

# CINEMÁTICA

|  |    |
|--|----|
| Linha de Corrente Limite .....                 | 2  |
| Pontos Críticos .....                          | 4  |
| Pontos Críticos em Escoamento 2-D.....         | 5  |
| Pontos Críticos em Escoamentos 3-D .....       | 7  |
| Configuração dos Pontos Críticos .....         | 12 |
| Topografia das Linhas de Corrente Limite ..... | 14 |
| Função Corrente .....                          | 20 |
| Função Corrente para Escoamento 2-D            |    |
| Coordenadas Cartesianas .....                  | 24 |
| Função Corrente para Escoamento 2-D            |    |
| Coordenadas Polares .....                      | 25 |
| Função Corrente para Escoamento Axi-Simétrico  |    |
| Coordenadas Cilíndricas .....                  | 26 |
| Função Corrente para Escoamento Axi-Simétrico: |    |
| Coordenadas Esféricas .....                    | 27 |
| Referências .....                              | 28 |

Prof. Eugênio Spanó Rosa  
FEM-DE UNICAMP  
erosa@fem.unicamp.br

## Linha de Corrente Limite

Da definição de linha de corrente: curva tangente ao vetor velocidade,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (1)$$

encontra-se uma indeterminação junto às superfícies sólidas, porque nestas o fluido possui velocidade zero (condição de não deslizamento). Entretanto, apesar de  $V \equiv 0$  na superfície sólida, pode-se definir linhas de corrente muito próximas de superfícies sólidas e será mostrado que as linhas de corrente nestas superfícies, também denominadas de linhas de corrente limite (Limiting Streamlines), são paralelas às linhas de tensão e normais às linhas de vorticidade na superfície sólida.

Considere uma parede plana em  $(x,z)$  com o eixo  $y$  como normal, tal como mostrado na Figura 1.

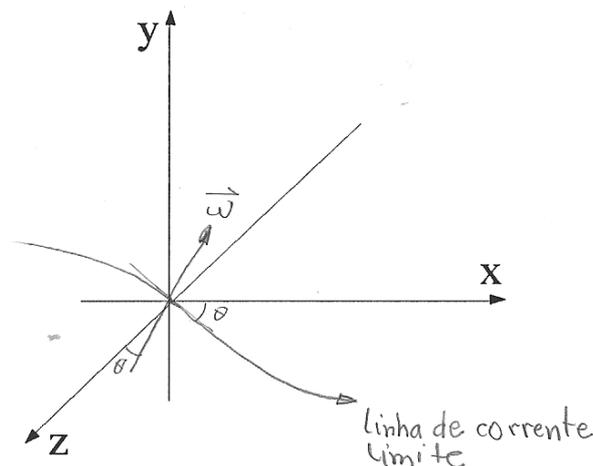


Fig.1: Linha de Corrente Limite em uma parede plana.

Da equação da continuidade, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Como as componentes  $u$  e  $w$  são nulas na parede,  $\partial u/\partial x = \partial w/\partial z = 0$ . Da equação da continuidade isto implica que:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{\text{parede}} = 0 \quad (3)$$

Com esta informação, usando série de Taylor para se obter aproximação do campo de velocidade próximo a parede, chega-se a:

$$u = 0 + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_p \cdot y + \dots \quad (4.1)$$

$$v = 0 + 0 + \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_p \cdot \frac{y^2}{2} + \dots \quad (4.2)$$

$$w = 0 + \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_p \cdot y + \dots \quad (4.3)$$

O ângulo que uma linha de corrente limite faz é, então, dado por:

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{\text{linha de corrente}} = \tan \theta = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{w}{u} = \frac{\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_p}{\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_p} \quad (5)$$

onde  $\theta$  é o ângulo que a linha de corrente limite faz com o eixo  $x$  na parede sólida. Pode-se também concluir que esta linha de corrente está contida no plano da parede sólida porque os ângulos que a linha de corrente possui com os planos  $y,x$  e  $y,z$  - isto é, os limites de  $v/u$  e  $v/w$  - são ambos nulos.

Considerando-se as tensões cisalhantes na parede,

$$\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_p \quad (6.1)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)_p = \mu \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_p \quad (6.2)$$

O ângulo que estas tensões fazem é dado por:

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{\text{tensões cisalhantes}} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{yx}} = \frac{\mu \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_p}{\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_p} = \left. \frac{dz}{dx} \right|_{\text{linha de corrente}} \quad (7)$$

de onde se conclui que as linhas de corrente limite são paralelas à direção da tensão exercida pelo fluido na parede.

Considerando-se a vorticidade na parede,

$$\omega_x = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)_p = \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_p \quad (8.1)$$

$$\omega_y = \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)_p \equiv 0 \quad (8.2)$$

$$\omega_z = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_p = - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_p \quad (8.3)$$

Note que a componente de vorticidade normal,  $\omega_y$ , é nula, portanto o vetor  $(\omega_x, \omega_z)$  é contido pelo plano da parede  $(x,z)$ . O ângulo que a vorticidade  $\omega_x, \omega_z$  faz é dado por:

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{\text{linha de vorticidade}} = \frac{\omega_z}{\omega_x} = \frac{-\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_p}{\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_p} = \frac{-1}{\left. \frac{dz}{dx} \right|_{\text{linha de corrente}}} \quad (9)$$

de onde se conclui que as linhas de corrente limite são normais às direções da vorticidade do fluido na parede.

## Pontos Críticos

Pontos críticos ou pontos singulares são pontos no escoamento onde a inclinação da linha de corrente é indeterminada e a velocidade é nula para um observador apropriado. O conhecimento da estrutura dos pontos críticos é importante para a compreensão dos padrões de escoamento, sejam estes obtidos experimentalmente ou computacionalmente.

Os pontos críticos destacam-se do padrão de escoamento. Dada uma distribuição destes pontos e seus tipos, grande parte do campo de escoamento restante, sua geometria e topologia, pode ser deduzida porque há um número limitado de modos que as linhas de corrente podem ser agrupadas.

Tratando-se de paredes sólidas, os pontos críticos estão associados a situação onde o fluido se separa da parede (ponto de separação) ou onde o fluido se junta a parede (ponto de junção).

### Pontos Críticos em Escoamento 2-D

Uma representação esquemática de um ponto de separação para um escoamento 2-D é dado na Figura 2.

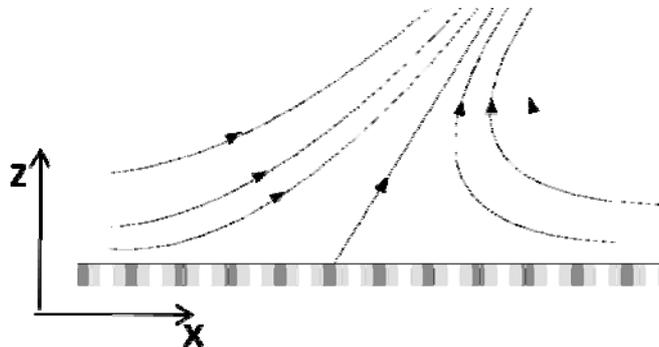


Fig. 2: Ilustração esquemática de um ponto de separação. Se o sentido das flechas é invertido ele se torna um ponto de junção.

No ponto de separação (ou junção) as linhas de corrente próximas a superfície sólida se separam (ou se juntam). Para a determinação destes pontos, em escoamentos 2-D, deve-se perguntar o quanto paralelo estão as de correntes vizinhas a superfície sólida. A resposta pode ser dada em termos da vorticidade na parede  $\omega_w$ .

Para o escoamento mostrado na Figura 2, a equação da continuidade e a vorticidade se reduzem a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$\omega_y = \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (11)$$

Na parede sólida,  $z = 0$ ,  $u = w = 0$ ,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} \quad e,$$

$$\omega_y = \omega_w = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$$

A componente da velocidade paralela a superfície,  $u$ , é determinada a partir de uma expansão em série de Taylor:

$$u = 0 + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_0 \cdot z + \dots \quad \text{ou} \quad (12)$$

$$u(z) = \omega_w z$$

A componente de velocidade normal a superfície,  $w$ , será:

$$w(z) = 0 + \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_0 \cdot z + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right|_0 \cdot z^2 + \dots \quad (13)$$

mas:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right|_0 = - \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right|_0 = - \frac{\partial}{\partial x} \omega_w = -\omega'_w, \quad (14)$$

logo:

$$w(z) = - \frac{1}{2} \omega'_w \cdot z^2 \quad (15)$$

A inclinação da linha de corrente em relação a superfície é dada por:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{w}{u} = - \frac{1}{2} \frac{\omega'_w \cdot z}{\omega_w} \quad (16)$$

Como  $z$  é arbitrariamente pequeno, nota-se que as linhas de corrente são aproximadamente paralelas a menos que  $\omega_w$  seja nulo!

Pontos na superfície onde  $\omega_w = 0$  e  $\omega'_w < 0$  (dando uma componente positiva de velocidade normal a superfície  $-\frac{1}{2} \omega'_w \cdot z^2$ ) são pontos de separação; pontos onde  $\omega_w = 0$  e  $\omega'_w > 0$  são pontos de junção.

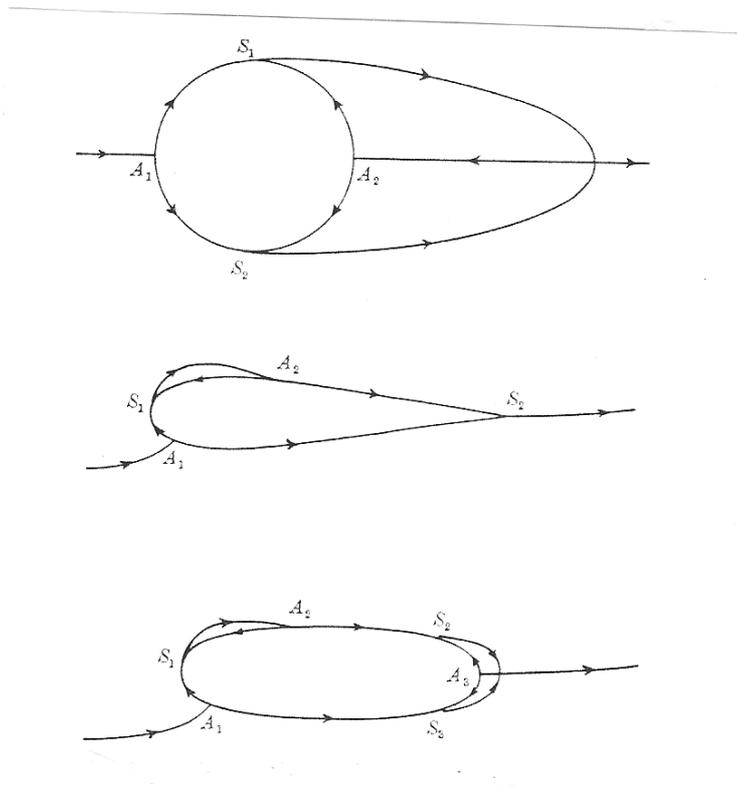


Fig. 3: Ilustração de diferentes formas de bolhas de separação

Em escoamentos 2-D o número de pontos de separação e junção deve ser igual. A Figura 3 ilustra alguns tipos e mostra a formação de bolhas de separação

### Pontos Críticos em Escoamentos 3-D

Em escoamentos 3-D a ocorrência de pontos críticos conduz a uma acentuada influência no campo do escoamento pelo fato de haver uma dimensão a mais no escoamento.

Em escoamento 3-D a separação ocorre em uma linha, distintamente de um ponto para escoamentos 2-D. Os tipos de pontos críticos serão apresentados a seguir, mas primeiramente, serão determinadas as condições onde ocorrem nas superfícies sólidas - modo análogo ao procedimento 2-D.

Para uma superfície sólida definida pelo plano  $(x,z)$  com normal na direção  $y$ , as componentes de velocidade paralelas a superfície para  $y \rightarrow 0$  são:

$$u = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \cdot y = -\omega_{z_w} \cdot y \quad (17)$$

$$w = \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} \cdot y = +\omega_{x_w} \cdot y \quad (18)$$

onde  $\omega_{z_w}$  e  $\omega_{x_w}$  são as componentes do vetor vorticidade na superfície  $(x,z)$ . As componentes  $u$  e  $w$  podem ser expressas por:

$$\vec{V} = (\vec{\omega}_w \times \vec{n}) \cdot y \quad (19)$$

A componente normal a superfície,

$$v = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \cdot y^2 = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \cdot y^2 \quad (20)$$

$$v = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \cdot y^2 \quad (21)$$

$$v = -\frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \omega_{z_w} + \frac{\partial}{\partial z} \omega_{x_w} \right] \cdot y^2 \quad (22)$$

$$v = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{\omega}_w \times \vec{n}) \cdot y^2 \quad (23)$$

A questão do ponto de separação ou junção junto a superfície está relacionada ao fato de quanto paralelas são as linhas de corrente próximas a superfície quando  $y \rightarrow 0$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{-\frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{\omega}_w \times \vec{n}) \cdot y^2}{-\omega_{z_w} \cdot y} \quad (24)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{v}{w} = \frac{-\frac{1}{2} \nabla \cdot (\vec{\omega}_w \times \vec{n}) \cdot y^2}{-\omega_{x_w} \cdot y} \quad (25)$$

Novamente, constata-se que  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dy}{dz}$  são aproximadamente nulas, isto é, para  $y \rightarrow 0$  as linhas de corrente são paralelas a superfície. Uma exceção ocorre em pontos críticos, isto é,  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dy}{dz}$  crescem somente quando  $\dot{\omega}_w \rightarrow 0$ . Portanto, similar ao caso 2-D, a ocorrência de um ponto crítico na superfície está associada ao fato de  $\dot{\omega}_w = 0$ . Se  $\text{div}(\vec{\omega}_w \times \vec{n}) \neq 0$  ocorre um ponto de separação e pontos de junção se  $\text{div}(\vec{\omega}_w \times \vec{n}) = 0$ .

Os pontos críticos estão associados a ocorrência de  $\dot{\omega}_w \equiv 0$  em superfícies sólidas. A eles também pode-se associar linhas de separação que são linhas onde as linhas de corrente limite deixam a superfície sólida. É interessante investigar como varia a altura  $h$  de uma linha de corrente limite na medida em que ela se aproxima de uma linha de separação.

Se  $n$  é a distância entre duas linhas de corrente limite adjacentes e  $h$  é a altura de um tubo de corrente retangular (assumindo pequeno de maneira que os vetores de velocidade resultantes são co-planares e formam um perfil linear), então o fluxo de massa através do tubo de corrente é:

$$\dot{m} = \rho \cdot h \cdot n \cdot \bar{u} = \text{constante} \quad (26)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido e  $\bar{u}$  é a velocidade média da secção transversal. A vorticidade na parede é:

$$\omega_w = \left( \frac{\bar{u}}{h/2} \right), \quad (27)$$

de maneira que:

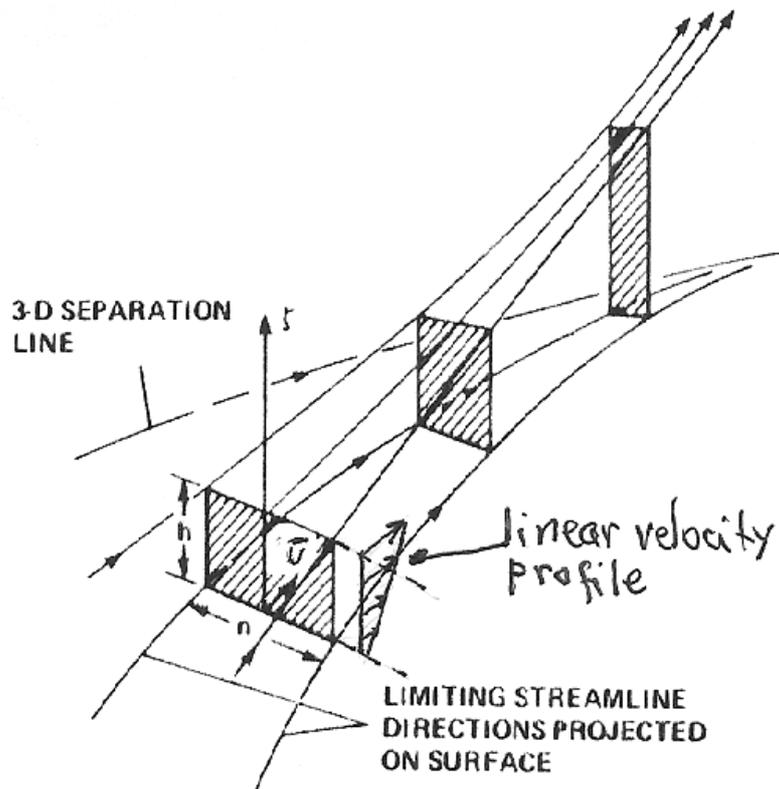
$$\bar{u} = \frac{\omega_w h}{2} \quad (28)$$

Daí,

$$\dot{m} = \frac{\rho h^2 n \omega_w}{2} = \text{constante} \quad (29)$$

e

$$h = c \left( \frac{1}{n \cdot \tau_w} \right)^{1/2} \quad \text{onde } c = (2\dot{m}/\rho) \quad (30)$$



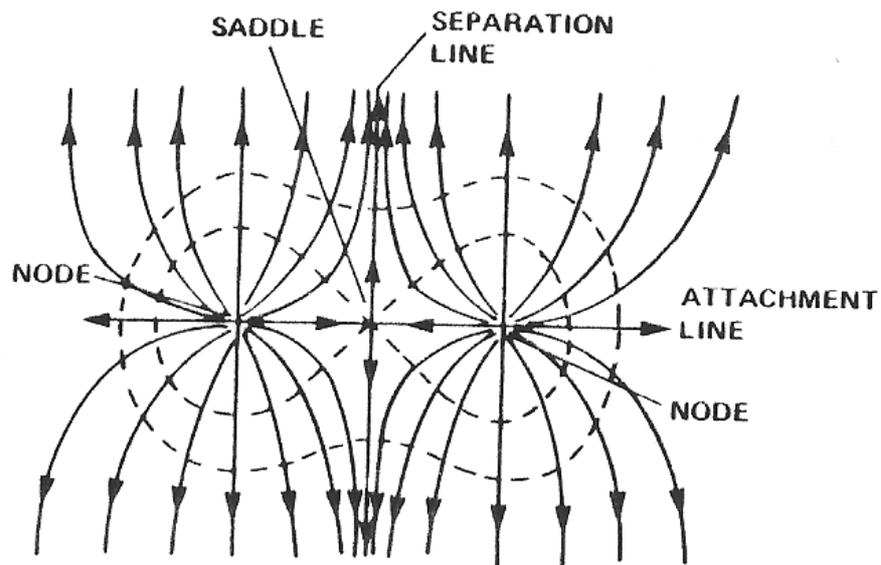
Limiting streamlines near three-dimensional (3D) separation line.

Fig. 4 :

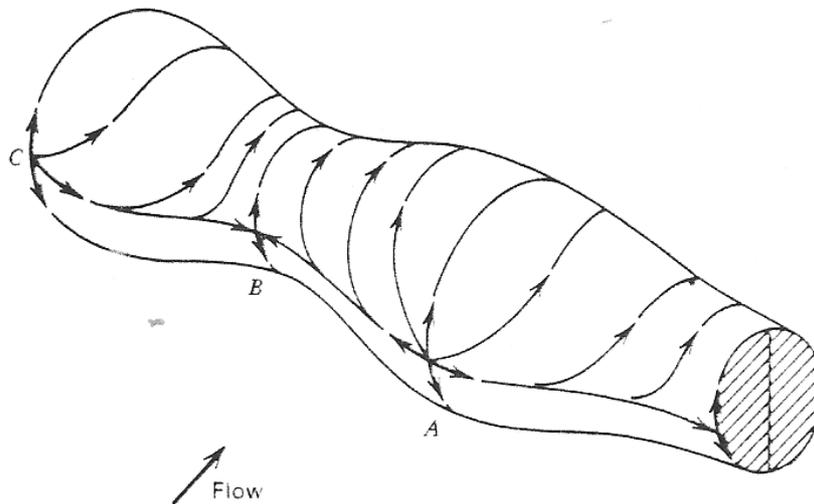
Nota-se da Figura 4 que a medida que se aproxima da linha de separação, a altura  $h$  das linhas de corrente limite sobre a superfície aumentam rapidamente. Há duas razões para o aumento de  $h$ : a primeira é que a distância  $n$  entre duas linhas de corrente limite diminui rapidamente à medida que as linhas de corrente limite convergem em

direção à linha de separação; a segunda é que a vorticidade ( $\omega_w$ ) é mínima ao longo da linha de separação e tende a zero à medida que se aproxima de um ponto crítico.

A Figura 5 ilustra a ocorrência de uma linha de separação que emana de um ponto crítico denominado por sela, que por sua vez esta entre dois outros pontos críticos equidistantes denominados de 'nós'.



Adjacent nodes and saddle point (Lighthill 1963).



Ideal flow over a wavy cylinder. Surface streamlines emanate from nodal attachment points *A* and *C*.

Figura 5

## Configuração dos Pontos Críticos

Os pontos críticos ou também denominados pontos singulares ocorrem em pontos isolados de superfícies onde as componentes da tensão da vorticidade da parede  $(\omega_{x_w}, \omega_{z_w})$ , ou alternativamente, as componentes da tensão de cisalhamento da parede  $(\tau_{yx_w}, \tau_{yz_w})$  se tornam identicamente nulas. Os pontos críticos podem ser classificados por dois tipos principais: Nós e Selas. Os Nós, por sua vez, podem ser subdivididos em duas sub-classes: pontos Nodais e pontos Focais (de separação ou junção).

Um ponto nodal (6a) é um ponto comum a um número infinito de linhas de corrente limite que por sua vez são paralelas as linhas de atrito e ortogonais as linhas de vorticidade (indicadas pelo tracejado). No ponto, todas as linhas de corrente limite, exceto a linha A-A, são tangenciais a uma única linha, B-B. Em um ponto nodal de separação, todas as linhas de corrente limite são direcionadas em direção ao nó. No ponto nodal de junção as linhas de corrente limite divergem do nó. Isto ocorre tipicamente em pontos de estagnação a montante de superfícies, tal como o nariz de um corpo aerodinâmico onde o escoamento externo a montante impacta a superfície. O ponto nodal de junção então passa a agir como uma fonte de vorticidade, ou de tensão de cisalhamento, e se espalha sobre todo o resto da superfície.

O ponto focal (6b) difere do ponto nodal porque não possui nenhuma linha tangente em comum. Um número infinito de linhas de corrente limite descrevem uma espiral ao redor deste ponto singular. O sentido da espiral pode ser horário ou anti-horário, tanto para focos de separação com para focos de junção. Os pontos focais de junção normalmente ocorrem com a presença de rotação, tanto no fluido como na superfície

Na sela (6c) há apenas duas linhas particulares, C-C e D-D, que passam pelo ponto singular. As direções em ambos os lados do ponto singular são convergentes em uma linha particular e civergente na outra linha. Todas as outras linhas de corrente limite não passam pelo ponto e tomam direções consistentes com a direção das linhas adjacentes particulares. Estas linhas particulares, C-C e D-D, agem como barreiras no campo das linhas de corrente limite, fazendo com que um conjunto de linhas seja inacessível ao outro conjunto adjacente. O ponto de sela age tipicamente para separar as linhas de corrente limite emanadas por nós adjacentes, por exemplo, pontos nodais de junção.

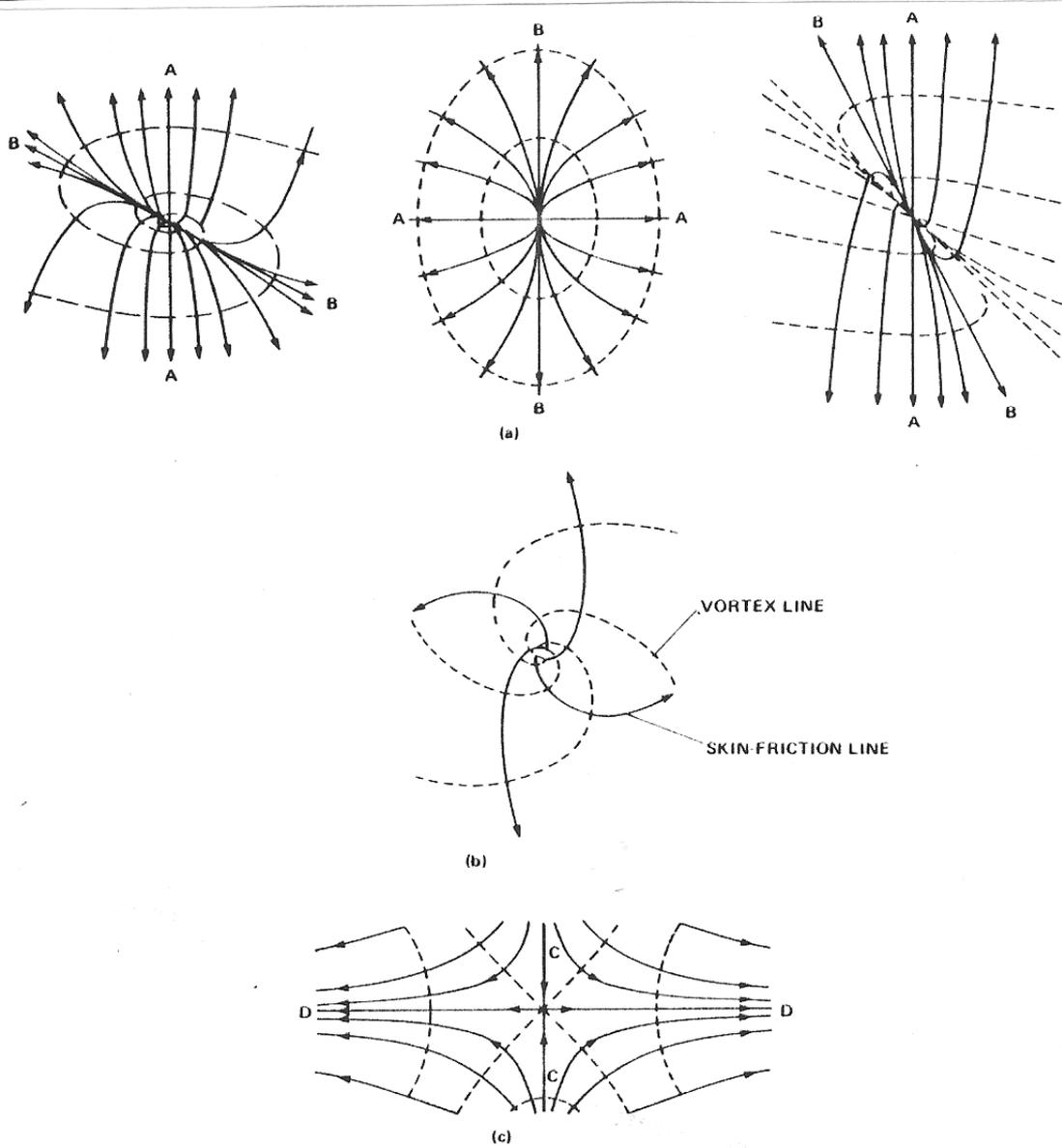


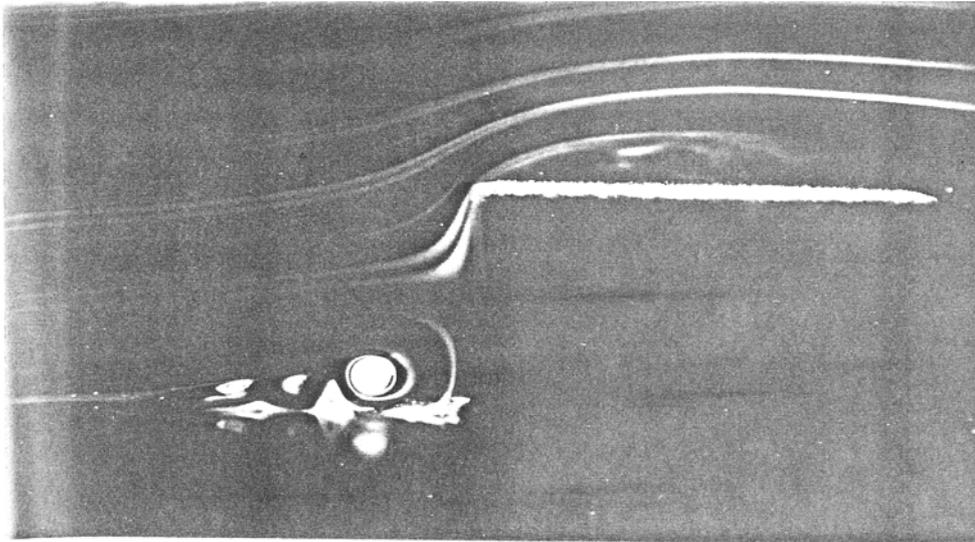
Fig. 6; Pontos Críticos: (a) nós; (b) focais; (c) selas (Lighthill 1963)

## Topografia das Linhas de Corrente Limite

Os pontos críticos, agindo isoladamente ou em combinação, determinam em grande parte a distribuição das linhas de corrente limite e, conseqüentemente, as linhas de tensão de cisalhamento (paralelas às linhas de corrente limite) e as linhas de vorticidade (ortogonais às linhas de corrente limite) na superfície de sólidos.

As ilustrações das páginas seguintes mostram através de técnicas de visualização campos de escoamentos e seu esqueleto topográfico em termos dos pontos críticos. São apresentados:

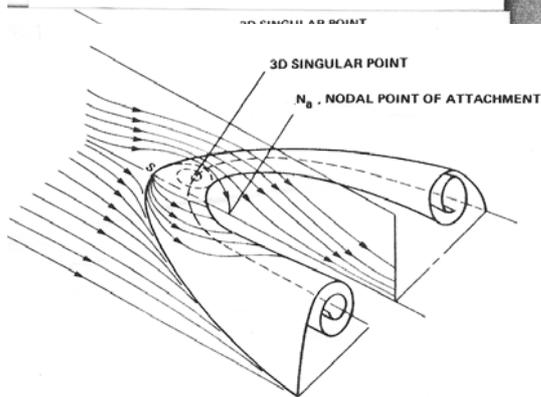
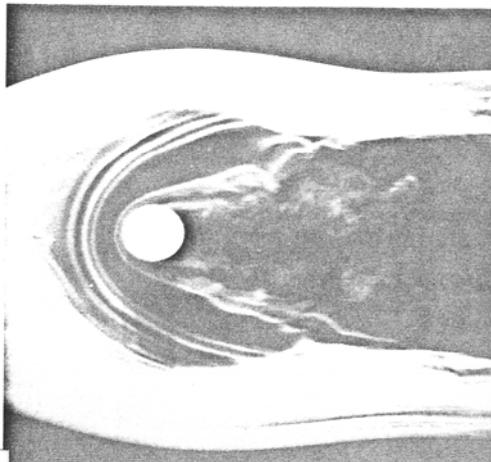
1. Escoamento tipo "ferradura", ou Horseshoe. O sistema de vórtices é formado pelo encontro da corrente a montante com um obstáculo preso a uma superfície;
2. Escoamento em uma bifurcação de um tubo em 90 graus;
3. Escoamento em um corpo axi-simétrico com um ângulo de ataque;
4. Escoamento ao redor de um cubóide;
5. Escoamento entre dois cilindros coaxiais em rotação.



92. Horseshoe vortices ahead of a cylinder in a boundary layer. The laminar boundary layer on a flat plate separates ahead of a short circular cylinder, whose height is about three times the boundary-layer thickness. The vorticity in the boundary layer concentrates into three vortices that wrap around the front of the cylinder. Closer to the plate, two vortices of opposite sign form in the reverse flow, and are reflected in the plate. The Reynolds number is 5000 based on cylinder diameter. Visuali-

zation is by smoke filaments in air, illuminated by a thin slice of light in the symmetry plane. This shows three stagnation points on the plate, three points of attachment, and two free stagnation points between the vortices. Another picture of the same flow appears as the frontispiece to Thwaites' *Incompressible Aerodynamics*. Photograph from E. P. Sutton and the Cambridge University Engineering Department.

93. Horseshoe vortices ahead of a cylinder in a boundary layer. In this plan view the thickness of the oncoming Blasius boundary layer is one-third of the diameter of the cylinder, as in the photograph above, and the Reynolds number is 4000 based on the diameter, but the cylinder is two diameters rather than half a diameter high. The horseshoe vortices are made visible by a sheet of smoke introduced into the boundary layer upstream. Photograph by Akio Tani.



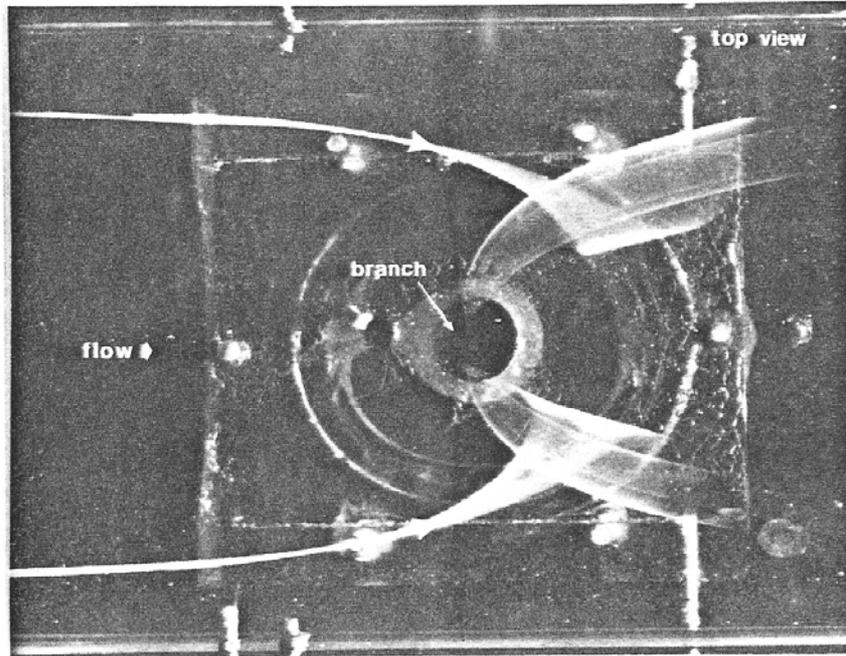


Plate 3.8 Top view of the counter rotating trailing vortices, made visible by dye injection. Flow parameters are:  $Re_D = 1100$ ,  $Q = 3.98$  l/min,  $q/Q = 0.25$  and fully developed velocity profile at the test section.

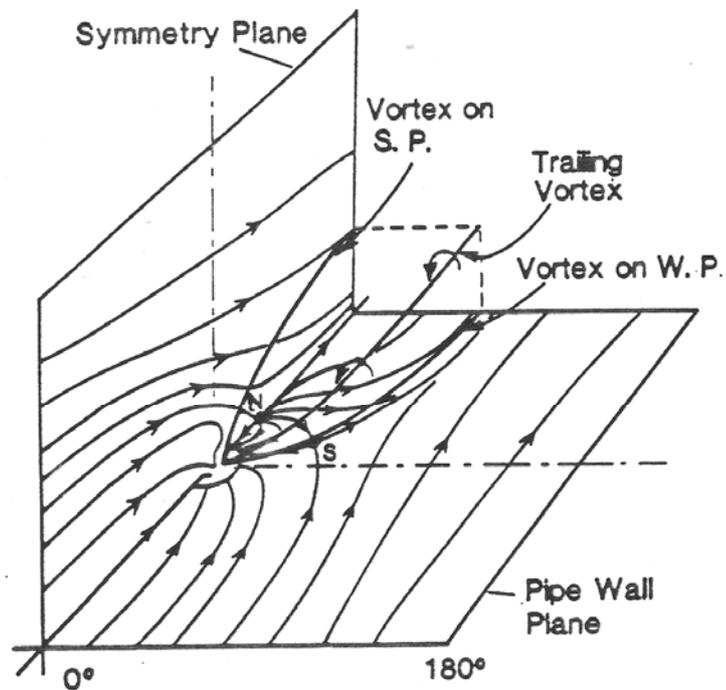
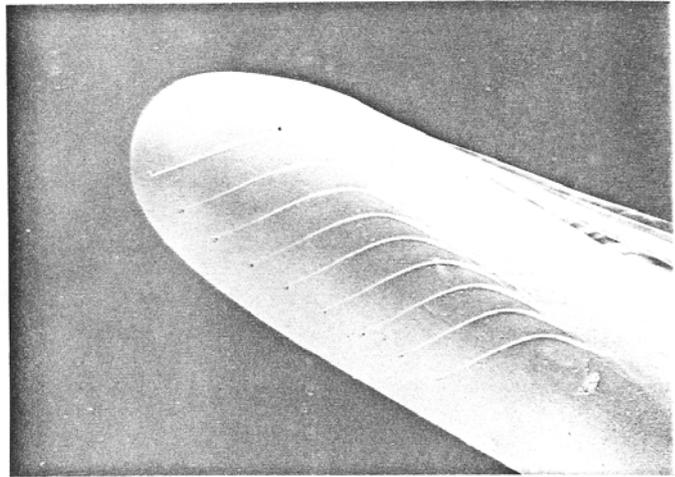
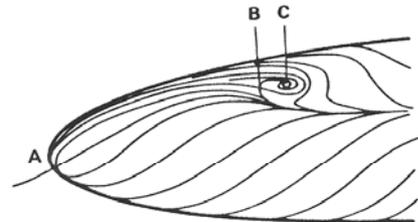
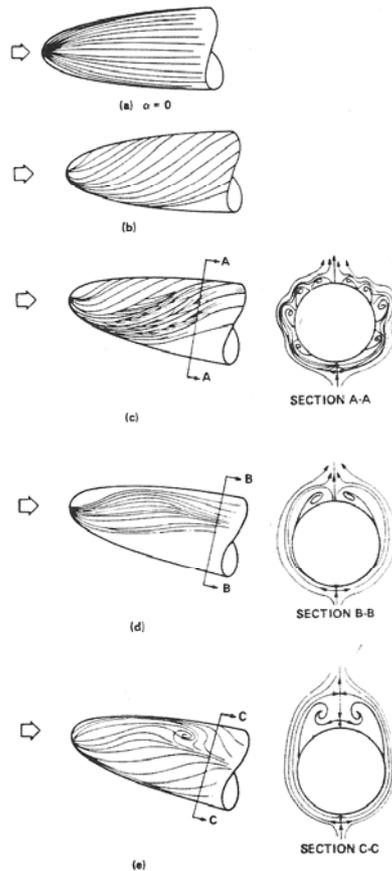


Fig. 3.5 Surface streamlines and symmetry plane's streamlines in the vicinity of the branch exit. S and N stand for saddle and nodal point respectively.

74. Rankine ogive at angle of attack. The axisymmetric body of figure 22 is here inclined at  $30^\circ$  to a stream of water. Surface streamlines are tangential to the outer edge of a thin layer of laminar separation and reattachment that forms a sort of horseshoe vortex over the leeward surface. ONERA photograph, Werlé 1962



70 TOBAK & PEAKE



(a) A - NODAL ATTACHMENT POINT  
 B - SADDLE POINT  
 C - FOCUS OF SEPARATION

Figure 8 Sequence of flows leading to global three-dimensional flow separation on round-nosed body of revolution as angle of attack is increased.

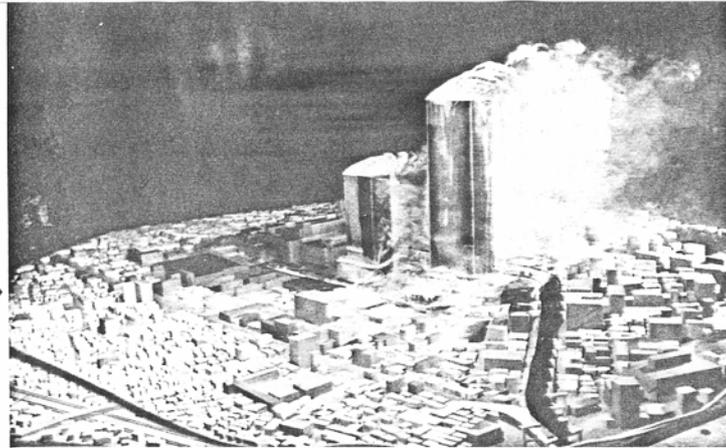


Fig. 98. Air, flow speed 0.5 m/s, width of skyscraper 100 mm,  $Re = 3.4 \times 10^5$ , titanium tetrachloride method.

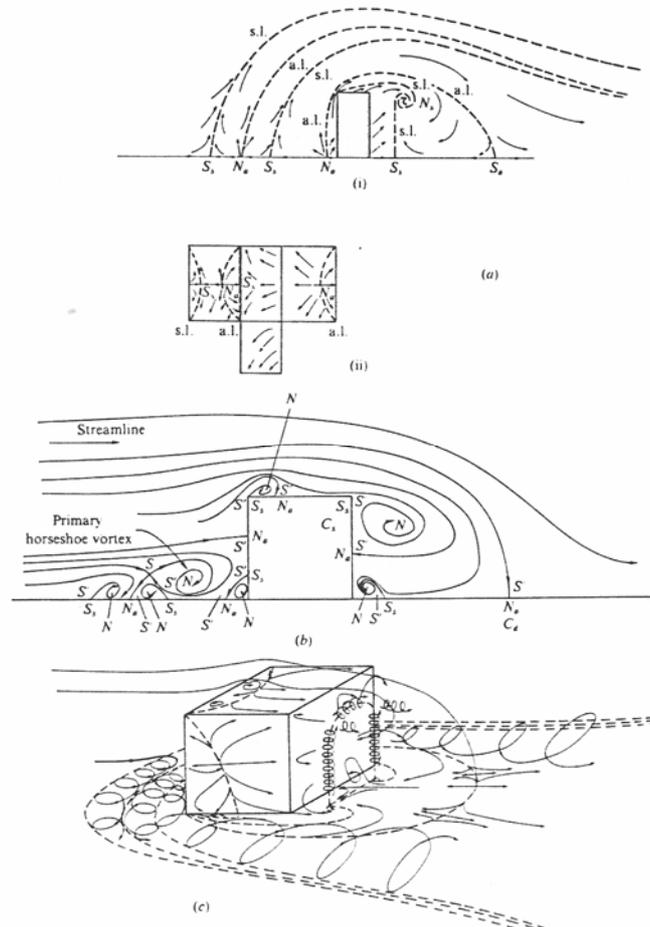


FIGURE 15. Mean streamlines, singular points and flow pattern around a cuboid and a cube. (a) On the centre-line of a cuboid. (i) Plan view of shear-stress lines on the surface. (ii) Shear-stress lines on the top and sides of the cube. (b) On the centre-line of a cube. (c) Sketch of the flow pattern around the cube.  $N$ , node of streamline pattern;  $S, S'$ , saddles of streamline pattern; subscript  $s$ , separation; subscript  $a$ , attachment;  $N$ , surface node;  $S$ , surface saddle;  $C_s$ , centre-line separation point at rear of obstacle;  $C_d$ , downstream centre-line zero-stress point.

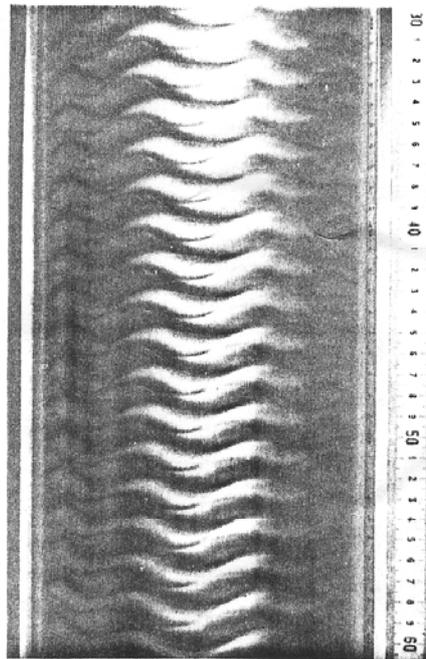


Figure 22-11 Wavy Taylor vortices. Photograph courtesy of L. Koschmieder (1979), University of Texas.

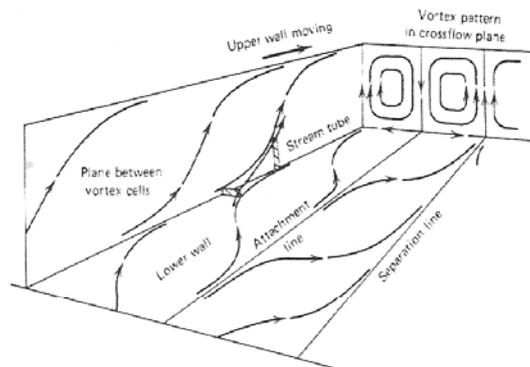


Figure 20-29 Streamlines in a Taylor vortex cell of a Couette flow. The wall and the surfaces separating vortex cells intersect in lines of separation and lines of attachment.

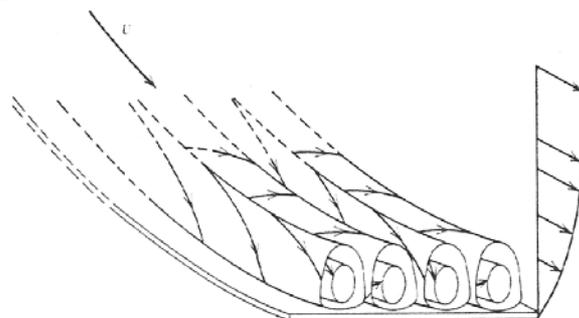


Figure 22-14 Schematic of Görtler vortices in a boundary layer on a concave wall.

## Função Corrente

As linhas de corrente são, por definição, tangentes ao vetor velocidade a todo instante, e são expressas por:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (1)$$

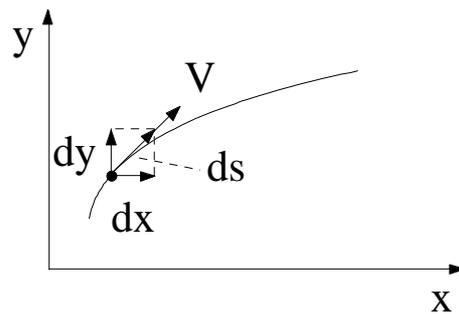


Fig. 1: Linhas de corrente tangente ao vetor velocidade

Existem várias maneiras de se descrever uma curva no espaço. Para nossos propósitos, é conveniente tratar uma curva com a intersecção de duas superfícies independentes,  $f$  e  $g$ :

$$f(x,y,z) = a \quad (2)$$

$$g(x,y,z) = b \quad (3)$$

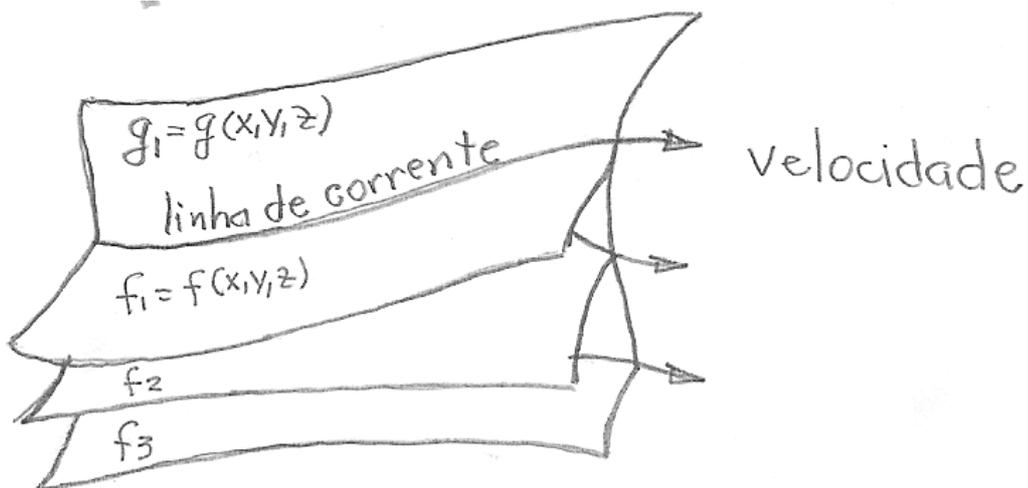


Fig. 2: Intersecção das superfícies  $g_1$  e  $f_1$ , também denominadas por funções de corrente, para formar uma linha de corrente.

Para qualquer valor das constantes  $a$  ou  $b$ , (2) e (3) representam superfícies.

As componentes de velocidade podem ser expressas em termos da função corrente. Note que, desde que as superfícies  $f$  e  $g$  contêm as linhas de corrente, as suas normais devem ser perpendiculares a essas linhas:

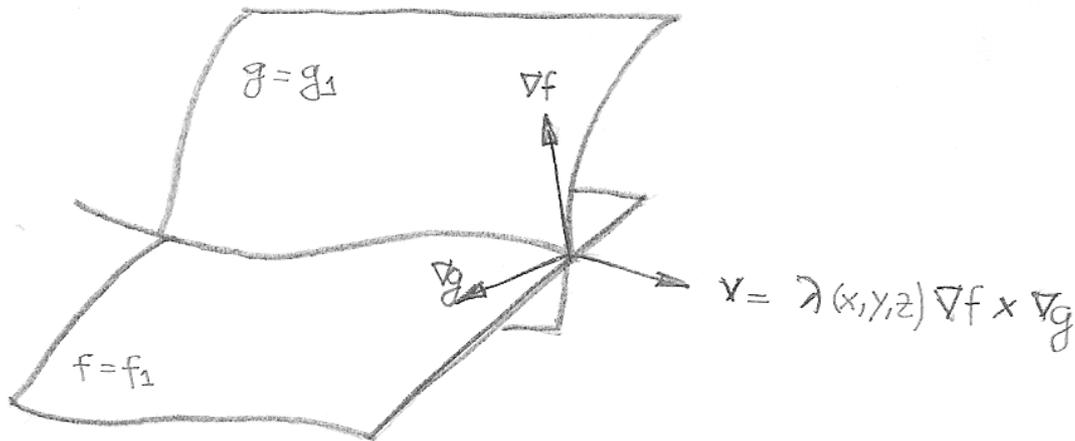


Fig. 3

$$\vec{V} = \lambda(x, y, z) \nabla f \times \nabla g \quad (4)$$

onde  $\lambda$  é uma função arbitrária das coordenadas.

Para regime permanente,  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ ,  $\lambda(x, y, z)$  pode ser associado a densidade através da equação da conservação da massa:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (5a)$$

$$\nabla \cdot [\lambda (\nabla f \times \nabla g)] = 0 \quad (5b)$$

para que (5b) satisfaça a conservação da massa,

$$\lambda \equiv \rho$$

Para fluidos incompressíveis,  $\rho = \lambda_0 = \text{const.}$ , a equação (5a) fica:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\lambda_0 \nabla f \times \nabla g) &= \lambda_0 \nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) \\ &= \{ \nabla g \cdot (\nabla \times \nabla f) - \nabla f \cdot (\nabla \times \nabla g) \} \end{aligned} \quad (6)$$

mas,  $\text{rot}(\text{grad } f) = \text{rot}(\text{grad } g) \equiv 0$

logo,

$$\nabla \cdot (\lambda_0 \nabla f \times \nabla g) \equiv 0$$

isto é, satisfaz a equação da continuidade.

Sem perda de generalidade, a equação (4) pode ser escrita como:

$$\vec{V} = (\nabla f \times \nabla g), \quad (7)$$

com componentes:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \\ v = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \\ w = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \end{cases}$$

A vazão através de um tubo de corrente constituído por duas superfícies  $f$  e  $g$  possui uma simples relação aos valores da função corrente  $f$  e  $g$  nestas superfícies.

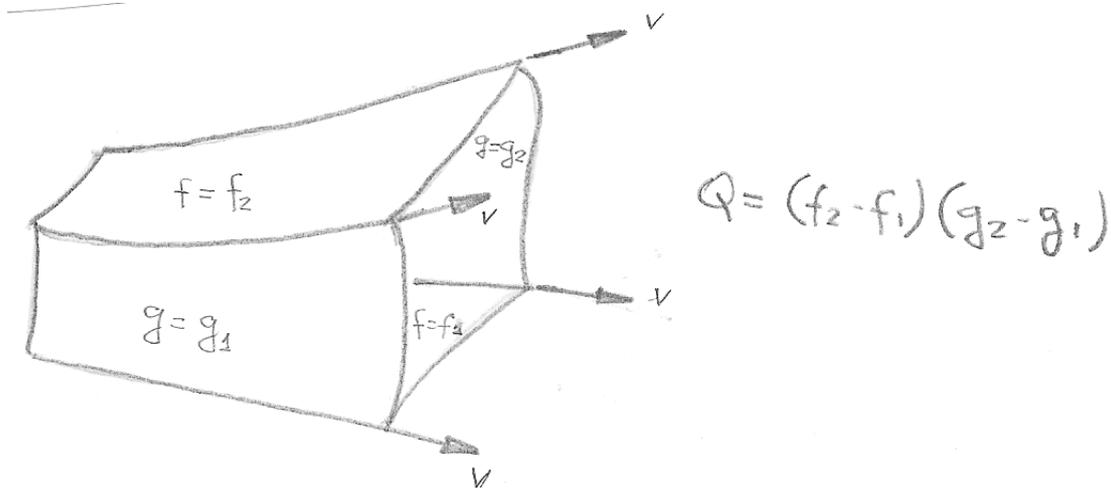


Fig. 4

A superfície que intercepta as linhas de corrente será denominada por  $\gamma$ . Introduzindo coordenadas ortogonais  $\xi_1$  e  $\xi_2$  na superfície  $\gamma$ , um elemento infinitesimal de arco  $ds^2$  na superfície  $\gamma$  pode ser expresso por:

$$ds^2 = h_1 d\xi_1^2 + h_2 d\xi_2^2$$

onde  $h_1$  e  $h_2$  são os fatores de escala que determinam a métrica para a superfície  $\gamma$ , limitada pelas superfícies,

$$f = f_1, \quad f = f_2, \quad g = g_1, \quad g = g_2$$

é

$$Q = \int_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS \quad (8)$$

A componente de velocidade normal a  $\gamma$  é dada através de (7) utilizando-se as coordenadas ortogonais  $\xi_1$  e  $\xi_2$ ,

$$v = \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right) \cdot \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial g}{\partial \xi_2} \right) - \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right) \cdot \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial g}{\partial \xi_1} \right) \quad (9a)$$

Denotando subscritos por diferenciação, uma forma mais compacta de (9a) é:

$$v = \left( \frac{f\xi_1}{h_1} \cdot \frac{g\xi_2}{h_2} - \frac{f\xi_2}{h_2} \cdot \frac{g\xi_1}{h_1} \right) \quad (9b)$$

Um elemento de área em  $\gamma$  é dado por:

$$dS = h_1 h_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (10)$$

Substituindo (9b) e (10) em (8), tem-se:

$$Q = \int_{\gamma} \left( \frac{f\xi_1}{h_1} \cdot \frac{g\xi_2}{h_2} - \frac{f\xi_2}{h_2} \cdot \frac{g\xi_1}{h_1} \right) h_1 h_2 d\xi_1 d\xi_2,$$

$$Q = \int_{\gamma} \frac{\partial(f, g)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 = \int_{f_1 g_1}^{f_2 g_2} df dg = (f_2 - f_1)(g_2 - g_1) \quad (11)$$

onde:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} \equiv \begin{vmatrix} f_{\xi_1} & f_{\xi_2} \\ g_{\xi_1} & g_{\xi_2} \end{vmatrix}$$

é o Jacobiano da transformação entre as coordenadas  $(\xi_1, \xi_2)$  e  $(f, g)$ . [Veja Kaplan, W., "Cálculo Avançado", vol. I, sec. 5.14]. Note que a Equação (11) não se altera se uma constante arbitrária é adicionada a  $f$  ou  $g$ .

A Equação (7) permite que um escoamento genérico com três componentes de velocidade, seja representado em termos de suas superfícies  $f$  e  $g$ ,

$$\dot{\mathbf{V}} = \nabla f \times \nabla g$$

A escolha de  $f$  ou  $g$  não é única, entretanto, para escoamentos que possuem simetria, é possível escolher  $g$  como um conjunto de planos definido pela variável de simetria e, então, reduzir o problema à determinação da restante superfície de corrente,  $f = \psi$ . Escoamentos com aplicação direta são: escoamentos planos em coordenadas cartesianas ou polares e escoamentos axi-simétricos em coordenadas cilíndricas ou esféricas.

### Função Corrente para Escoamento 2-D: Coordenadas Cartesianas

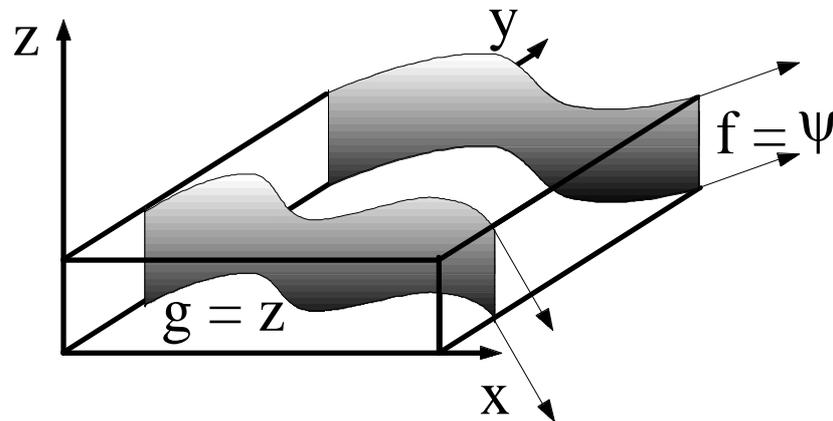


Fig. 5

Superfícies:

$$f = \psi(x, y), \quad g = z$$

$$\nabla\psi = (\psi_x, \psi_y, 0) \quad \nabla g = (0, 0, 1)$$

Velocidade:

$$\vec{V} = \nabla f \times \nabla g; \quad u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad w = 0$$

Vazão:

$$g_1 = z_1 = 0; \quad g_2 = z_2 = 1; \quad Q = \psi_2 - \psi_1$$

### Função Corrente para Escoamento 2-D: Coordenadas Polares

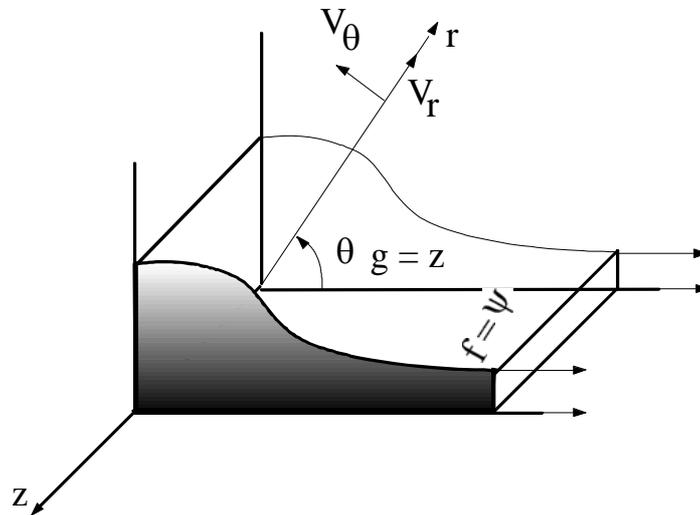


Fig. 6

Superfícies:

$$f = \psi(r, \theta), \quad g = z$$

$$\nabla\psi = \left( \frac{\partial\psi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, 0 \right) \quad \nabla g = (0, 0, 1)$$

Velocidade:

$$\vec{V} = \nabla f \times \nabla g; \quad v_r = v_r(r, \theta); \quad v_\theta = v_\theta(r, \theta); \quad v_z = 0$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}; \quad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Vazão:

$$g_1 = z_1 = 0; \quad g_2 = z_2 = 1; \quad Q = \psi_2 - \psi_1$$

### Função Corrente para Escoamento Axi-Simétrico: Coordenadas Cilíndricas

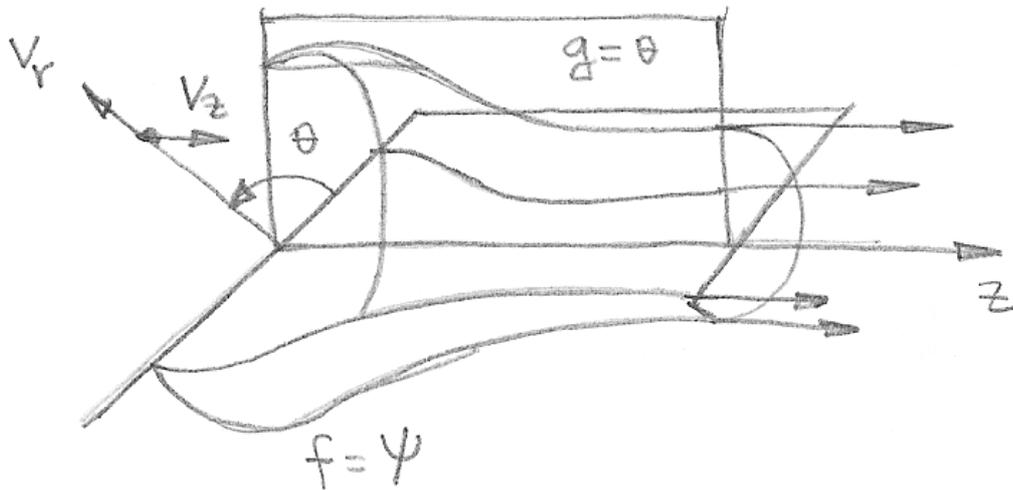


Fig. 7

Superfícies:

$$f = \psi(r, z), \quad g = \theta$$

$$\nabla\psi = \left( \frac{\partial\psi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \theta}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \quad \nabla g = \left( 0, \frac{1}{r}, 0 \right)$$

Velocidade:

$$\vec{V} = \nabla f \times \nabla g; \quad v_r = v_r(r, z); \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0; \quad v_z = v_z(r, z)$$

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0; \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Vazão:

$$g_1 = \theta_1 = 0; \quad g_2 = \theta_2 = 2\pi; \quad Q = 2\pi(\psi_2 - \psi_1) \quad \text{ou}$$

$$Q = 2\pi\psi_2 \quad \text{se } \psi_1 = 0 \text{ é o eixo } z.$$

### Função Corrente para Escoamento Axi-Simétrico: Coordenadas Esféricas

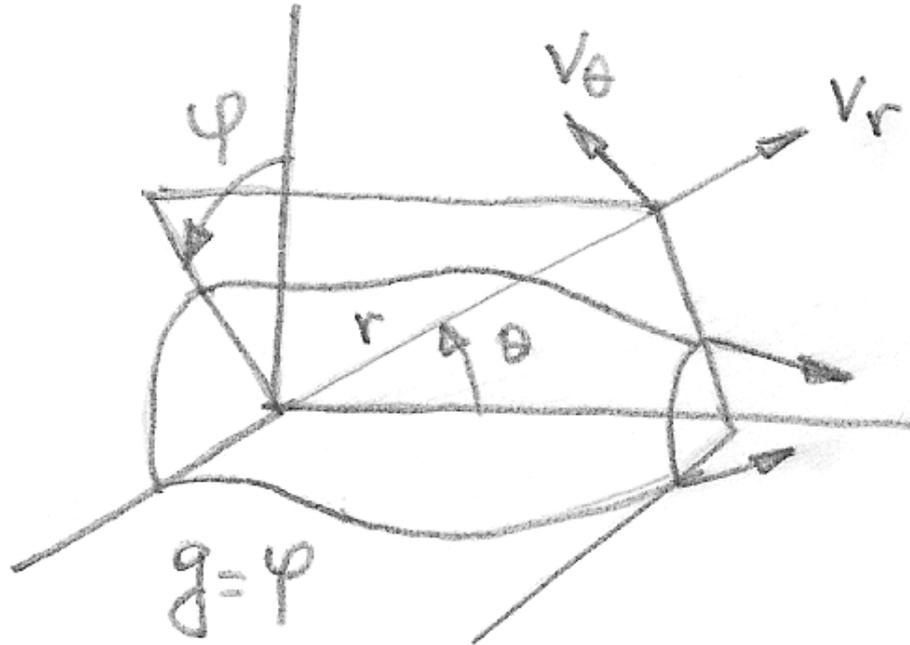


Fig. 8

Superfícies:

$$f = \psi(r, \theta), \quad g = \varphi$$

$$\nabla\psi = \left( \frac{\partial\psi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \frac{1}{r \cdot \text{sen}\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \right) \quad \nabla g = \left( 0, 0, \frac{1}{r \cdot \text{sen}\theta} \right)$$

Velocidade:

$$\vec{V} = \nabla f \times \nabla g; \quad v_r = v_r(r, \theta); \quad v_\theta = v_\theta(r, \theta); \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \cdot \text{sen}\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}; \quad v_\theta = -\frac{1}{r \cdot \text{sen}\theta} \frac{\partial\psi}{\partial r}; \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

Vazão:

$$g_1 = \varphi_1 = 0; \quad g_2 = \varphi_2 = 2\pi; \quad Q = 2\pi(\psi_2 - \psi_1) \quad \text{ou}$$

$$Q = 2\pi\psi_2 \quad \text{se } \psi_1 = 0 \text{ é o eixo } \theta = 0.$$

## Referências

- [1] Moore, F. K.; "Theory of Laminar Flows", Princeton Un. Press, 1964
- [2] Rosenhead, L.; "Laminar Boundary Layers", Oxford at the Clarendon Press, 1963
- [3] Pantom, R. L.; "Incompressible Flow", John Willey, 1984
- [4] Van Dyke, M.; "An Album of Fluid Motions", The Parabolic Press, 1982
- [5] Hunt, J. C. R.; Abbel, C. J.; "Kinematical Studies of the Flows Around Free or Surface-Mounted Obstacles; Applying Topology to Flow Visualization", J. Fluid Mechanics, vol. 86, part 1, pp. 179-200, 1978
- [6] Tobak, M.; Peake, D. J.; "Topology of Three-Dimensional Separated Flows", Ann. Rev. Fluid Mechanics, vol. 14, pp. 61-85, 1982
- [7] Perry, A. E.; Chong, M. S.; "A Description of Eddying Motions and Flow Patterns Using Critical-Point Concepts", Ann. Rev. Fluid Mechanics, vol. 19, pp. 125-155, 1987
- [8] Chong, M. S.; Perry, A. E.; Cantwell, B. J.; "A General Classification of Three-Dimensional Flow Fields", Physics of Fluids, A 2(5), May 1990.