

EA-721 : PRINCÍPIOS DE CONTROLE E SERVOMECANISMO
Primeira Lista de Exercícios

José C. Geromel e Rubens H. Korogui

Exercício 1 Resolva as equações diferenciais a seguir pelo método dos coeficientes a determinar para todo $t \geq 0$.

- a) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = t$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$
- b) $\ddot{y} + 8\dot{y} + 15y = 2e^{-3t} + 5$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$
- c) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 8e^{-t}\text{sen}(t)$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$

Exercício 2 Resolva as equações diferenciais a seguir via transformada de Laplace para todo $t \geq 0$, lembrando que $\delta(t)$ é o impulso unitário e $u(t)$ é o degrau unitário.

- a) $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \delta(t) + 2u(t)$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$
- b) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = te^{-2t}$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$
- c) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 34y = e^{-3t}\text{sen}(5t + \frac{\pi}{2})$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$

Exercício 3 Resolva as equações a diferenças pelo método dos coeficientes a determinar para todo $k \geq 0$.

- a) $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 11(-2)^k$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$
- b) $y(k+2) - 12y(k+1) + 20y(k) = 9k^2 - 2k + 1 + 75,24(0,1)^k$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0,4$
- c) $y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = 10\cos(\frac{\pi}{2}k)$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$

Exercício 4 Resolva as equações a diferenças via transformada Z , $\forall k \geq 0$.

- a) $y(k+2) + 9y(k+1) + 14y(k) = 5^k$, $y(0) = 2$, $y(1) = 1$
- b) $y(k+2) + 6y(k+1) + 5y(k) = 32k3^k$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$
- c) $y(k+2) - y(k+1) - 2y(k) = 2^k$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

Exercício 5 A resposta de um sistema a tempo contínuo, sob condições iniciais nulas, para uma entrada do tipo rampa unitária é dada por

$$y(t) = 20t - 30 + 40e^{-t} - 10e^{-2t} , \forall t \geq 0$$

- a) Qual é sua função de transferência?
- b) Qual é sua resposta ao impulso?

c) Para a entrada $g(t) = 30 \sin(20t)$ qual é sua resposta em regime permanente?

Exercício 6 A resposta de um sistema a tempo discreto, sob condições iniciais modificadas nulas, para uma entrada do tipo degrau unitário é dada por

$$y(k) = 10 - (0,4)^k + (-0,5)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

a) Qual é sua função de transferência?

b) Qual é sua resposta ao impulso?

c) Para a entrada $g(k) = \sin(\pi k/6)$ qual é sua resposta em regime permanente?

Exercício 7 Um sistema a tempo contínuo de fase mínima apresenta o diagrama de Bode assintótico de módulo segundo a Figura 1. Sabendo que este sistema apresenta um par de polos complexos conjugados com fator de amortecimento igual a 0,5; determine a função de transferência $G(s)$ do sistema e esboce seu diagrama de Bode de fase. Se este sistema for exci-

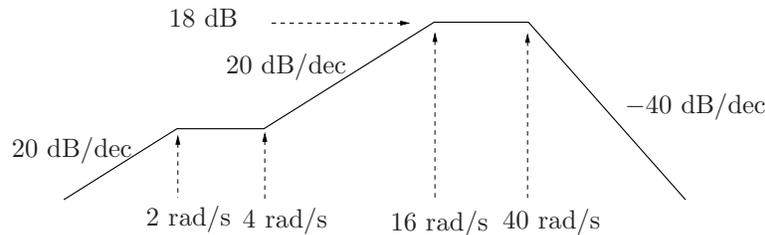


Figura 1: Diagrama de Bode para o Exercício 7.

tado por um sinal senoidal de frequência 10 [rad/s], calcule a sua saída em regime permanente utilizando os diagramas de Bode.

Exercício 8 Um sistema a tempo contínuo de fase mínima apresenta o diagrama de Bode assintótico de módulo segundo a Figura 2, sendo que todos os seus polos e os zeros são reais. Determine a função de transferência $G(s)$ do sistema e esboce seu diagrama de Bode de fase. Se este sistema for excitado por um sinal senoidal de frequência 4 [rad/s], calcule a sua saída em regime permanente utilizando os diagramas de Bode.

Exercício 9 Na Figura 3 o veículo 2 persegue o veículo 1, segundo o modelo

$$\tau \dot{v}_2 + v_2 = v_1, \quad \tau = 3 \text{ [s]}$$

e o condutor do veículo 1 imprime a velocidade $v_1(t)$ apresentada na mesma figura.

a) Se $v_2(0) = 0$, esboce $v_2(t)$ para $t \geq 0$.

b) Em $t = 15$ [s], qual a diferença de velocidade entre os dois veículos?

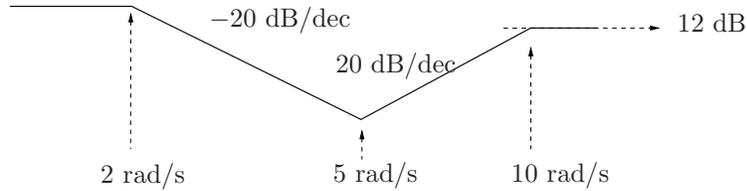


Figura 2: Diagrama de Bode para o Exercício 8.

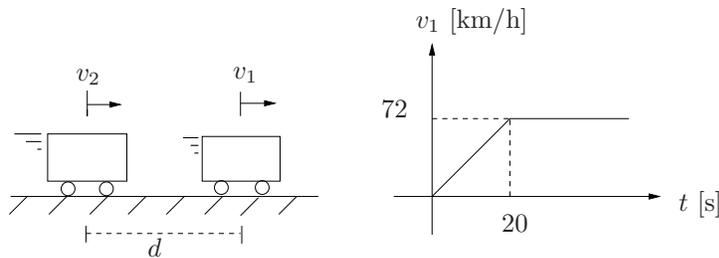


Figura 3: Veículos em perseguição.

- c) Em $t = 15$ [s] qual a velocidade do carro 2?
- d) Repita os dois itens anteriores para $t = 50$ [s].
- e) Se em $t = 0$ mediu-se $d = 40$ [m], qual é a distância entre os dois veículos em $t = 20$ [s]?

Exercício 10 Uma mola com constante elástica κ e comprimento em repouso l_0 está presa por uma extremidade ao teto. Em sua outra extremidade há uma massa m , de acordo com a Figura 4. Considerando que durante o movimento a mola não se dobra:

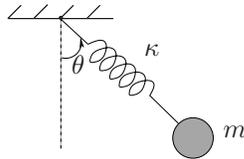


Figura 4: Pêndulo com mola.

- a) Obtenha o modelo matemático que descreve o movimento da massa.
- b) Encontre um ponto de equilíbrio do sistema.
- c) Linearize o modelo em torno do ponto de equilíbrio calculado no item anterior.

Exercício 11 A Figura 5 mostra uma corda de massa m uniformemente distribuída em seu comprimento, que se apoia sobre uma roldana de raio r e momento de inércia J . Em $t = 0$ a corda começa a escorregar exclusivamente sob a ação de seu peso e, sem patinar, faz a roldana se movimentar. Determine o tempo decorrido para que a corda comece a cair em queda livre,

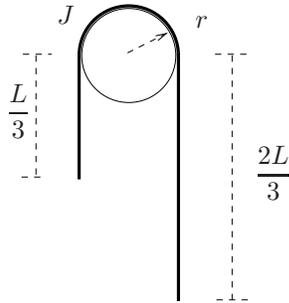


Figura 5: Massa distribuída em movimento.

isto é, o instante imediatamente após a mesma deixar de ter qualquer contato com a roldana. Considere que o comprimento da corda é muito maior que o raio da roldana.

Exercício 12 Considere o sistema dinâmico representado na Figura 6, no qual J é o momento de inércia da barra em relação ao ponto fixo O .

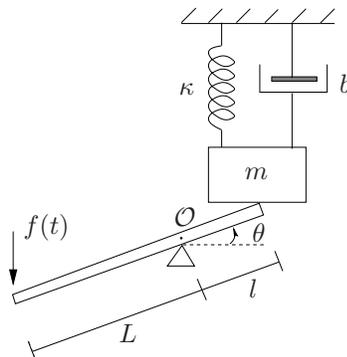


Figura 6: Oscilador apoiado sobre uma barra.

- Determine o modelo matemático para $\theta(t)$.
- Sob a hipótese de pequenas perturbações, qual é a frequência natural de oscilação da barra?

- c) Para $f(t) = f_0$ constante, qual o valor de $\theta(t)$ para $t \geq 0$ suficientemente grande, fornecido pela solução do modelo matemático linearizado?

Exercício 13 Considere uma barra cujo momento de inércia em relação ao seu centro de massa \mathcal{O} é denotado por J . Ela se encontra apoiada sobre um sistema amortecedor, de acordo com a Figura 7. Supondo que o ponto \mathcal{O} está fixo, escreva as equações do movimento para

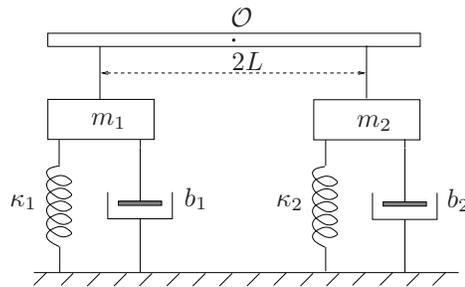


Figura 7: Sistema amortecedor.

o sistema em termos do ângulo que a tábua faz com a horizontal, considerando pequenos deslocamentos.

Exercício 14 No sistema da Figura 8, o cilindro tem raio r e momento de inércia J_1 e a barra tem comprimento $2L$ e momento de inércia J_2 , sendo que ambos giram em torno de eixos fixos e perpendiculares ao plano da página. A superfície de contato entre a massa m e o solo é perfeitamente lisa e a superfície de contato entre o cilindro e a massa m é perfeitamente aderente; b é o coeficiente de atrito viscoso entre a massa m e o ar. Determine as equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema linearizado em torno de um ponto de equilíbrio, bem como a sua representação de estado considerando como entrada $f(t)$ e como saídas $y(t)$ e $\theta(t)$.

Exercício 15 No sistema dinâmico representado na Figura 9, uma massa M está presa à parede por uma mola de constante elástica κ e o coeficiente de atrito viscoso entre a massa e o ar é denotado por b . Essa massa está conectada a um sistema de engrenagens cujos momentos de inércia são J_1 e J_2 e seus respectivos raios são denotados por r_1 e r_2 . O conjunto é movimentado por uma força externa $f(t)$.

- Determine o modelo matemático que relaciona o deslocamento da massa M com a força $f(t)$.
- Qual a frequência natural de oscilação da massa M ?
- Para uma força $f(t)$ do tipo degrau unitário qual o valor da posição da massa M para $t \geq 0$ suficientemente grande?

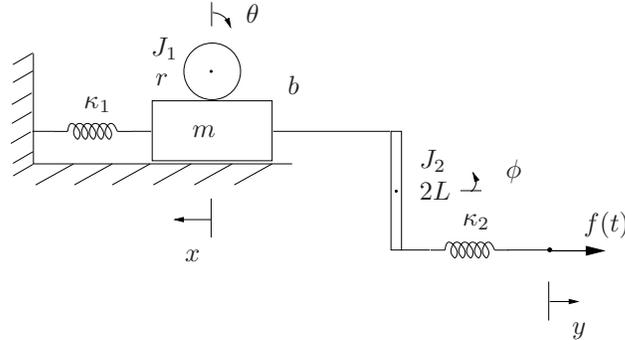


Figura 8: Cilindro e barra em movimento de rotação.

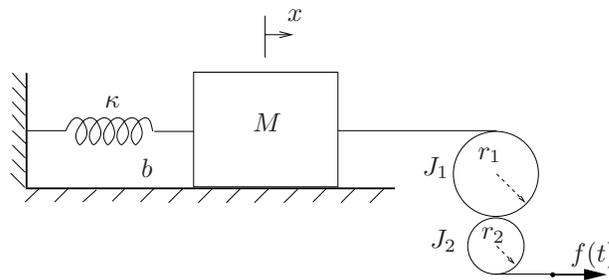


Figura 9: Sistema Massa-mola-engrenagens.

- d) Considerando $M = 1,5$ [kg], $b = 1,5$ [Ns/m], $\kappa = 0,25$ [N/m], $J_1 = 3,6 \times 10^{-2}$ [kg m²], $J_2 = 1,0 \times 10^{-3}$ [kg m²], $r_1 = 0,3$ m e $r_2 = 0,1$ m, qual o comportamento da posição da massa M para $t \geq 0$ suficientemente grande quando a força aplicada é do tipo $f(t) = \sin(2t)$?
- e) Queremos fazer com que a massa M se desloque até a posição x_{ref} e nela permaneça por tempo indeterminado. Para atender tal especificação, é necessário projetar um sistema de controle em malha fechada de modo que o erro entre a posição desejada $r(t) = x_{ref}$, $t \geq 0$, e a posição atual $x(t)$ seja processado por um controlador $C(s)$, a fim de sintetizar a força $f(t)$ adequada. Esquematize o diagrama de blocos referente ao sistema em malha fechada descrito.
- f) Se implementarmos um controlador do tipo proporcional $C(s) = k_p$, qual é a função de transferência do sistema em malha fechada? Qual é o valor de regime da posição $x(t)$ para uma referência do tipo degrau de amplitude x_{ref} ?
- g) Ao substituirmos o controlador do item anterior por um controlador integral $C(s) = k_i/s$ qual é o valor de regime da posição $x(t)$ para a mesma entrada degrau utilizada no item

anterior? Discuta se é possível utilizar qualquer valor de ganho k_i .

- h) Suponha que a saída do controlador $C(s)$ seja afetada por um ruído aditivo $w(t)$. Represente, no diagrama de blocos do item e), a influência deste ruído e determine a função de transferência em malha fechada entre o ruído $\hat{w}(s)$ e a posição $\hat{x}(s)$ da massa M .

Exercício 16 Uma massa M desliza sem atrito pelo teto de um galpão com um pêndulo simples preso a si, o qual pode oscilar livremente e sem a interferência de atrito viscoso, segundo a Figura 10.

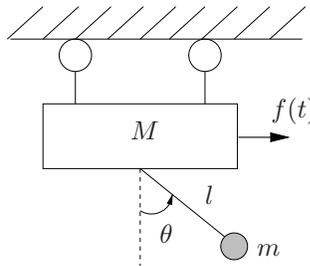


Figura 10: Pêndulo com translação.

- Determine o modelo matemático que descreve os deslocamentos da massa e do pêndulo.
- Linearize o modelo obtido em torno de um ponto de equilíbrio.
- Determine a frequência natural de oscilação do sistema linearizado.
- Calcule a função de transferência entre o deslocamento angular $\theta(t)$ e a força aplicada $f(t)$.
- Calcule a função de transferência entre a posição horizontal $x(t)$ da massa M e a força aplicada $f(t)$.
- Considerando $f(t) = f_0$ constante determine o comportamento do deslocamento angular $\theta(t)$ do pêndulo em regime permanente.
- Queremos controlar a posição horizontal da massa M , fazendo-a se deslocar até a posição $r(t) = x_{ref}$. Para atender tal objetivo, sintetizaremos a força $f(t)$ processando-se o erro $r(t) - x(t)$ utilizando um controlador $C(s)$. Esquematize o diagrama de blocos referente ao sistema em malha fechada descrito.
- Utilizando um controlador do tipo proporcional-derivativo $C(s) = \kappa_p + \kappa_d s$ para controlar a posição da massa M , calcule a função de transferência do sistema em malha fechada entre a referência $r(t)$ e a posição $x(t)$.
- Para o controlador do item anterior, com $\kappa_p > 0$ e $\kappa_d > 0$, calcule a função de transferência entre a referência $r(t)$ e a posição do pêndulo $\theta(t)$. A seguir, determine o comportamento em regime permanente de $\theta(t)$ para uma referência do tipo degrau de amplitude x_{ref} .

- j) Considere que exista um ruído aditivo $v(t)$ na entrada do sensor que mede a posição $x(t)$ da massa M e que o sensor não seja ideal, mas seja um sistema de primeira ordem do tipo $H(s) = 1/(\tau s + 1)$. Modifique o diagrama de blocos do item g) de modo a incluir este ruído e calcule a função de transferência entre o ruído $\hat{v}(s)$ e a posição $\hat{x}(s)$.

Exercício 17 Dois corpos de massas M e m estão conectados entre si através de um amortecedor, conforme ilustra a Figura 11, e se deslocam sobre um plano horizontal perfeitamente liso. Uma das extremidades de uma mola de constante elástica κ está conectada ao corpo de massa m enquanto, em sua outra extremidade, é aplicada uma força $f(t)$.

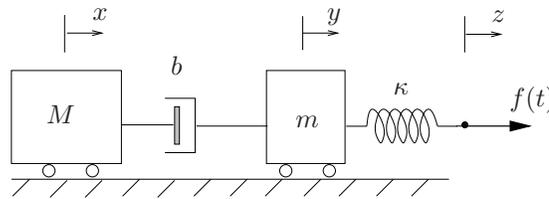


Figura 11: Massas acopladas por amortecedor.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem o seu modelo matemático.
- Calcule a função de transferência entre a velocidade da massa M e a força aplicada $f(t)$.
- Calcule a função de transferência entre o deslocamento $z(t)$ da extremidade da mola e a força $f(t)$.
- Obtenha a representação de estado correspondente à função de transferência calculada no item anterior.
- Deseja-se controlar a velocidade da massa M utilizando um sistema de controle em malha fechada e, para isso, um projetista decidiu medir a posição $z(t)$ da extremidade submetida à força $f(t)$ e compará-la com um sinal de referência $r(t)$ adequado. O erro entre $r(t)$ e $z(t)$ deve ser processado por um controlador $C(s)$ para sintetizar a força $f(t)$. Esquematize o diagrama de blocos do sistema em malha fechada descrito.
- Calcule a função de transferência em malha fechada entre o sinal de referência $r(t)$ e a velocidade da massa M .
- Se utilizarmos um controlador proporcional $C(s) = k_p$, qual o tipo de sinal de referência $r(t)$ que deve ser empregado para fazer com que a massa M se desloque com velocidade constante em regime permanente?

Exercício 18 No sistema mecânico da Figura 12, uma massa m encontra-se no interior de uma caixa aberta de massa M . O coeficiente de atrito viscoso entre as superfícies das duas massas é b e a superfície sobre a qual se encontra a caixa é perfeitamente lisa. Determine as funções de transferência e suas respectivas representações de estado que relacionam:

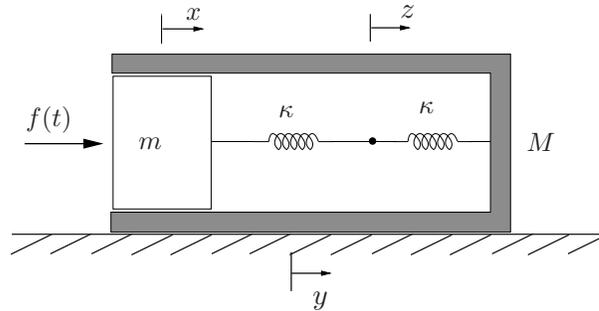


Figura 12: Sistema mecânico.

- o deslocamento $x(t)$ da massa m e a força aplicada $f(t)$.
- o deslocamento $y(t)$ da massa M e a força aplicada $f(t)$.
- o deslocamento $z(t)$ do ponto entre as duas molas e a força aplicada $f(t)$.

Queremos controlar o deslocamento relativo da massa m em relação à caixa $x(t) - y(t)$ utilizando a medida da posição $y(t)$. Para isso, devemos implementar um sistema de controle em malha fechada no qual um sinal de referência adequado $r(t)$ é comparado com o valor atual $y(t)$. O erro entre estes sinais será a entrada de um controlador $C(s)$ que sintetizará a força $f(t)$ adequada. Esquematize o diagrama de blocos correspondente ao sistema em malha fechada descrito e calcule a função de transferência entre a referência e a grandeza de interesse.

Exercício 19 O circuito elétrico representado na Figura 13 é alimentado por uma fonte de corrente denotada por $i(t)$. Determine a função de transferência $\hat{v}(s)/\hat{i}(s)$.

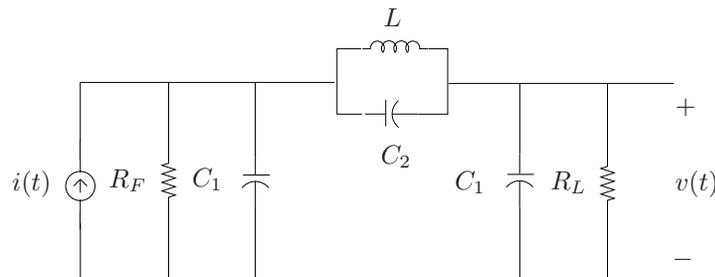


Figura 13: Filtro elíptico.

Exercício 20 O circuito elétrico representado na Figura 14 é alimentado por uma fonte de tensão denotada por $v_e(t)$. Determine a função de transferência $\hat{v}(s)/\hat{v}_e(s)$.

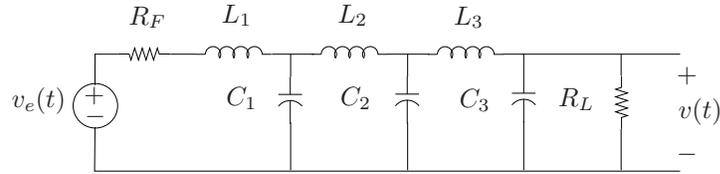


Figura 14: Filtro Butterworth passivo.

Exercício 21 O circuito eletrônico da Figura 15 é alimentado por uma fonte de tensão denotada por $v_e(t)$. Determine a função de transferência $\hat{v}(s)/\hat{v}_e(s)$ sabendo que o amplificador operacional, representado pela função de transferência $A(s) = A_0/(\tau s + 1)$, apresenta impedância de entrada infinita e impedância de saída nula. Verifique o que ocorre com a função

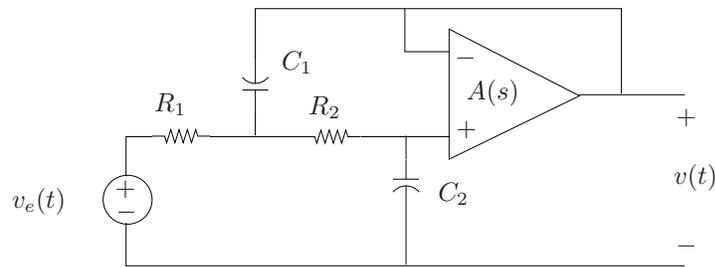


Figura 15: Filtro ativo.

de transferência do circuito quando $A_0 \rightarrow \infty$. Para esta função obtida e $C_1 = 1,5 \text{ } [\mu\text{F}]$, $C_2 = 0,33 \text{ } [\mu\text{F}]$, $R_1 = 10 \text{ } [\text{k}\Omega]$ e $R_2 = 5 \text{ } [\text{k}\Omega]$, calcule o tempo de estabilização e a sobre-elevação máxima se $v_e(t)$ for um degrau de tensão. Calcule também a largura de faixa do circuito.

Exercício 22 No circuito da Figura 16, $\hat{u}(s)$ é uma fonte de tensão, $A_1(s)$ e $A_2(s)$ representam, respectivamente, as funções de transferência de um amplificador diferencial e de um estágio de saída, dadas por

$$A_1(s) = \frac{A_1}{\tau_1 s + 1} \quad \text{e} \quad A_2(s) = \frac{A_2}{\tau_2 s + 1}$$

e R_1 e R_2 são resistências. Considerando $\hat{v}(s)$ a saída de interesse e supondo que as impedâncias de entrada dos amplificadores são infinitas e suas impedâncias de saída são nulas:

- Calcule a função de transferência entre a saída $\hat{v}(s)$ e a entrada $\hat{u}(s)$.
- Calcule a função de transferência entre a saída $\hat{v}(s)$ e o ruído $\hat{w}(s)$.

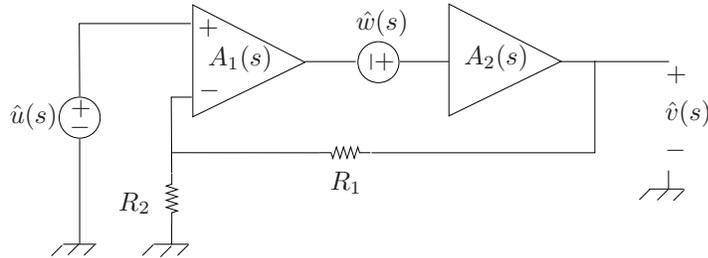


Figura 16: Amplificador não-inversor.

- c) Esboce o diagrama de blocos correspondente ao circuito em malha fechada.
- d) Supondo $A_1 = 20$, $A_2 = 1$, $\tau_1 = 5 \times 10^{-3}$ [s], $\tau_2 = 10^{-2}$ [s], $R_1 = R_2 = 1$ [k Ω] e $u(t)$ um degrau de amplitude 5 [V], calcule o valor de $v(t)$ em regime permanente com $w(t) = 0$.
- e) Compare a largura de faixa do sistema em malha aberta com a largura de faixa do sistema em malha fechada.
- f) Considerando os dados do item anterior, se ocorrer uma variação de 20% no valor de A_1 , qual será a variação percentual no valor de regime de $v(t)$?
- g) Supondo que o ruído seja do tipo $w(t) = 0,1\text{sen}(100t)$ [V], determine a relação sinal-ruído existente na saída do amplificador para o sistema em malha aberta e para o sistema em malha fechada.

Exercício 23 Para cada função de transferência dada a seguir, localize no plano complexo a menor região Ω em que se encontram todos os seus polos. Estime o valor do tempo de estabilização para uma entrada do tipo degrau unitário e compare com os resultados obtidos via simulação numérica. Discuta a validade da aproximação via polos dominantes.

$$a) H(s) = \frac{13}{s^2 + 4s + 13}$$

$$e) H(s) = \frac{50(s + 4)}{(s^2 + 4s + 20)(s^2 + 6s + 10)}$$

$$b) H(s) = \frac{130}{(s + 10)(s^2 + 4s + 13)}$$

$$f) H(s) = \frac{50(s + 1)(s + 5)}{(s + 2)(s^2 + 8s + 25)}$$

$$c) H(s) = \frac{39}{(s + 3)(s^2 + 4s + 13)}$$

$$g) H(s) = \frac{(1632/25)(s^2 + 8s + 25)}{(s + 3)(s + 4)(s^2 + 12s + 136)}$$

$$d) H(s) = \frac{340(s + 1)}{(s + 10)(s^2 + 10s + 34)}$$

$$h) H(s) = \frac{-(13/4)(s - 1)(s + 4)}{(s + 1)(s^2 + 6s + 13)}$$

Exercício 24 Para as funções de transferência do exercício anterior esboce seus respectivos diagramas de Bode de módulo e fase e calcule, para cada caso, sua faixa de passagem.

Exercício 25 Considere o circuito eletrônico da Figura 17, na qual o amplificador operacional é representado pela função de transferência $A(s) = A_0/(\tau s + 1)$. Calcule a função de transferência entre a entrada $\hat{v}_e(s)$ e a saída $\hat{v}(s)$ para as seguintes situações:

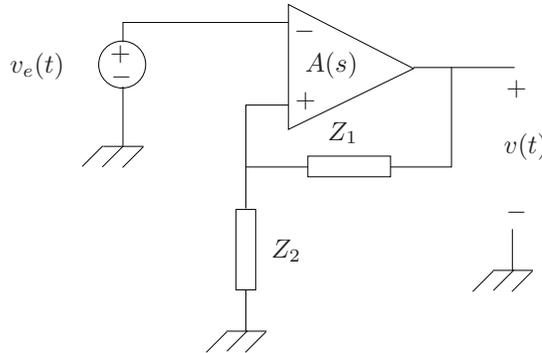


Figura 17: Controlador analógico.

- Considerando Z_1 uma resistência de valor R e Z_2 uma capacitância de valor C .
- Considerando Z_1 uma capacitância de valor C e Z_2 uma resistência de valor R .

Em seguida, para cada função de transferência obtida, suponha que $A_0 \rightarrow \infty$ e determine a nova função de transferência. Verifique que, na primeira situação, obtemos a função de transferência de um controlador proporcional-derivativo (PD) enquanto na segunda obtemos a função de transferência de um controlador proporcional-integral (PI).

Exercício 26 Ao escolher a estrutura de um controlador para o projeto de um sistema em malha fechada, um dos pontos a que se deve atentar é sobre a qualidade do sinal de saída do controlador na presença de ruídos aditivos em seu canal de entrada. Considerando os controladores proporcional-derivativo (PD) e proporcional-integral (PI) calculados no exercício anterior, calcule a amplitude da relação sinal-ruído que existiria na entrada e na saída dos controladores considerando que o sinal de entrada é dado por $v_e(t) = s(t) + r(t)$, em que $s(t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{0,01}{RC}t\right)$ é o sinal e $r(t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{100}{RC}t\right)$ é o ruído aditivo.

Exercício 27 Considere os sistemas de controle esquematizados nas Figuras 18, 19 e 20. Para cada uma das configurações, calcule a função de transferência em malha fechada entre a entrada $\hat{r}(s)$ e a saída $\hat{y}(s)$ e também entre o distúrbio $\hat{d}(s)$ e a saída $\hat{y}(s)$.

Exercício 28 Dados os controladores a seguir no contexto de sistemas a tempo contínuo, obtenha os equivalentes discretos utilizando a discretização via segurador de ordem zero e pela fórmula de Tustin com períodos de amostragem $T_1 = 50$ [ms] e $T_2 = 0,5$ [s].

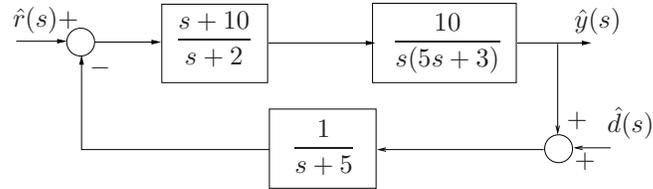


Figura 18: Diagrama de blocos (a).

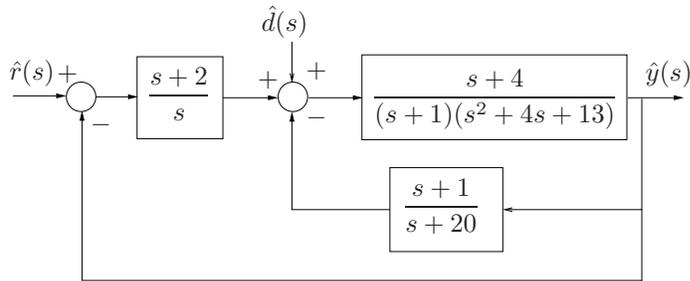


Figura 19: Diagrama de blocos (b).

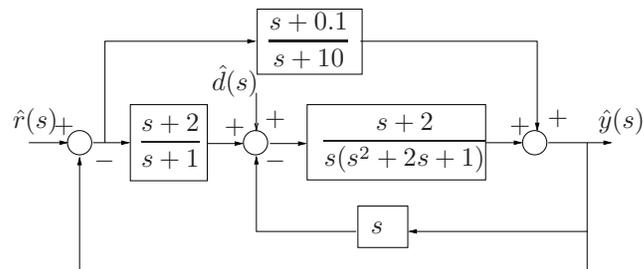


Figura 20: Diagrama de blocos (c).

- (i) $C_1(s) = 2 \times 10^{-4} \left(\frac{s+0,5}{s} \right)$ (iii) $C_3(s) = 3 \times 10^{-5} \left(\frac{s+4}{s+2} \right)$
(ii) $C_2(s) = 2 \times 10^{-4} \left(\frac{s+0,5}{s+2} \right)$

Esses controladores foram projetados para controlar, em malha fechada de acordo com a Figura 21, um sistema de engrenagens cuja função de transferência entre o deslocamento $\theta(t)$

e o torque aplicado $T_a(t)$ é dada por

$$G(s) = \frac{\kappa}{s(Js + c)}$$

onde $\kappa = 5,7669$, $J = 8,2067 \times 10^{-4}$ e $c = 1,1 \times 10^{-3}$, em unidades coerentes do SI. Para cada um dos controladores dados determine, utilizando um pacote computacional:

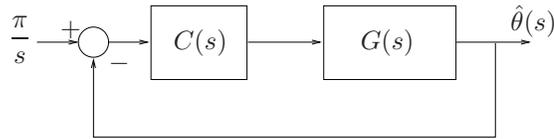


Figura 21: Controle em malha fechada.

- a) o valor de pico e o tempo de estabilização do sistema em malha fechada;
- b) os valores das grandezas do item anterior através da aproximação de polos dominantes e compare os resultados;

Substituindo os controladores contínuos pelos equivalentes discretos:

- c) refaça o item a) com os dois períodos de amostragem. Comente.
- d) determine o maior valor do período de amostragem T para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada.