impossível de ser resolvido, pois devido à regra de comutação, o sistema em estudo é não-linear e variante no tempo. Logo, como em (DEAECTO et al., 2010), a proposta é assegurar um custo garantido adequado através da minimização de um limitante superior de (3.5).

A seguir apresentamos dois teoremas já disponíveis em (GARCIA et al., 2009) e (DEAECTO et al., 2010), que fornecem condições suficientes para estabilidade assintótica global de $x_e \in X_e$ e um custo garantido.

Teorema 2. *Considere o sistema afim com comutação (3.2), o ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ e seu vetor $\lambda \in \Lambda$ associado, dados. Definindo $Q_i = C_i' C_i$, se existir uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ simétrica definida positiva satisfazendo a LMI*

$$A_\lambda' P + P A_\lambda + Q_\lambda < 0 \quad (3.6)$$

então a regra de comutação

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi'(Q_i \xi + 2P(A_i x + b_i)) \quad (3.7)$$

com $\xi(t) = x(t) - x_e$ faz com que o ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ seja globalmente assintoticamente estável e assegura o custo garantido

$$J = \int_0^\infty (z - C_\sigma x_e)'(z - C_\sigma x_e) dt < (x_0 - x_e)'P(x_0 - x_e) = \xi_0'P\xi_0 \quad (3.8)$$

Demonstração. Embora a prova já esteja disponível em (DEAECTO et al., 2010), ela será repetida aqui por conveniência. Considerando o sistema afim com comutação (3.2), a estratégia de comutação (3.7) e adotando a função de Lyapunov quadrática $v(x) = \xi'P\xi$, temos que a derivada no tempo em relação a uma trajetória arbitrária do sistema fornece

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi) &= \dot{x}'P\xi + \xi'P\dot{x} \\ &= 2\xi'P(A_\sigma x + b_\sigma) \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} \xi'(Q_i \xi + 2P(A_i x + b_i)) - \xi'Q_\sigma \xi \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} (\xi'(A_i'P + PA_i + Q_i)\xi + 2\xi'P(A_i x_e + b_i)) - \xi'Q_\sigma \xi \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} (\xi'(A_\lambda'P + PA_\lambda + Q_\lambda)\xi + 2\xi'P(A_\lambda x_e + b_\lambda)) - \xi'Q_\sigma \xi \\ &\leq \xi'(A_\lambda'P + PA_\lambda + Q_\lambda)\xi + 2\xi'P(A_\lambda x_e + b_\lambda) - \xi'Q_\sigma \xi \\ &< \xi'Q_\sigma \xi \end{aligned}$$

em que a terceira igualdade é uma consequência da regra de comutação (??), a quarta igualdade se dá pela substituição de $x = \xi + x_e$, a quinta igualdade e a primeira desigualdade é devido ao operador mínimo e a última desigualdade se deve às condições (3.6) e $A_\lambda x_e + b_\lambda = 0$ pois $x_e \in X_e$. Então podemos concluir x_e é globalmente assintoticamente estável, pois $\dot{v}(\xi) < 0$ para todo $\xi \neq 0$. Integrando a última desigualdade de zero a infinito, levando em consideração que $v(\xi(\infty)) = 0$, obtemos o custo garantido (3.8) e conclui-se a prova. \square

Um ponto importante sobre este teorema é que ele não exige nenhuma propriedade de estabilidade das matrizes dinâmicas dos subsistemas. Em outras palavras, ele pode garantir estabilidade mesmo que todos os subsistemas sejam instáveis. Entretanto, note que a matriz $P > 0$, solução da LMI (3.6), é dependente do ponto de equilíbrio escolhido, devido ao vetor $\lambda \in \Lambda$. Logo, a regra de comutação $\sigma(x)$ deve ser reprojetaada a cada escolha de $x_e \in X_e$ e isto pode ser um inconveniente em aplicações práticas. O próximo teorema apresenta uma regra de comutação linear mais simples, baseada em condições mais conservadoras, mas que são robustas no que se refere à escolha do ponto de equilíbrio.

Teorema 3. *Considere o sistema afim com comutação (3.2) e o ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ de interesse. Definindo $Q_i = C_i' C_i$, se existir uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva satisfazendo as LMIs*

$$A_i' P + P A_i + Q_i < 0 \quad (3.9)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, então a regra de comutação

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' P (A_i x_e + b_i) \quad (3.10)$$

onde $\xi(t) = x(t) - x_e$ faz com que os pontos de equilíbrio $x_e \in X_e$ sejam globalmente assintoticamente estável e assegura o custo garantido (3.8).

Demonstração. A prova está disponível em (DEAECTO et al., 2010), mas será apresentada aqui por conveniência. Considerando o sistema afim com comutação (3.2), a estratégia de comutação (3.10) e adotando a função de Lyapunov quadrática $v(x) = \xi' P \xi$, temos que a derivada no tempo dessa trajetória é:

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi) &= \dot{x}' P \xi + \xi' P \dot{x} \\ &= 2\xi' P (A_\sigma x + b_\sigma) \\ &= 2\xi' P (A_\sigma x_e + b_\sigma) + \xi' (A_\sigma' P + P A_\sigma) \xi \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} (2\xi' P (A_i x_e + b_i)) + \xi' (A_\sigma' P + P A_\sigma + Q_\sigma) \xi - \xi' Q_\sigma \xi \\ &< \min_{\lambda \in \Lambda} (2\xi' P (A_\lambda x_e + b_\lambda)) - \xi' Q_\sigma \xi \\ &\leq 2\xi' P (A_\lambda x_e + b_\lambda) - \xi' Q_\sigma \xi \\ &< \xi' Q_\sigma \xi \end{aligned}$$

em que a terceira igualdade foi obtida fazendo $x = \xi + x_e$ e a quarta é uma consequência da regra de comutação (3.10). Já a primeira desigualdade segue do fato de $A_i' P + P A_i + Q_i < 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Finalmente, a segunda e terceira desigualdades decorrem, respectivamente, do operador mínimo e do fato de que $x_e \in X_e$ e, portanto, $A_\lambda x_e + b_\lambda = 0$. Por fim, integrando a última desigualdade, já feito na prova anterior, obtemos (3.8). Conclui-se a prova. \square

Comparando os dois teoremas, é possível perceber que o segundo é mais ameno para aplicações práticas, pois a regra de comutação (3.10) é robusta, no que se refere à escolha do ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ e é linear sendo, portanto, mais simples de implementar. De fato, a matriz $P > 0$ não depende de $\lambda \in \Lambda$ que está associado a $x_e \in X_e$. Em contrapartida, uma condição necessária para estabilidade é que todos os subsistemas sejam estáveis e admitam a mesma matriz $P > 0$ como solução das desigualdades de Lyapunov. Logo, este teorema é mais conservador do que Teorema 2 apresentado anteriormente. .

3.3 Exemplos didáticos

Nesta seção, para ilustrar as teorias abordadas neste capítulo, vamos trazer alguns modelos de sistemas dinâmicos chaveados, para serem controlados com as regras de comutação dos Teoremas 2 e 3. Outros exemplos também podem ser encontrados nos artigos (GARCIA et al., 2009)(DEAECTO et al., 2010).

Mais especificamente, vamos resolver o seguinte problema de otimização convexa

$$\inf_{P \in \psi} \text{Tr}(P) \quad (3.11)$$

com ψ sendo o conjunto de soluções factíveis da LMI (3.6) no caso do Teorema 2 ou das LMIs (3.9) no caso do Teorema 3.

Os exemplos ilustrados nos tópicos adiante são dois, sendo o primeiro um modelo acadêmico com subsistemas estáveis e o segundo, um exemplo prático de eletrônica de potência (conversor buck-boost).

3.3.1 Exemplo acadêmico

Considere o sistema afim com comutação definido pelos subsistemas:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}, E_1 = E_2 = I$$

com autovalores de A_1 e A_2 no semiplano esquerdo $\{-3 \pm 2j\}$, $\{-4, -8\}$, respectivamente.

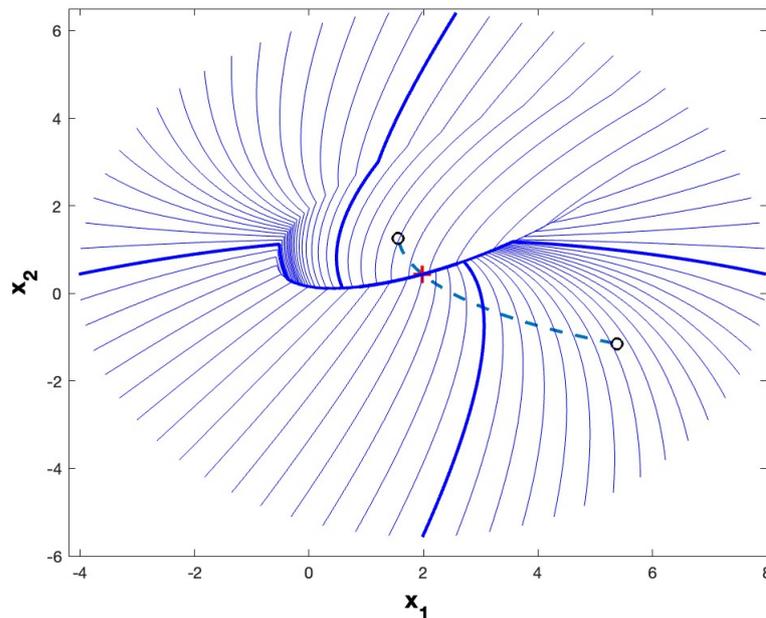


Figura 1 – Plano de fase para o exemplo acadêmico (regra quadrática)

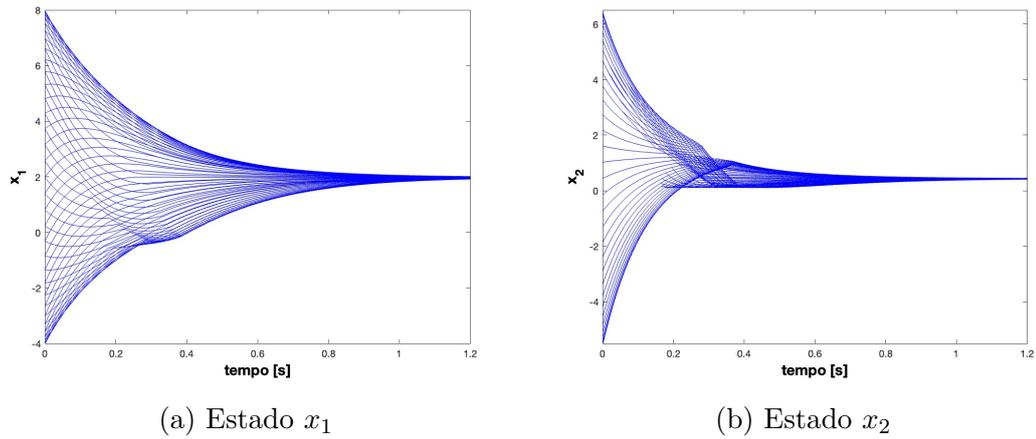


Figura 2 – Evolução dos estados para o exemplo acadêmico (regra quadrática)

Calculando o conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis (3.3) através do software MatLab¹, escolhemos o ponto $x_e = [1.9818 \ 0.4364]'$ associado ao vetor $\lambda = [0.4 \ 0.6]'$. Para ambos os casos vamos usar como condições iniciais o círculo de raio $r = 6$ em torno do ponto de equilíbrio x_e , assim, $x_0 = r[\cos(i) \ \sin(i)]' + x_e$, com $i \in [0, 2\pi]$.

Resolvendo as condições do Teorema 2, obtemos:

$$P = \begin{bmatrix} 0.1494 & -0.0545 \\ -0.0545 & 0.1105 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Na Figura 1 temos o plano de fase dos estados x_1 e x_2 . Também nela, estão destacados com 'o' os pontos de equilíbrio de cada subsistema $x_{e1} = [5.3846 \ -1.1538]'$, $x_{e2} = [1.56251 \ 2.2500]'$,

¹ MatLab é um *software* interativo de alta performance voltado para cálculos numéricos

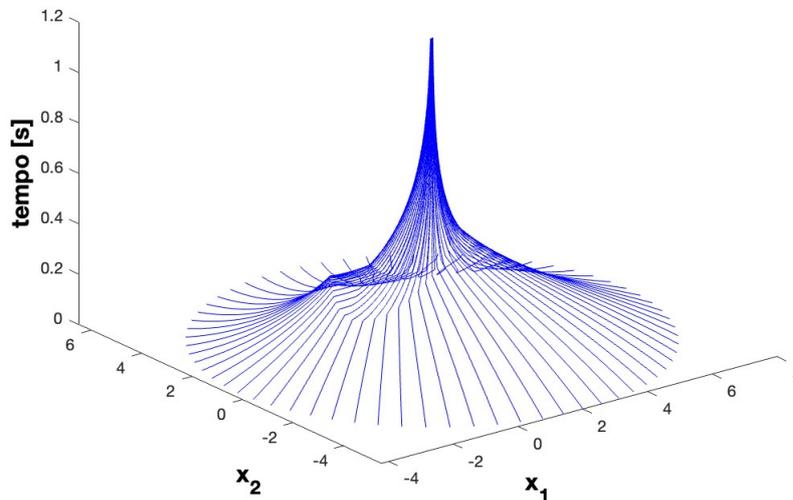


Figura 3 – Plano de fase em função do tempo para o exemplo acadêmico (regra quadrática)

já a linha tracejada é o conjunto de pontos de equilíbrio possíveis X_e associados a $\lambda \in \Lambda$ e por fim '+' é o ponto de equilíbrio escolhido x_e .

Um detalhe interessante de se notar é a formação de uma elipse, a qual em seu contorno é possível visualizar a existência de modos deslizantes, os quais foram comentados no início da seção como uma propriedade intrínseca desse tipo de sistema de dinâmico, onde a frequência se torna infinita. Neste caso os modos são estáveis, como podemos atentar nas Figuras 1, 2 e 3.

Agora, resolvendo as condições do Teorema 3, temos:

$$P = \begin{bmatrix} 0.1923 & -0.1154 \\ -0.1154 & 0.2692 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

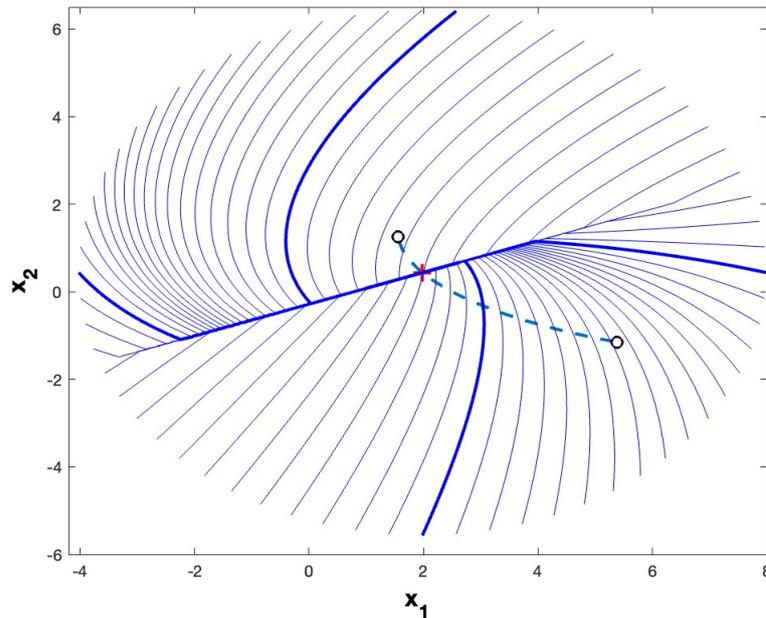


Figura 4 – Plano de fase para o exemplo acadêmico (regra linear)

Neste segundo caso com regra linear, podemos constatar na Figura 4 que ao invés de uma elipse, agora a superfície de comutação é uma reta e, assim como no caso anterior, a mesma possui partes onde há ocorrência de modos deslizantes estáveis (Figuras 4, 5 e 6). Outro ponto de vantagem que vale ressaltar, é que como já exposto na teoria, mesmo escolhendo outro ponto $x_e \in X_e$ a matriz P se mantém (3.13), ao contrário do primeiro caso onde P altera para cada nova escolha.

O próximo exemplo será usado apenas a regra de comutação linear, a qual para sistemas práticos é a mais indicada.

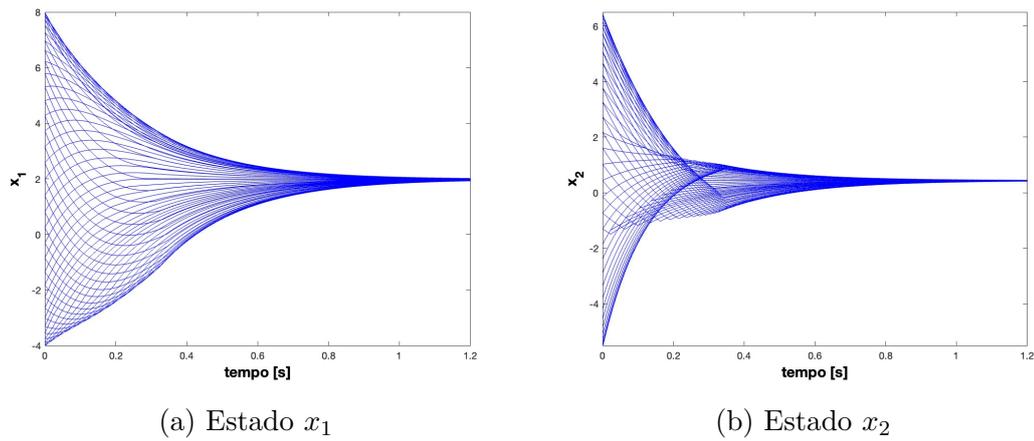


Figura 5 – Evolução dos estados para o exemplo acadêmico (regra linear)

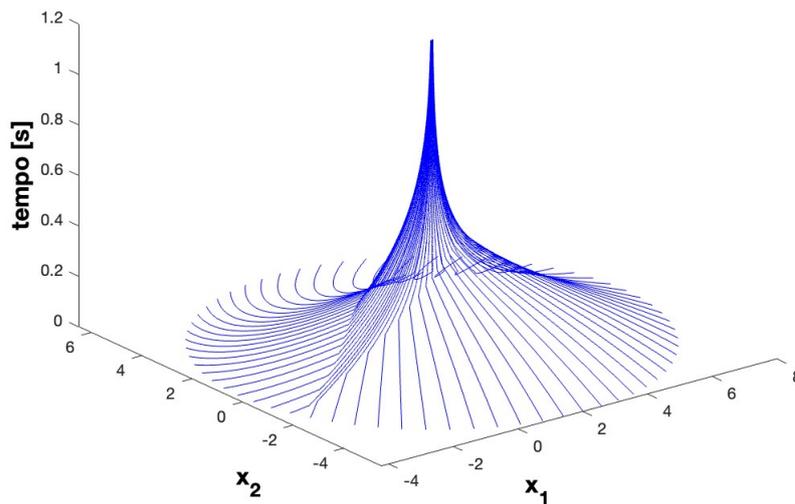


Figura 6 – Plano de fase em função do tempo para o exemplo acadêmico (regra linear)

3.3.2 Modelo prático: conversor buck-boost

Para este exemplo vamos considerar o controle de um conversor CC-CC do tipo buck-boost. Estes tipos de conversores têm o intuito que amplificar ou reduzir tensão (ARRABAÇA; GIMENEZ, 2016). Na Figura 7 é possível observar um esquemático de um conversor buck-boost.

Este exemplo e outros de eletrônica de potência podem ser revisados em (DEAECTO et al., 2010), (ARRABAÇA; GIMENEZ, 2016) e (SEDRÁ; SMITH, 2007)(HALKIAS; MILLMAN, 1981). O modelo em espaço de estados deste conversor é dado por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ 0 & -1/R_0C_0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C_0 & -1/R_0C_0 \end{bmatrix}$$

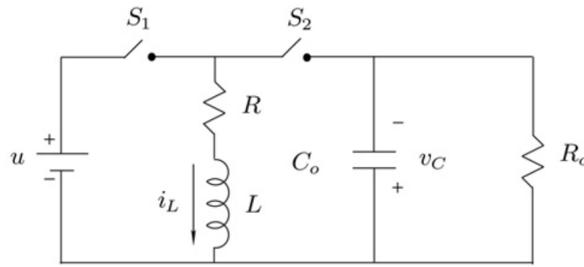


Figura 7 – Circuito elétrico - conversor buck-boost

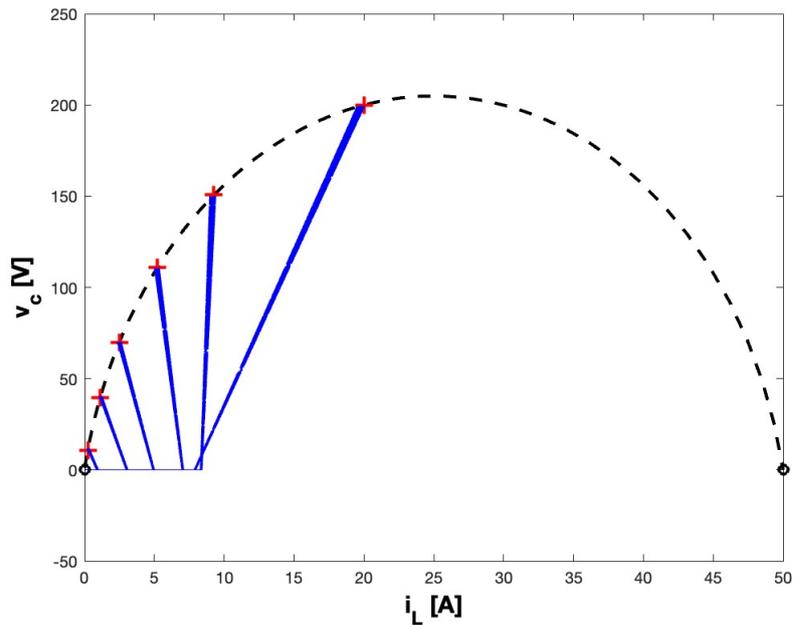


Figura 8 – Plano de fase do conversor buck-boost

$$b_1 = \begin{bmatrix} u/L \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{R_0} \end{bmatrix}$$

Considerando que i_L é a corrente no indutor e V_C é a tensão no capacitor sendo estes os elementos do vetor de estados $x = [i_L \ v_C]^T$. O conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis são calculados por

$$X_e = \{(i_e, v_e) : 0 \leq v_e \leq R_0 i_e, v_e^2 + (RR_0)i_e^2 - (R_0 u)i_e + uv_e = 0\} \quad (3.14)$$

deste fato temos que a faixa de pontos de tensão atingíveis é $0 \leq V_e \leq (\sqrt{R_0/4R})u$ satisfazendo $R \ll R_0$. Assim vamos considerar os valores: $u = 100\text{V}$, $R = 2\Omega$, $L = 500\mu\text{H}$, $C_0 = 470\mu\text{F}$ e $R_0 = 50\Omega$. Utilizando das condições do Teorema 3, temos:

$$P = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.1449 & 0.0088 \\ 0.0088 & 0.2478 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

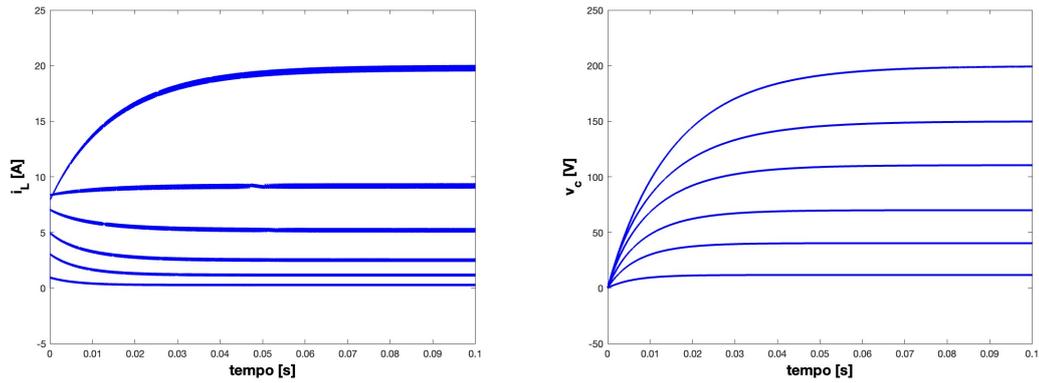
(a) Estado i_L (b) Estado V_C

Figura 9 – Os estados do conversor buck-boost em relação ao tempo

Como no exemplo anterior, temos na Figura 8, o conjunto de pontos de equilíbrio X_e são identificados com a linha tracejada, já o símbolo '+' denota os pontos escolhidos para a simulação. A condição inicial $x(0) = [0 \ 0]'$ foi adotada para todos os casos.

Podemos observar na Figura 9 que o período de regime transitório é de 60ms e o pico de corrente máxima é de aproximadamente 20 A para o caso da tensão em 190V.

4 Desigualdades matriciais lineares diferenciais

Neste capítulo, são apresentados os principais resultados deste trabalho. Mais especificamente, condições alternativas às fornecidas no capítulo anterior para tratar estabilidade assintótica global de sistemas afins com comutação a tempo contínuo são obtidas. Estas condições são expressas em termos de Desigualdades Matriciais Lineares Diferenciais (DLMIs) e baseadas em uma função de Lyapunov convexa e variante no tempo. Nosso interesse neste estudo é a possibilidade de obter condições de projeto menos conservadoras do que as existentes na literatura para tratar futuramente problemas mais gerais relacionados a sistemas afins com comutação que englobam controle robusto e via realimentação de saída. A utilização de condições DLMIs na área de projeto de controle é um tema atual que está ganhando cada vez mais notoriedade na comunidade científica. A literatura recente já apresenta resultados nas áreas de controle robusto, sistemas variantes no tempo, controle com dados amostrados e estabilidade de ciclos limites, veja (GABRIEL; GONÇALVES; GEROMEL, 2018), (GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2019), (EGIDIO; DEAECTO; GEROMEL, 2020), (WU; HE; LI, 2022), (PEREIRA et al., 2023b), (PEREIRA et al., 2023a).

Nosso objetivo neste capítulo é aplicar os resultados recentes propostos em (GONÇALVES; GABRIEL; GEROMEL, 2019) para tratar sistemas afins com comutação a tempo contínuo. Esta referência apresenta uma nova metodologia para resolver problemas de programação convexa com restrições expressas em termos de DLMIs e fornece três possibilidades de parametrização da matriz de Lyapunov: linear por partes, séries de Taylor e Fourier. O estudo para a parametrização linear por partes já foi realizado em (EGIDIO; DEAECTO; GEROMEL, 2020), sendo nossa maior contribuição neste trabalho a expansão desta análise para os casos de séries de Taylor e Fourier. Logo, vamos analisar o desempenho e a viabilidade desta nova metodologia para o caso específico de sistemas afins com comutação, para cada uma das parametrizações citadas. Um exemplo acadêmico é utilizado para ilustrar a validade dos resultados obtidos.

4.1 Formulação do problema

Desigualdades matriciais lineares diferenciais são entidades matemáticas que são definidas na forma geral como

$$\mathcal{L}(\dot{P}(t), P(t)) < 0 \quad (4.1)$$

para todo $t \in [0, T)$ com $T > 0$ sendo o intervalo de interesse escolhido pelo projetista. $P(t)$ é uma matriz simétrica e definida positiva, e $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ denota uma função matricial linear.

Para este trabalho vamos adotar condições de estabilidade alternativas para sistemas afins com comutação (3.2) a partir da adoção de uma função de Lyapunov convexa variante no tempo

$$v(\xi(t), t) = \xi(t)'P(t)\xi(t) \quad (4.2)$$

sendo $P(t)$ periódica para todo $t \geq 0$, ou seja, $P(t) = P(t+T) > 0$ e, portanto, satisfazendo a condição de contorno $P(0) = P(T)$. Estas condições já estão disponíveis em (EGIDIO; DEAECTO; GEROMEL, 2020) e apresentadas no teorema a seguir.

Teorema 4. *Considere o sistema afim com comutação (3.2), a função de Lyapunov (4.2) com período $T > 0$ e o ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ com seu vetor $\lambda \in \Lambda$ associado, dados. Definindo $Q_i = C_i' C_i$, se existir uma matriz $P(t)$ simétrica definida positiva satisfazendo a DLMI*

$$\dot{P}(t) + A'_\lambda P(t) + P(t)A_\lambda + Q_\lambda < 0 \quad (4.3)$$

para todo $t \in [0, T)$ com condição de contorno $P(0) = P(T) > 0$, então a regra de comutação

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi'(2P(t)A_i + Q_i)\xi + 2\ell'_i P(t)\xi \quad (4.4)$$

com $\xi(t) = x(t) - x_e$ faz com que o ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ seja globalmente assintoticamente estável e assegure o custo garantido

$$J < \xi'_0 P(0)\xi_0 \quad (4.5)$$

com $\xi(0) = \xi_0 \neq 0$.

Demonstração. A prova está disponível em (EGIDIO; DEAECTO; GEROMEL, 2020), mas será apresentada aqui por conveniência. Considerando o sistema afim com comutação (3.2) escrito na forma alternativa (3.4), adotando a função de Lyapunov variante no tempo (4.2) e a regra de comutação (4.4), temos que a derivada no tempo em relação a uma trajetória arbitrária do sistema no intervalo $t \in [0, T)$ fornece:

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi, t) &= \dot{\xi}'P\xi + \xi'P\dot{\xi} + \xi'\dot{P}\xi \\ &= \xi'(\dot{P} + A'_\sigma P + PA_\sigma + Q_\sigma)\xi + 2\ell'_\sigma P\xi - z'_e z_e \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} \xi'(\dot{P} + A'_i P + PA_i + Q_i)\xi + 2\ell'_i P\xi - z'_e z_e \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} \xi'(\dot{P} + A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda)\xi + 2\ell'_\lambda P\xi - z'_e z_e \\ &\leq \xi'(\dot{P} + A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda)\xi + 2\ell'_\lambda P\xi - z'_e z_e \\ &< -z'_e z_e \end{aligned} \quad (4.6)$$

a terceira igualdade vem da regra de comutação (4.4), a quarta igualdade e a primeira desigualdade decorrem do operador mínimo. Já a última desigualdade é consequência de (4.3) e do fato de que $x_e \in X_e$. Devido à condição de contorno e a periodicidade de $P(t)$, a desigualdade (4.6) é válida para todo $t \geq 0$ assegurando a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$. Integrando esse último termo em ambos os lados, de $t = 0$ até $t \rightarrow \infty$, temos o custo garantido (4.5). Conclui-se assim a prova deste teorema. \square

Note que as condições de estabilidade são descritas na forma (4.1). Nosso objetivo é apresentar aproximações das DLMI de forma a descrevê-las em termos de LMIs. Como já mencionado, neste trabalho, utilizaremos os três tipos de parametrização da matriz de Lyapunov propostas em (GONÇALVES; GABRIEL; GEROMEL, 2019): a linear por partes a qual já foi aplicada em sistemas com comutação nas referências (SHAKED; SUPLIN, 2001), (EGIDIO; DEAECTO; GEROMEL, 2020), e as séries de Taylor e Fourier que ainda não foram analisadas no presente contexto. Nas próximas seções vamos desenvolver cada uma delas.

4.1.1 Linear por partes

Considere que o intervalo de tempo $[0, T)$ é dividido em n_T subintervalos com tamanho $\eta = T/n_T$. A matriz de Lyapunov $P(t)$ pode ser aproximada como

$$P(t) = P_p + \left(\frac{P_{p+1} - P_p}{\eta} \right) (t - p\eta) \quad (4.7)$$

no intervalo de tempo $t \in [p\eta, (p+1)\eta)$ com $p = 0, 1, \dots, n_T - 1$. As matrizes P_p devem ser adequadamente determinadas. É importante notar que a função é contínua e diferenciável por partes, mas não é diferenciável no pontos isolados das bordas $t = p\eta$. Além disso, a condição de contorno $P(0) = P(T)$ requer que $P_0 = P_{n_T}$.

Como apresentado em (GONÇALVES; GABRIEL; GEROMEL, 2019), para esta parametrização de $P(t)$, a DLMI (4.1) pode ser expressa, sem perda de generalidade, como a solução das seguintes LMIs

$$\mathcal{L} \left(\frac{P_{p+1} - P_p}{\eta}, P_p \right) < 0 \quad (4.8)$$

$$\mathcal{L} \left(\frac{P_{p+1} - P_p}{\eta}, P_{p+1} \right) < 0 \quad (4.9)$$

com $\eta = T/n_T$ e $p = 0, \dots, n_T - 1$. Logo, para o caso em estudo, as condições do Teorema 4 podem ser resolvidas através da solução do seguinte problema de otimização convexa

$$\inf_{\mathcal{P}} \xi_0' P_0 \xi_0 \quad (4.10)$$

com $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_{n_T}\}$ sendo o conjunto de soluções factíveis $P_p > 0$ das LMIs

$$A_\lambda' P_p + P_p A_\lambda + Q_\lambda + \frac{P_{p+1} - P_p}{\eta} < 0 \quad (4.11)$$

$$A'_\lambda P_{p+1} + P_{p+1} A_\lambda + Q_\lambda + \frac{P_{p+1} - P_p}{\eta} < 0 \quad (4.12)$$

válidas para $p = 0, \dots, n_T - 1$, respeitando a condição de contorno $P_0 = P_{n_T}$.

A seguir vamos apresentar duas parametrizações alternativas baseadas na seguinte estrutura

$$P(t) = \sum_{p \in \mathbb{N}_T} P_p \phi_p(t) \quad (4.13)$$

com $\phi_p(t) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}_T = \{0, 1, 2, \dots, n_T\}$, com $n_T \geq 1$. As funções $\phi_p(t)$, $\forall p \in \mathbb{N}_T$ constituem um conjunto de funções contínua e $P_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall p \in \mathbb{N}_T$ são matrizes simétricas a serem determinadas para cada função escolhida.

4.1.2 Série de Taylor

A aproximação de $P(t)$ por série de Taylor leva em conta a estrutura (4.13) com $\phi_p(t) = (t/h)^p$ e é dada por

$$P(t) = \sum_{p \in \mathbb{N}_T} P_p \left(\frac{t}{T} \right)^p \quad (4.14)$$

sendo esta a expansão de Taylor continuamente diferenciável. Para o caso do Teorema 4 precisamos verificar se a condição de contorno $P(0) = P(T)$ pode ser atendida.

Para $t = 0$

$$\begin{aligned} P(0) &= \sum_{p=0}^{n_T} P_p \left(\frac{t}{T} \right)^p \Big|_{t=0} = P_0 + P_1(0)^1 + \dots + P_{n_T}(0)^{n_T} \\ &= P_0 \end{aligned}$$

Para $t = T$

$$P(T) = \sum_{p=0}^{n_T} P_p \left(\frac{t}{T} \right)^p \Big|_{t=T} = P_0 + P_1 + \dots + P_{n_T}$$

Note que para satisfazer a condição de contorno $P(0) = P(T)$ devemos impor que $\sum_{p=1}^{n_T} P_p = 0$ o que é uma condição muito restritiva. Logo, esta parametrização não é adequada para aplicação no Teorema 4.

4.1.3 Série de Fourier

A parametrização de $P(t)$ por série de Fourier leva em conta a estrutura (4.13) e é dada por

$$P(t) = \sum_{p \in \mathbb{N}_T} P_p \cos \left(\left(\frac{\pi p}{2T} \right) \left(t + \left(\frac{T}{2} \right) \right) \right) \quad (4.15)$$

válida no intervalo de tempo $t \in [0, T)$. Vamos agora analisar esta função em $P(0)$ e $P(T)$ para verificar a condição de contorno.

Para $t = 0$

$$\begin{aligned} P(0) &= \sum_{p=0}^{n_T} P_p \cos\left(\frac{\pi p}{4}\right) \\ &= P_0 \cos(0) + P_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + P_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots + P_{n_T} \cos\left(\frac{\pi n_T}{4}\right) \\ &= P_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}P_1 + 0P_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}P_3 \dots + \cos\left(\frac{\pi n_T}{4}\right)P_{n_T} \end{aligned}$$

Para $t = T$

$$\begin{aligned} P(T) &= \sum_{p=0}^{n_T} P_p \cos\left(\frac{3\pi p}{4}\right) \\ &= P_0 \cos(0) + P_1 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + P_2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \dots + P_{n_T} \cos\left(\frac{3\pi n_T}{4}\right) \\ &= P_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}P_1 + 0P_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}P_3 + \dots + \cos\left(\frac{3\pi n_T}{4}\right)P_{n_T} \end{aligned}$$

A Tabela 1 apresenta as condições de contorno para $n_T = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Note que

Tabela 1 – Condições de contorno série de Fourier

n_T	Condição de contorno
3	$P_1 = P_3$
4	$P_1 = P_3$
5	$P_1 = P_3 + P_5$
6	$P_1 = P_3 + P_5$
7	$P_1 + P_7 = P_3 + P_5$
8	$P_1 + P_7 = P_3 + P_5$

diferente da série de Taylor, satisfazer a condição de contorno $P(0) = P(T)$ não implica em condições muito restritivas. Esta aproximação será adotada no método de linearização externa apresentado a seguir.

4.1.4 Método de linearização externa

Esta metodologia está disponível em (GONÇALVES; GABRIEL; GEROMEL, 2019) e refere-se a um algoritmo de convergência global cuja ideia principal é usar a noção de linearização externa para decompor o problema original em um problema convexo simples expresso em termos de LMIs.

Primeiramente é necessário já conhecer o conjunto de funções $\phi_p(t)$, $p \in \mathbb{N}_T$. Vamos agora definir um conjunto ordenado $m \geq 2$ de diferentes amostras de tempo

$$\tau_m = \{t_r \in [0, h] : r = 1, 2, \dots, m\} \quad (4.16)$$

onde $t_0 = 0$ e $t_m = T$ e os escalares

$$d_{pr} = \frac{d\phi_p}{dt}(t_r), c_{pr} = \phi_p(t_r) \quad (4.17)$$

para todo $r = 1, 2, \dots, m$ e todo $p \in \mathbb{N}_T$. Portanto, associado ao τ_m , podemos definir o conjunto convexo

$$\mathcal{P}_m = \left\{ P_0, \dots, P_{n_T} : \mathcal{L} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}_T} P_p d_{pr}, \sum_{p \in \mathbb{N}_T} P_p c_{pr} \right) \right\} < 0 \quad (4.18)$$

para todo $r = 1, 2, \dots, m$. Note que este conjunto foi obtido impondo a restrição (4.1) para todo instante de tempo $t \in \tau_m$, resultando em um conjunto convexo de m LMIs. O algoritmo de convergência global está apresentado em seguida e a sua prova de convergência está disponível em (GONÇALVES; GABRIEL; GEROMEL, 2019).

- **1º Passo:** Considere o conjunto de funções $\phi_p(t)$, para $p \in \mathbb{N}_T$, e $\tau_m = \{0, T\}$ com $m = 2$.
- **2º Passo:** Resolva o problema de programação convexa

$$\inf_{\mathcal{P}_m} \xi_0' P(0) \xi_0$$

com \mathcal{P}_m apresentado em (4.18) obtendo as matrizes simétricas P_0, \dots, P_{n_T} .

- **3º Passo:** Para a função matricial (4.13), calcule por busca unidimensional a solução ótima (θ_{m+1}, t_{m+1}) de

$$\theta_{m+1} = \max_{t \in [0, T]} \psi_{max}(\mathcal{L}(\dot{P}(t), P(t))) \quad (4.19)$$

Se $\theta_{m+1} < 0$ então **Pare**. Caso contrário, atualize $\tau_{m+1} = \tau_m \cup \{t_{m+1}\}$, então $m \leftarrow m + 1$ e volte ao **2º Passo**.

Neste algoritmo $\psi_{max}(V)$ é o maior autovalor da matriz simétrica V . Note que esta metodologia é simples e pode ser resolvida com algoritmos já disponíveis na literatura para solução de LMIs.

4.2 Exemplo didático

Os aspectos teóricos apresentados da seção anterior serão discutidos e ilustrados por um exemplo acadêmico retirado de (SANTOS, 2015). Este exemplo considera três

subsistemas instáveis de terceira ordem dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, E_1 = E_2 = E_3 = I$$

com autovalores de A_1 , A_2 e A_3 sendo $\{-0.68, 0.34 \pm 1.16j\}$, $\{0, -0.50 \pm 0.87j\}$ e $\{0.47, -1.23 \pm 0.79j\}$, respectivamente. O objetivo é projetar a regra de comutação utilizando as condições do Teorema 2 baseado na função de Lyapunov quadrática invariante no tempo e do Teorema 4 que é baseado na função de Lyapunov quadrática variante no tempo. Neste último, vamos aproximar $P(t)$ por uma função linear por partes (4.7) e por série de Fourier (4.15).

O vetor escolhido é $\lambda = [0.37 \ 0.36 \ 0.27]'$ associado ao ponto de equilíbrio $x_e = [6.67 \ 0.36 \ 0.27]'$, o qual é diferente de todos os pontos de equilíbrio dos subsistemas. Para a implementação numérica vamos utilizar o MatLab, e o Robust Control Toolbox para resolver as LMIs.

Função de Lyapunov Quadrática Invariante no Tempo

Resolvemos as condições do Teorema 2 e obtivemos o custo garantido $J_{sup} = 2.1875$ e a solução

$$P = \begin{bmatrix} 5.5694 & 5.1881 & 5.0007 \\ 5.1881 & 6.9943 & 5.6882 \\ 5.0007 & 5.6882 & 6.8758 \end{bmatrix}$$

Por simulação numérica obtivemos o custo verdadeiro $J = 1.4472 < 2.1875$.

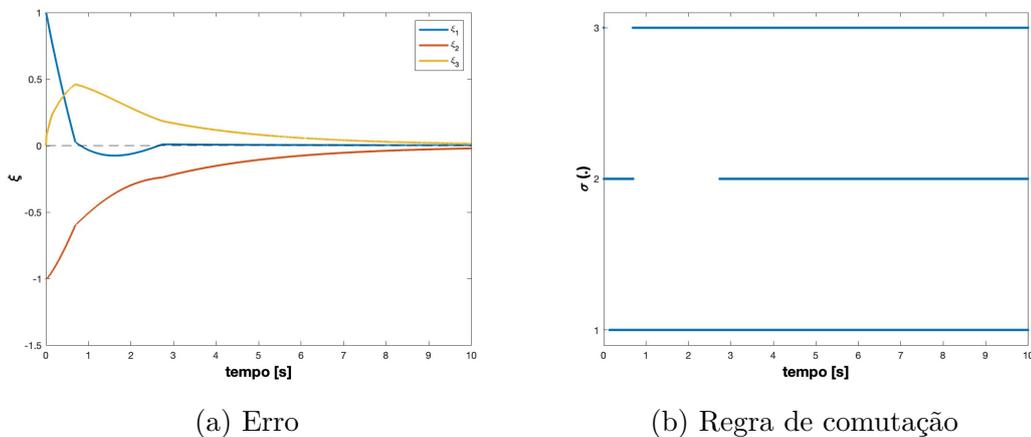


Figura 10 – Os erros dos estados e a regra de comutação em relação ao tempo

Função de Lyapunov Quadrática Variante no Tempo

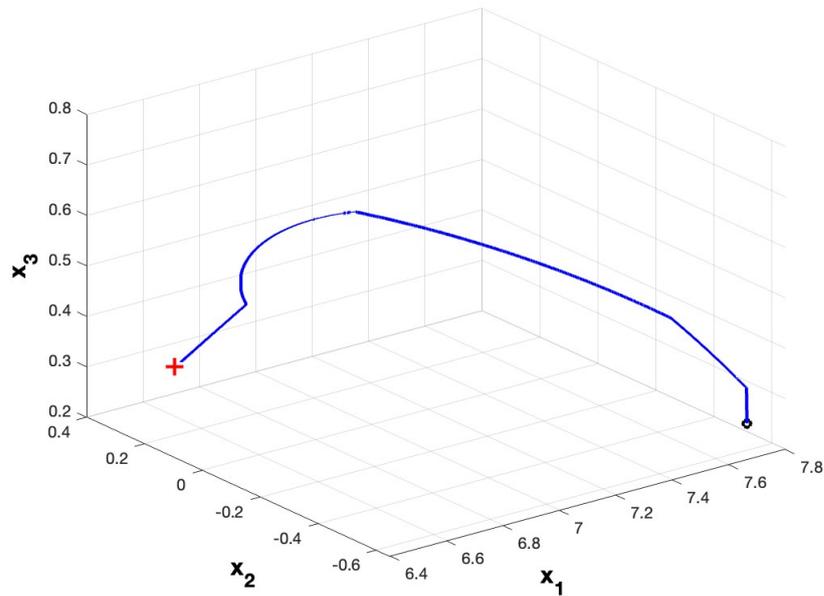


Figura 11 – Os estados em relação ao tempo

Linear por Partes

Resolvemos o problema de otimização (4.10) sujeito às LMIs (4.11)-(4.12) para $T = 1$ [s] e $n_T = 4$ e obtivemos $J_{sup} = 2.1875$ e as matrizes

$$P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = \begin{bmatrix} 5.5705 & 5.1891 & 5.0019 \\ 5.1891 & 6.9953 & 5.6893 \\ 5.0019 & 5.6893 & 6.8772 \end{bmatrix}$$

A implementação numérica forneceu o mesmo custo verdadeiro.

Série de Fourier

Neste caso, resolvemos o Teorema 4 através da implementação do algoritmo de linearização externa com $P(t)$ aproximado pela série de Fourier (4.15). Consideramos as ordens $n_T = \{3, 7\}$ e $T = 1$ [s]. De acordo com a Tabela 1, para atender as condições de contorno para $n_T = 7$, utilizamos as seguintes restrições $P_1 = P_3$ e $P_5 = P_7$. Para ambas as ordens, obtivemos os mesmos custos garantidos e verdadeiros apresentados anteriormente, ou seja, $J = 1.4472 < 2.1875$. Para $n_T = 3$ obtivemos como solução as matrizes

$$P_0 = \begin{bmatrix} 5.5688 & 5.1875 & 5.0000 \\ 5.1875 & 6.9938 & 5.6875 \\ 5.0000 & 5.6875 & 6.8750 \end{bmatrix}, P_1 = P_3 = 10^{-10} \begin{bmatrix} 0.4437 & 0.4095 & 0.4097 \\ 0.4095 & 0.4131 & 0.4060 \\ 0.4097 & 0.4060 & 0.4536 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = 10^{-10} \begin{bmatrix} 0.4777 & 0.4624 & 0.4578 \\ 0.4624 & 0.4605 & 0.4553 \\ 0.4578 & 0.4553 & 0.5108 \end{bmatrix}$$

e para $n_T = 7$ obtivemos

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \begin{bmatrix} 5.5688 & 5.1875 & 5.0000 \\ 5.1875 & 6.9938 & 5.6875 \\ 5.0000 & 5.6875 & 6.8750 \end{bmatrix}, P_1 = P_3 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.1101 & 0.0933 & 0.0990 \\ 0.0933 & 0.0979 & 0.0969 \\ 0.0990 & 0.0969 & 0.1073 \end{bmatrix}, \\
 P_2 &= 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.4655 & 0.4137 & 0.4146 \\ 0.4137 & 0.4156 & 0.4086 \\ 0.4146 & 0.4086 & 0.4542 \end{bmatrix}, P_4 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.3109 & 0.2668 & 0.2686 \\ 0.2668 & 0.2680 & 0.2642 \\ 0.2686 & 0.2642 & 0.2944 \end{bmatrix}, \\
 P_6 &= 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.1132 & 0.0993 & 0.1003 \\ 0.0993 & 0.0994 & 0.0983 \\ 0.1003 & 0.0983 & 0.1098 \end{bmatrix}, P_5 = P_7 = 10^{-7} \begin{bmatrix} 0.2265 & 0.1899 & 0.1915 \\ 0.1899 & 0.1950 & 0.1893 \\ 0.1915 & 0.1893 & 0.2108 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

As Figuras 10 e 11 apresentam a evolução dos estados e a regra de comutação. É possível notar a ocorrência de modos deslizantes estáveis a partir de $t = 3$ [s]. Na Figura 11 o símbolo 'o' é a condição inicial $x_0 = [7.67 \quad -0.64 \quad 0.27]'$ e '+' é o ponto de equilíbrio projetado.

Os códigos implementados estão disponíveis no Apêndice A.

4.3 Discussão de resultados

Tendo em vista o exemplo ilustrativo na seção anterior, podemos tirar algumas conclusões sobre o uso das funções de Lyapunov variantes no tempo para sistemas afins com comutação. A primeira observação é que todos os resultados foram coincidentes, ou seja, os mesmos valores de custos e a mesma matriz de Lyapunov $P(t) = P$ foram obtidos para todos os métodos. De fato, note que P_0 dos métodos relacionados à função de Lyapunov variante no tempo coincidiu com P da função de Lyapunov quadrática invariante no tempo. Isto ocorre pois as condições de estabilidade assintótica para o sistema com comutação estão relacionadas às condições que garantem estabilidade do sistema médio invariante no tempo

$$\dot{\xi} = A_\lambda \xi \quad (4.20)$$

Como apresentado no Lema 1 estas condições já são ótimas para a função de Lyapunov quadrática e invariante no tempo $v(\xi) = \xi' P \xi$. Logo, os resultados obtidos para a função de Lyapunov variante no tempo eram esperados e serviram para validar a aplicação do método proposto.

Como ficará claro nas conclusões deste trabalho o próximo passo é aplicar esta nova metodologia para tratar casos em que a matriz dinâmica é variante no tempo. Isto ocorre, por exemplo, no estudo de estabilidade assintótica de ciclos limites em sistemas afins com comutação a tempo contínuo. Acreditamos que o emprego desta nova metodologia

resultará em condições menos conservadoras do que aquelas resultantes de funções de Lyapunov quadráticas e invariantes no tempo.

Conclusão

Neste trabalho de graduação aplicamos o método de convergência global proposto no artigo recente (GONÇALVES; GABRIEL; GEROMEL, 2019) para resolver condições DLMI que garantem estabilidade assintótica global de um ponto de equilíbrio de interesse de sistemas afins com comutação a tempo contínuo. Consideramos as três aproximações propostas em (GONÇALVES; GABRIEL; GEROMEL, 2019) e discutimos as especificidades de cada uma delas no que diz respeito à satisfação das condições de contorno das DLMI. Os resultados obtidos foram ilustrados por meio de um exemplo acadêmico e foram coerentes com os esperados teoricamente, mostrando que a solução para os casos com a função de Lyapunov contínua foram similares ao da regra quadrática, a qual já representa a solução ótima global para sistemas dinâmicos invariantes no tempo, como o sistema médio usado para assegurar estabilidade do sistema com comutação.

Para dar continuidade ao uso dos métodos desenvolvidos neste trabalho de graduação, temos como perspectivas de estudos futuros o emprego do algoritmo de convergência global para a solução de DLMI relacionadas à estabilidade assintótica de ciclos limites para esta classe de sistemas. Além disso, iremos inserir os índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , para que então seja possível a avaliação numérica de redução de conservadorismo e complexidade computacional dentre todas as metodologias apresentadas.

Este trabalho representa uma parte do meu projeto de mestrado que, naturalmente, terá continuidade no próximo ano.

Referências

- ALBEA, C.; GARCIA, G.; ZACCARIAN, L. Hybrid dynamic modeling and control of switched affine systems: Application to dc-dc converters. In: *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 2264–2269.
- ARRABAÇA, D. A.; GIMENEZ, S. P. *Eletrônica de potência: Conversores de energia ca. CC: Teoria, prática e simulação*, 2016.
- BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 5, p. 3890–3895 vol.5.
- BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: SIAM, 1994.
- DEAECTO, G. S.; EGIDIO, L. N. Practical stability of discrete-time switched affine systems. In: *2016 European Control Conference (ECC)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 2048–2053.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; BRITO, J. L. N. Asymptotic stability of continuous-time switched affine systems with unknown equilibrium points. In: *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.: s.n.], 2022. p. 679–684.
- DEAECTO, G. S. et al. Switched affine systems control design with application to dc–dc converters. *IET control theory & applications*, IET, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010.
- EGIDIO, L. N.; DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Limit cycle global asymptotic stability of continuous-time switched affine systems. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 53, n. 2, p. 6121–6126, 2020.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback control of dynamic systems*. [S.l.]: Pearson., 2015.
- GABRIEL, G. W.; GONÇALVES, T. R.; GEROMEL, J. C. Optimal and robust sampled-data control of markov jump linear systems: A differential lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 63, n. 9, p. 3054–3060, 2018.
- GARCIA, F. S. et al. Analysis and control of dc-dc converters based on lyapunov stability theory. In: *2009 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 2920–2927.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P.; BOLZERN, P. Differential linear matrix inequality in optimal sampled-data control. *Automatica*, v. 100, p. 289–298, 2019. ISSN 0005-1098.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. *Controle linear de sistemas dinâmicos 2ª edição: teoria, ensaios práticos e exercícios*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.
- GONÇALVES, T. R.; GABRIEL, G. W.; GEROMEL, J. C. Differential linear matrix inequalities optimization. *IEEE Control Systems Letters*, v. 3, n. 2, p. 380–385, 2019.
- HALKIAS, C. C.; MILLMAN, J. *Eletrônica: Dispositivos e Circuitos*. [S.l.]: São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1981.

- KHALIL, H. K. *Nonlinear control*. [S.l.]: Pearson New York, 2015. v. 406.
- LATHI, B. P.; GREEN, R. A. *Linear systems and signals*. [S.l.]: Oxford University Press New York, 2005. v. 2.
- LUENBERGER, D. G. *Introduction to dynamic systems: theory, models, and applications*. [S.l.]: Wiley New York, 1979. v. 1.
- MA, W.; ZHANG, B. Periodic time-triggered hybrid control for dc–dc converter based on switched affine system model. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 70, n. 1, p. 311–321, 2023.
- MA, W. et al. Switching control strategy for dc–dc converters based on polynomial lyapunov function and sum-of-squares approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 70, n. 4, p. 3663–3673, 2023.
- PEREIRA, H. W. et al. Differential linear matrix inequalities in optimal and robust sampled-data filtering. *IFAC-PapersOnLine*, v. 56, n. 2, p. 9806–9811, 2023. ISSN 2405-8963. 22nd IFAC World Congress.
- PEREIRA, H. W. R. et al. Robust sampled-data fault detection filtering through differential linear matrix inequalities. *IEEE Control Systems Letters*, v. 7, p. 3253–3258, 2023.
- SANTOS, G. C. Controle via realimentação de estado de sistemas afins com comutação a tempo contínuo. *Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP*, 2015.
- SEDRA, A. S.; SMITH, K. C. *Microeletrônica*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2007.
- SERIEYE, M. et al. Attractors and limit cycles of discrete-time switching affine systems: Nominal and uncertain cases. *Automatica*, v. 149, p. 110691, 2023. ISSN 0005-1098.
- SHAKED, U.; SUPLIN, V. A new bounded real lemma representation for the continuous-time case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 9, p. 1420–1426, 2001.
- SILVA, J. A. Mesquita da; DEAECTO, G. S.; BARROS, T. A. d. S. Analysis and design aspects of min-type switching control strategies for synchronous buckndash;boost converter. *Energies*, v. 15, n. 7, 2022. ISSN 1996-1073.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199.
- WU, J.; HE, X.; LI, X. Finite-time stabilization of time-varying nonlinear systems based on a novel differential inequality approach. *Applied Mathematics and Computation*, v. 420, p. 126895, 2022. ISSN 0096-3003.

Apêndices

APÊNDICE A – Código MatLab

Os códigos abaixo foram desenvolvidos no software MatLab, usando o Robust Control Toolbox para solucionar o exemplo didático da seção 4.2. O código principal:

```

%% Sistemas afins com comutacao - Condicoes DLMI's %%
% Autor: Guilherme Abreu, Co-autor: Grace S. Deaecto %
  Universidade: UNICAMP

clear all
close all
clc

% Criando os subsistema
A{1} = [0 1 0; 0 0 1; -1 -1 0]; % Sistema 1
A{2} = [0 1 0; 0 0 1; 0 -1 -1]; % Sistema 2
A{3} = [0 1 0; 0 0 1; 1 -1 -2]; % Sistema 2

b{1} = [0; 0; 1];
b{2} = [-1; 0; 1];
b{3} = [0; -1; 2];

E{1} = eye(3);
E{2} = E{1};
E{3} = E{1};

x0 = [7.67 ; -0.64; 0.27]; % Condição inicial

% Criando matriz Qi = Ei'Ei
Q{1} = E{1}'*E{1};
Q{2} = E{2}'*E{2};
Q{3} = E{3}'*E{3};

% Escolhendo um ponto de equilibrio
lambda = [0.37 0.36 0.27];

Alambda = zeros(size(A{1})); % Criando a matriz Alambda

```

```
blambda = zeros(size(b{1})); % Criando a matriz blambda
Qlambda = zeros(size(Q{1})); % Criando a matriz Qlambda

% Calculando a matrix convexa
for i = 1:length(lambda)
    Alambda = Alambda + lambda(i)*A{i};
    blambda = blambda + lambda(i)*b{i};
    Qlambda = Qlambda + lambda(i)*Q{i};
end

xe = -inv(Alambda)*blambda; % obtendo o ponto de
    equilibrio

% Criando um vetor de tempo
dt = 1e-4; % passo de tempo
t_max = 10; % tempo maximo de simulacao
ts = 0:dt:t_max; % vetor de tempo

% Definindo os parametros para resolver a DLMI

T = 1; % periodo da funcao P(t)

% Linear por partes
nT = 2^2; % numero de subintervalos
eta = T/nT; % comprimento dos subintervalos

% Serie de Fourier
nF = 7; % numero de subintervalos (Validos {3,7,8})

% Calculando o erro inicial
xi0 = x0-xe;

% Escolher um metodo de solucao
display('Insira qual tipo de solver')
display('[0] LMI')
display('[1] Piecewise Linear')
display('[2] Fourier')
```

```
type = input('Escolha o numero: ');
% DLMI
switch type
    case 0
        %LMI
        out = solve_LMI_quadratic(Alambda,Qlambda,xi0) %
            funcao quadratica
        Po = out.Po; % recebe a matriz P
        Cto = out.cost; % recebe o custo garantido
        %simulando
        dta = simulation_quadratic(A, b, E, Q, Po, ts, x0, xe
            );
    case 1

        % Piecewise Linear
        outL = solve_DLMI_PWL(Alambda,Qlambda,T,nT,xi0)
        Po = outL.Po; % recebe as matrizes Pp
        Cto = outL.cost; % recebe o custo garantido

        %Simulando
        dta = program_simulation_PWL(A,b,E,Po,ts,x0,xe,T,nT);

    case 2

        %Fourier
        outF = solve_DLMI_Fourier(Alambda,Qlambda,T,nF,xi0)
        Po = outF.Po; % recebe as matrizes Pp
        Cto = outF.cost; % recebe o custo garantido

        %Simulando
        dta = program_simulation_Fourier(A,b,E,Po,ts,x0,xe,T,nF);

end
```

Os código das funções para solucionar as LMIs:

```
%%% Funcao para resolucao da LMI quadratica %%%%
```

```
function out = solve_LMI_quadratic(A,Q,xi0)
```

```
nx = size(A,1);
```

```
% Descreve a LMI a ser projetada
```

```
setlmiis([])
```

```
% declaracao de variveis
```

```
%=====
```

```
P = lmivar(1,[nx 1]);
```

```
%=====
```

```
% descricao das LMIs
```

```
%=====
```

```
tag = newlmi;
```

```
lmiterm([tag,1,1,P],A',1,'s');
```

```
lmiterm([tag,1,1,0],Q);
```

```
tag = newlmi;
```

```
lmiterm([-tag,1,1,P],1,1);
```

```
lmiisys = getlmiis;
```

```
% Declaracao funcao objetivo
```

```
options = [1e-4,2000,1e9,200,0];
```

```
%=====
```

```
np = decnbr(lmiisys);
```

```
c = zeros(np,1);
```

```
for i=1:np
```

```
    Pi = defcx(lmiisys,i,P);
```

```

        c(i) = xi0'*Pi*xi0;
    end

    [copt,xopt] = mincx(lmisys,c,options);

    if (isempty(copt))
        Po = [];
        return
    end

    out.Po = dec2mat(lmisys,xopt,P);

    out.cost = copt;

end

%%%% Funcao para resolucao da DLMI pelo metodo linear por
    partes %%%%%%

function out = solve_DLMI_PWL(Alamb,Qlamb,T,nT,xi0)
eta = T/nT; % comprimento do subintervalo
n = size(Alamb,1); % tamanho da matriz Alamb

% criando sistema de LMIs
setlmis([])

% Definindo as variaveis das LMIs
for p = 1:nT
    P{p} = lmivar(1,[n, 1]); % definindo o tamanho e que e
        simetrica
end
P{nT+1} = P{1}; % condicao de contorno

% criando o conjunto de LMIs
for p = 1:nT
    tag = newlmi;
    lmiterm([tag,1,1,P{p}],Alamb',1,'s'); % A'PO + POA
    lmiterm([tag,1,1,0],Qlamb); % Q
end

```

```

    lmiterm([tag,1,1,P{p+1}],1,1/eta); %
    lmiterm([tag,1,1,P{p}],1,-1/eta); %

    tag = newlmi;
    lmiterm([tag,1,1,P{p+1}],Alamb',1,'s'); % A'P0 + POA
    lmiterm([tag,1,1,0],Qlamb); % Q
    lmiterm([tag,1,1,P{p+1}],1,1/eta); %
    lmiterm([tag,1,1,P{p}],1,-1/eta); %

    tag = newlmi;
    lmiterm([-tag,1,1,P{p}],1,1); % P0>0
end

lmisys = getlmis; % obter o sistema de LMIs

% Declaracao funcao objetivo
options = [1e-4,2000,1e9,200,0];
%=====

np = decnbr(lmisys);

c = zeros(np,1);
for i=1:np
    Pi = defcx(lmisys,i,P{1});
    c(i) = xi0'*Pi*xi0;
end

[copt,xopt] = mincx(lmisys,c,options); %resolvendo as LMIs

if (isempty(copt))
    out = []; % conferindo valor nulo
    return
end

for p=1:nT
    out.Po{p} = dec2mat(lmisys,xopt,P{p}); % obtendo as
        matrizes Pp calculadas
end

```

```
out.cost = copt; % obtendo custo
end

%%% Funcao para resolucao da DLMI pelo metodo serie de
      Fourier %%%
function out = solve_DLMI_Fourier(Alamb, Qlamb, T, nF, xi0)

n = size(Alamb,1); % obtendo dimensao da matriz

taum = [0 T]; % criando o conjunto ordenado tau_m
flag = 1;

cir = @(i,tr) cos((pi*i/(2*T))*(tr+T/2)); % criando a funcao
      cir
dir = @(i,tr) -(pi*i/(2*T))*sin((pi*i/(2*T))*(tr+T/2)); %
      criando a derivada de cir

while flag==1

    % criando sistema de LMIs
    setlmis([])
    % Definindo as variaveis das LMIs
    for i = 1:nF+1
        P{i} = lmivar(1,[n, 1]); % definindo o tamanho e que
            e simetrica
    end
    J = lmivar(1,[n, 1]);

    % Condicoes de contorno
    if nF==3 | nF==4
        P{2} = P{4};
    elseif nF==7 | nF==8
        P{2} = P{4};
        P{6} = P{8};
    end

    % Criando as LMIs
```

```

for r = 1:length(taum)
    tag = newlmi;
    for i=1:nF+1
        lmiterm([tag,1,1,P{i}],Alamb',cir(i-1,taum(r)), 's
            ');
        lmiterm([tag,1,1,P{i}],1,dir(i-1,taum(r)));
    end
    lmiterm([tag,1,1,0],Qlamb);
end

% Condicao para que Sum (Pp*Cir) >0
for r = 1:length(taum)
    tag = newlmi;
    for i=1:nF+1
        lmiterm([-tag,1,1,P{i}],1,cir(i-1,taum(r)), 's');
    end
end

% Para calcular o custo garantido
if nF == 3
    tag = newlmi;
    lmiterm([tag,1,1,P{1}],1,1);
    lmiterm([tag,1,1,P{2}],sqrt(2)/2,1);
    lmiterm([tag,1,1,P{4}],sqrt(2)/2,-1);
    lmiterm([tag,1,1,J],-1,1);

elseif nF==7
    tag = newlmi;
    lmiterm([tag,1,1,P{1}],1,1);
    lmiterm([tag,1,1,P{2}],sqrt(2)/2,1);
    lmiterm([tag,1,1,P{4}],sqrt(2)/2,-1);
    lmiterm([tag,1,1,P{5}],-1,1);
    lmiterm([tag,1,1,P{6}],sqrt(2)/2,-1);
    lmiterm([tag,1,1,P{8}],sqrt(2)/2,1);
    lmiterm([tag,1,1,J],-1,1);
end

lmisys = getlmis; % obtendo o conjunto de LMIs

```

```

% Declaracao funcao objetivo
options = [1e-7,2000,1e9,200,0];
%=====

np = decnbr(lmisys);

c = zeros(np,1);
for i=1:np
    Ji = defcx(lmisys,i,J);
    c(i) = xi0'*Ji*xi0;
end

[copt,xopt] = mincx(lmisys,c,options); % resolvendo o
    conjunto de LMIs

if (isempty(copt))
    out = []; % Se infactivel retornar nulo
    return
end

for i=1:nF+1
    out.Po{i} = dec2mat(lmisys,xopt,P{i}); % obtendo as
        matrizes Pp
end
out.cost = copt; % obtendo o custo garantido

% Metodo de linearizacao externa
t = 0:1e-3:T;
for j = 1:length(t)
    Pt = zeros(size(out.Po{1}));
    dPt = zeros(size(out.Po{1}));
    for i=1:nF+1
        Pt = Pt+out.Po{i}*cir(i-1,t(j));
        dPt = dPt+out.Po{i}*dir(i-1,t(j));
    end
    Lcal = dPt+Alamb'*Pt+Pt*Alamb+Qlamb;
    th(j) = max(eig(Lcal)); % pegando os maiores
        autovalores

```

```
end
[tho,ido] = max(th); % o maior autovalor

% Conferir se o maior autovalor e positivo
if tho>0
    taum = [taum t(ido)];
else
    out.m=length(taum);
    flag = 0;
end
end
end
```

Os códigos para a simulação de cada um dos métodos:

```
%% Simulacoes
```

```
% Simulando LMI quadratica
```

```
function dta = simulation_quadratic(A, b, E, Q, P, tspan, x0,
    xe)
```

```
N = size(A,2); % numero de subsistemas
```

```
nx = size(A{1},1); % ordem das matrizes
```

```
dt = tspan(2) - tspan(1); % comprimento do passo
```

```
Nt = length(tspan); % comprimento do vetor de tempo
```

```
dta.x = zeros(nx, Nt); % criando o vetor dos estados
```

```
dta.xi = zeros(nx, Nt); % criando o vetor dos erros
```

```
dta.sig = zeros(1, Nt); % criando o vetor regra de comutacao
```

```
dta.zz = zeros(1, Nt); % criando o vetor custo verdadeiro
```

```
x = x0;
```

```
for k = 1:Nt
```

```
    for i=1:N
```

```
        xi = x - xe;
```

```
        v(i) = xi'*Q{i}*xi + 2*xi'*P*(A{i}*x + b{i}); % regra
            comutacao
```

```
    end
```

```
    [vo,idx] = min(v); %obtendo valor minimo
```

```
    dta.x(:,k) = x;
```

```
    dta.xi(:,k) = x - xe;
```

```
    dta.sig(k) = idx;
```

```
    ze = E{idx}*(x-xe);
```

```
    dta.zz(k) = ze'*ze*dt;
```

```
Aa = [A{idx} b{idx}; zeros(1,nx) 0];
```

```
Ada = expm(Aa*dt);
```

```
Ad = Ada(1:nx, 1:nx);
```

```
bd = Ada(1:nx, end);
```

```

    x = Ad*x + bd;
end
end

% Funcao para simular um sistema com comutacao usando DLMI
  linear por partes
function dta = program_simulation_PWL(A,b,E,Po,ts,x0,x,T,nT)
;

N = size(A,2);           % numero de sistemas
nx = size(A{1},1);      % dimensao da matriz A

eta = T/nT;             % comprimento do subintervalo

dt = ts(2) - ts(1);    % passo de tempo
Nt = length(ts);       % tamanho do vetor tempo

% Gerando matrizes
dta.x = zeros(nx, Nt);  % estados
dta.xi = zeros(nx, Nt); % erro (x - xe)
dta.sig = zeros(1, Nt); % comutacao
dta.zz = zeros(1, Nt);

x = x0;                 % salvando ponto inicial

for k = 1:Nt
    p = floor(mod(ts(k),T)/eta);
    p1 = mod(p+1,nT);
    p = p+1; p1 = p1+1;
    Pt = Po{p} + (Po{p1}-Po{p})*(ts(k) - (p-1)*eta)/eta;

    for i = 1:N
        xi = x - xe;           % calculando o erro
        eli = A{i}*xe + b{i};  % calculando li

        v(i) = xi'*(2*Pt*A{i} + E{i}'*E{i})*xi + 2*eli'*Pt*xi
            ; %regra de comutacao
    end
    [~,idx] = min(v);          % regra minima
end

```

```

    % salvando os valores da struct
    dta.x(:,k) = x;
    dta.xi(:,k) = xi;
    dta.sig(k) = idx;
    ze = E{idx}*(x-xe);
    dta.zz(k) = ze'*ze*dt;

    % calculando o proximo passo pelo metodo exato
    Aa = [A{idx} b{idx}; zeros(1,nx) 0]; % matriz expandida
    Ada = expm(Aa*dt);
    Ad = Ada(1:nx, 1:nx);
    bd = Ada(1:nx, end);
    x = Ad*x + bd;
end
end

% Funcao para simular um sistema com comutacao usando DLMI
serie de Fourier
function dta = program_simulation_Fourier(A,b,E,Po,ts,x0,xe,T
,nF);

N = size(A,2); % numero de sistemas
nx = size(A{1},1); % dimensao da matriz A

dt = ts(2) - ts(1); % passo de tempo
Nt = length(ts); % tamanho do vetor tempo

% Gerando matrizes
dta.x = zeros(nx, Nt); % estados
dta.xi = zeros(nx, Nt); % erro (x - xe)
dta.sig = zeros(1, Nt); % comutacao
dta.zz = zeros(1, Nt); % custo verdadeiro

x = x0; % salvando ponto inicial
t = mod(ts,T); % criando vetor de tempo auxiliar
for k = 1:Nt
    Pt = [zeros(size(Po{1}))];
    for i = 1:nF+1

```

```
Pt = Pt + Po{i}*cos((pi*(i-1)/(2*T))*(t(k) + T/2)); %  
    regra de comutacao  
end  
  
for i = 1:N  
    xi = x - xe;          % calculando o erro  
    eli = A{i}*xe + b{i}; % calculando li  
  
    v(i) = xi'*(2*Pt*A{i} + E{i}'*E{i})*xi + 2*eli'*Pt*xi  
        ; %regra de comutacao  
end  
[~,idx] = min(v);      % regra minima  
  
% salvando os valores da struct  
dta.x(:,k) = x;  
dta.xi(:,k) = xi;  
dta.sig(k) = idx;  
ze = E{idx}*(x-xe);  
dta.zz(k) = ze'*ze*dt;  
  
% calculando o proximo passo pelo metodo exato  
Aa = [A{idx} b{idx}; zeros(1,nx) 0]; % matriz expandida  
Ada = expm(Aa*dt);  
Ad = Ada(1:nx, 1:nx);  
bd = Ada(1:nx, end);  
x = Ad*x + bd;  
end  
end
```