

EM-707 : Controle de Sistemas Mecânicos

Primeira Lista de Exercícios

1. Determine a transformada de Laplace e o seu respectivo domínio para as seguintes funções, sabendo-se que $f(t) = 0$ para todo $t < 0$ e $a \in \mathbb{R}$.

a) $f(t) = \text{sen}(at)$.

b) $f(t) = \cos(at)$.

c) $f(t) = e^t + e^{-t}\cos(t)$.

d) $f(t) = e^{-t} + e^t\cos(t)$.

e) $f(t) = t^2e^{at}$.

f) $f(t) = t^2\text{sen}(at)$.

g) $f(t) = \cos(t + a)$.

h) $f(t) = \text{sen}^2(t)$.

i) $f(t) = -e^{-t}/t$, $t > 0$.

2. Utilizando as propriedades da transformada de Laplace, determine a transformada da função a seguir:

$$q(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in [0, 1/2) \\ e^{-2t}\cos(2t - 1) & , \quad t \in [1/2, \infty) \end{cases} .$$

3. Considere $q(t)$ uma função tal que $q(t) = 0$ para todo $t < 0$. Defina em todo o intervalo real $t \in (-\infty, \infty)$ a função $f(t) := q(t) + q(-t)$. Expresse $\hat{f}(s)$ e $\mathcal{D}(\hat{f})$ em termos de $\hat{q}(s)$ e $\mathcal{D}(\hat{q})$.
4. Determine, para as funções dadas abaixo, os seus domínios e suas respectivas transformadas de Laplace inversas :

$$\hat{f}(s) = \frac{1 - e^{-4s}}{s + 3} , \quad \hat{f}(s) = \ln \left(\frac{s}{s^2 + 9} \right)$$

5. Determine o valor da seguinte integral

$$I = \int_0^\infty te^{-2t}\cos(t)dt.$$

6. Obtenha a transformada de Laplace inversa das seguintes funções.

$$\text{a) } \hat{f}(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

$$\text{b) } \hat{f}(s) = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)^2}.$$

$$\text{c) } \hat{f}(s) = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)^3}.$$

$$\text{d) } \hat{f}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)^2(s^2+2s+5)}.$$

7. Usando a transformada de Laplace, determine a solução geral da equação íntegro-diferencial

$$\dot{y}(t) + 3y(t) + 2 \int_0^t y(\tau) d\tau = 7$$

com a condição inicial $y(0) = 5$.

8. Resolva as equações diferenciais a seguir para todo $t \geq 0$, lembrando que $\delta(t)$ é a função impulso unitário e $v(t)$ é o degrau unitário.

$$\text{a) } \ddot{y} + 2\dot{y} + y = \delta(t) + 2v(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

$$\text{b) } \ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = te^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

$$\text{c) } \ddot{y} + 6\dot{y} + 34y = e^{-3t} \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

9. Determine, com auxílio da transformada de Laplace, a solução geral do sistema de equações diferenciais $\dot{y}(t) = x(t) - 1$ e $\dot{x}(t) = y(t) + 1$, sujeito às condições iniciais $y(0) = 0$ e $x(0) = 1$.

10. Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = \omega_n^2v(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

em que $0 < \xi < 1$ e $v(t)$ é o degrau unitário. Definido $\omega_d := \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$, mostre que :

- a) Sua solução geral é dada por

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_nt} \left(\cos(\omega_dt) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_dt) \right)$$

- b) O valor máximo de $y(t)$ ocorre para $t = t_M$ tal que

$$\omega_d t_M = \pi.$$

c) O valor máximo de $y(t)$ é dado por

$$\max_{t \geq 0} y(t) = 1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}.$$

11. Considere $y(t)$ uma função definida para todo $t \geq 0$, solução da seguinte equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 2\dot{v}(t)$$

com $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$ e $v(t)$ sendo o degrau unitário. Determine:

- a) a transformada de Laplace $\hat{y}(s)$ e o seu domínio.
- b) a resposta $y(t)$ e os valores $y(0^+)$ e $\dot{y}(0^+)$.
- c) o valor da integral

$$I = \int_0^\infty y(t)e^{-2t}dt$$

12. Considere $y(t)$ uma função definida para todo $t \geq 0$, solução da seguinte equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = te^{-2t}$$

com condições iniciais nulas. Determine:

- a) a transformada de Laplace $\hat{y}(s)$ e o seu domínio.
- b) o valor da integral

$$I = \int_0^\infty y(t)\sin(t)dt$$

13. A resposta de um sistema a tempo contínuo, sob condições iniciais nulas, para uma entrada do tipo rampa unitária é dada por

$$y(t) = 20t - 30 + 40e^{-t} - 10e^{-2t}, \quad \forall t \geq 0$$

- a) Determine a sua função de transferência.
- b) Forneça a sua resposta ao impulso.

14. A resposta de um sistema a tempo contínuo, sob condições iniciais nulas, para uma entrada do tipo rampa unitária é dada por

$$y(t) = t - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}, \quad \forall t \geq 0$$

- a) Determine a sua função de transferência.
- b) Forneça a sua resposta ao impulso.

15. Obtenha a representação em espaço de estado de cada uma das funções de transferência:

$$\begin{aligned} a) \ H(s) &= \frac{s^2 + 4s + 4}{s^3 - 2s^2 - s + 2}, & b) \ H(s) &= \frac{(s + 5)^2(s + 4)}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}, \\ c) \ H(s) &= \frac{s^2 - s}{s^4 - 2s^3 - 3s^2 + 4s + 4}, & d) \ H(s) &= \frac{s^2}{s^3 - 3s - 1} \end{aligned}$$

16. Obtenha as funções de transferência dos sistemas

$$\begin{aligned} a) \ \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} & \quad b) \ \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} g \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + g \end{cases} \end{aligned}$$

17. Escreva o sistema na forma canônica controlável

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} g \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

18. Considere a equação diferencial dada por

$$\ddot{\theta} + 4\dot{\theta} + 4\theta = 0, \quad \theta(0) = 1, \quad \dot{\theta} = 0, \quad t \geq 0$$

- Determine a solução θ e a saída $\dot{\theta} + 2\theta$.
 - Determine a representação em espaço de estado do sistema.
 - Determine uma representação em espaço de estado equivalente (que forneça a mesma saída), mas para condições iniciais nulas.
19. A Figura 1 mostra o diagrama assintótico de Bode de módulo de um sistema com função de transferência $H(s)$, de fase mínima, sendo que dois de seus polos são complexos conjugados. Determine
- a) A função de transferência $H(s)$ em função do fator de amortecimento.
 - b) O fator de amortecimento sabendo que a resposta em regime permanente $y_{perm}(t)$ do sistema $H(s)$ a uma entrada $u(t) = (1/\sqrt{104})\sin(2t)$ é $y_{perm}(t) = (1/2)\sin(2t + \phi)$.
 - c) Utilizando o fator de amortecimento calculado no item anterior, determine a resposta em regime permanente do sistema a uma entrada degrau unitário.

Fazem parte desta lista os Exercícios 5, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18 da Lista - Modelagem em anexo.

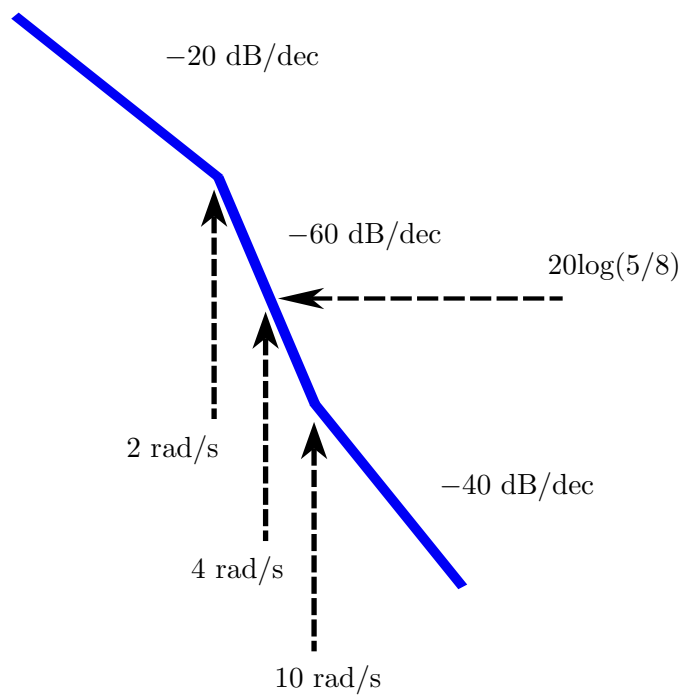


Figure 1: Diagrama assintótico de Bode de módulo de $H(s)$