

ES728 - Controle Avançado de Sistemas

Segunda Lista de Exercícios

Os exercícios desta lista foram retirados de

- J. C. Geromel, R. H. Korogui, “*Controle Linear de Sistemas Dinâmicos - Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*”, 1ª Edição, Edgard Blucher Ltda, 2011.

1. Considere a seguinte equação diferencial, com condições iniciais nulas

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + 3u$$

- a) Determine sua representação de estado.
 - b) Para $u(t) = 1, \forall t \geq 0$, determine o valor da saída $y(t)$ em regime permanente.
 - c) Considere que a entrada $u(t)$ deve ser sintetizada através de um projeto via realimentação de estado, isto é $u(t) = r(t) - Kx(t)$, onde $x(t)$ é o vetor de estado. Calcule o ganho matricial K de tal forma que o erro em regime permanente para uma referência $r(t)$ do tipo degrau seja igual a 25% e que os polos do sistema em malha fechada tenham fator de amortecimento igual $\xi = \sqrt{2}/2$.
2. Um sistema dinâmico a tempo contínuo de fase mínima possui uma função de transferência em malha aberta com todos os polos reais $G(s)$, cujo diagrama de Bode assintótico de módulo é dado pela Figura 1

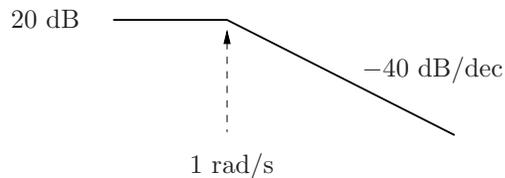


Figura 1: Diagrama de Bode de módulo.

- a) Considerando $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$, determine sua representação de estado.
 - b) Supondo que todos os estados do sistema possam ser medidos e denotando $r(t)$ o sinal de referência, adote a estratégia de controle via realimentação de estado $\hat{u}(s) = \hat{r}(s) - K\hat{x}(s)$, onde x é o estado do sistema, e calcule o vetor K de forma que os polos do sistema em malha fechada sejam -2 e -3 .
 - c) Calcule o erro em regime permanente para $r(t)$ igual a um degrau unitário.
 - d) Se possível, calcule outro valor de K para que o erro para uma referência degrau unitário seja nulo, mantendo um dos polos em malha fechada em -2 .
3. Um sistema dinâmico a tempo contínuo de fase mínima é representado por uma função de transferência em malha aberta $G(s)$, cujo diagrama de Bode assintótico de módulo é dado pela Figura 2
 - a) Considerando a relação entrada-saída $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$, determine sua representação de estado.

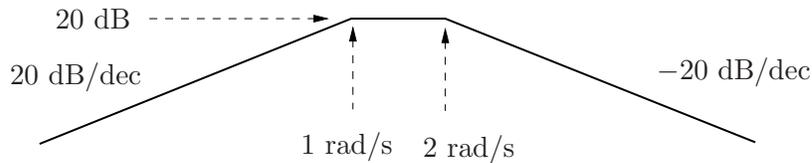


Figura 2: Diagrama de Bode de módulo.

- b) Sendo $r(t)$ o sinal de referência e $x(t)$ o vetor de estado do sistema, para o controle via realimentação de estado $u = r - Kx$, determine o ganho K de modo que os polos do sistema em malha fechada tenham constante de tempo de $1/3$ [s].
- c) Com o ganho determinado no item b) e $r(t) = 6\text{sen}(3t)$, calcule a saída $y(t)$ em regime permanente.

4. Um sistema dinâmico a tempo contínuo é descrito pela seguinte equação diferencial

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = u, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$$

- a) A partir de sua representação de estado determine um observador de estado de tal forma que a constante de tempo de seus polos seja de $0,5$ [s].
- b) Determine, em função de $t \geq 0$, o erro cometido pelo observador obtido no item a) para estimar $\dot{y}(t) \forall t \geq 0$ a partir de condições iniciais nulas.

5. Seja $G(s)$ a função de transferência de um sistema dinâmico de fase mínima a tempo contínuo com todos os polos reais, cujo diagrama de Bode assintótico de módulo é dado na Figura 3

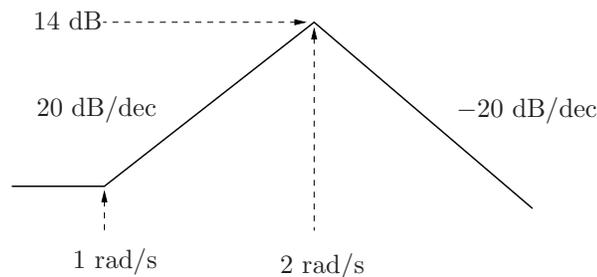


Figura 3: Diagrama de Bode de módulo.

- a) Obtenha a função de transferência $G(s)$, esboce seu diagrama de Bode de fase e estime sua margem de fase.
- b) Determine a representação de estado para o sistema $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$.
- c) Projete um observador de estado com polos cujas constantes de tempo sejam $0,20$ [s] e $0,25$ [s].
- d) Considerando $u(t) = 1 \forall t \geq 0$, condições iniciais do sistema $x(0) = [1 \ 0]'$ e condições iniciais nulas para o observador, determine o erro cometido ao se estimar a segunda variável de estado $\forall t \geq 0$.

6. Considere o sistema mecânico da Figura 4, no qual as massas têm os valores $M = 5$ [kg], $m = 2$ [kg], a constante de mola vale $\kappa = 100$ [N/m] e o coeficiente de atrito viscoso é dado por $b = 4$ [Ns/m].

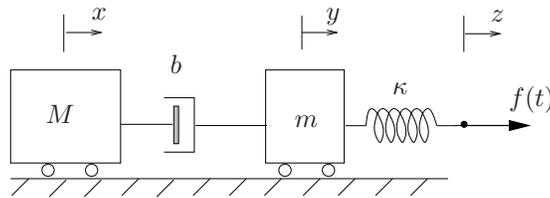


Figura 4: Massas acopladas por amortecedor.

- Deseja-se projetar um controlador via realimentação de estado de modo que os polos do sistema em malha fechada tenham fator de amortecimento igual a 0,707 e constante de tempo de 2 [s]. É possível atender a especificação? Explique.
- Supondo que se consiga medir apenas a posição $z(t)$ da extremidade da mola onde é aplicada a força $f(t)$, é possível determinar um observador de estado de modo a obter a velocidade da massa M ? Explique.
- Insira uma mola de constante elástica $\kappa = 100$ [N/m] entre as massas M e m e refaça os itens anteriores.

7. Um sistema dinâmico a tempo contínuo tem como função de transferência

$$G(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+6)}$$

- Determine a representação de estado da relação entrada-saída $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$.
- Supondo que todas as suas variáveis de estado possam ser medidas, projete um controlador via realimentação de estado de modo que:
 - a máxima sobre-elevação para uma entrada degrau seja menor ou igual a 30%.
 - o tempo de estabilização não ultrapasse 2 [s].
 - a largura de faixa não ultrapasse 50 [Hz].
 - o erro para uma entrada degrau seja nulo.
- Pensando apenas no projeto do regulador, suponha que desejamos implementar o controlador obtido no item b) através de um controlador PID. Qual deve ser a variável de estado a ser medida? Qual é a função de transferência do controlador?
- A partir da medida da saída $y(t)$ do sistema em malha aberta, determine um observador de estado, com polos alocados adequadamente, capaz de fornecer todos os estados do sistema, $\forall t \geq 0$.
- Refaça o projeto do item b) utilizando o observador de estado projetado no item d) e avalie, utilizando um pacote computacional, a resposta ao degrau do sistema em malha fechada para os dois projetos.

8. Um sistema a tempo contínuo tem como função de transferência em malha aberta

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- a) Determine a representação de estado da relação entrada-saída $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$.
- b) Supondo que todas as suas variáveis de estado possam ser medidas, calcule um ganho matricial K , de modo que a lei de controle $u(t) = r(t) - Kx(t)$ posicione os polos do sistema em malha fechada numa região do plano complexo de modo que suas constantes de tempo sejam de 0,5 [s] e seu fator de amortecimento igual a 0,5.
- c) Se quisermos implementar o controlador obtido no item b) como um PD, qual variável de $G(s)$ deve ser medida? Qual a função de transferência do controlador?
- d) Supondo que apenas a saída $y(t)$ é mensurável, projete um observador de estado que forneça $\dot{y}(t) \forall t \geq 0$.
- e) Refaça o projeto do item b) resolvendo o problema linear-quadrático, considerando peso 0,5 sobre a primeira variável de estado. Calcule o peso sobre o sinal de controle $u(t)$ de modo que o sistema em malha fechada não apresente oscilação e possua o menor tempo de estabilização possível.

9. Um sistema dinâmico a tempo contínuo tem como função de transferência em malha aberta

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

- a) Determine a representação de estado correspondente à relação entrada-saída $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$.
- b) Supondo que todas as variáveis de estado do sistema possam ser medidas, projete um controlador via realimentação de estado, alocando os polos do sistema em malha fechada de modo a garantir:
 - margem de fase maior ou igual a 40° .
 - largura de faixa entre 0,5 [Hz] e 10 [Hz].
 - erro nulo para uma entrada do tipo degrau.
- c) Refaça o projeto do item anterior, mas agora alocando os polos do sistema em malha fechada de modo que o controlador resolva o problema de otimização

$$\min \int_0^\infty [6,25x_1^2(t) + 2,5x_1(t)x_2(t) + 0,25x_2^2(t) + \rho u^2(t)] dt$$

onde $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]'$ é o vetor de estado do sistema.

Calcule $\rho > 0$ através do lugar das raízes simétrico de forma que os polos dominantes do sistema em malha fechada tenham fator de amortecimento 0,86. Determine a localização de todos os polos em malha fechada e, em seguida, calcule o ganho de realimentação de estado K que os posiciona nos valores desejados.

- d) Supondo que apenas a saída $y(t)$ da planta $G(s)$ está disponível para medição, refaça o projeto do item b) utilizando um observador de estado para gerar todas as variáveis de estado. Aloque convenientemente os polos do observador.
- e) Refaça o projeto do item anterior, alocando os polos do observador de estado assumindo um erro de 5% na medição de $y(t)$, isto é, $\mu = 25 \times 10^{-4}$ e que um erro de 10% no sinal de controle implementado, isto é, $U = 10^{-1}B$. Resolva a equação de Riccati associada ao problema linear-quadrático utilizando um pacote computacional.

f) Compare os projetos realizados nos itens d) e e) fazendo a simulação numérica do projeto ao adicionar ruídos brancos ao sinal de controle e à saída $y(t)$.

10. Considere o sistema de controle com realimentação unitária apresentado na Figura 5, onde a planta

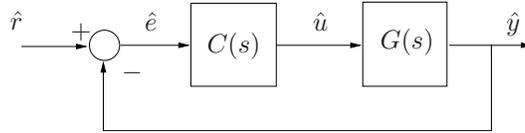


Figura 5: Sistema com realimentação unitária.

$G(s)$ e o controlador $C(s)$ admitem as seguintes representações de estado:

$$G(s) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad C(s) : \begin{cases} \dot{z} = (A - LC)z + Bu - Le \\ u = -Kz \end{cases}$$

sendo K e L ganhos matriciais a determinar.

- Interprete o funcionamento do controlador $C(s)$ através de sua representação de estado.
- Mostre que se as matrizes $(A - BK)$ e $(A - LC)$ forem estáveis, então o sistema em malha fechada é estável.
- Para cada uma das funções de transferência $G(s)$ dadas a seguir, projete um controlador $C(s)$ de acordo com a estrutura da Figura 5, de modo que:
 - o erro para uma entrada do tipo degrau seja nulo.
 - os polos em malha fechada tenham constante de tempo menor do que 0,5 [s].
 - a máxima sobre-elevação para uma entrada degrau seja de, no máximo, 40%.
 - o sistema em malha fechada rejeite ruídos a partir da faixa de 100 [rad/s].

i) $G(s) = \frac{1}{s + 1}$

ii) $G(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 6s + 25}$

- d) Refaça os projetos do item anterior no contexto do problema-linear quadrático

$$\min \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + \rho u^2(t)] dt$$

no qual $x_1(t)$ é a primeira variável de estado de $G(s)$ na representação canônica controlável. Determine $\rho > 0$ através do lugar das raízes simétrico, segundo as especificações impostas e, em seguida, calcule os ganhos K e L .

- e) Refaça os projetos dos ganhos L no item d) supondo que o sinal de controle $u(t)$ seja implementado com erro de 5%, isto é, $U = 5 \times 10^{-2}B$, e a saída $y(t)$ seja medida com erro de 10%, ou seja, $\mu = 10^{-2}$. Utilize um pacote computacional para resolver a equação de Riccati associada a esse problema.