

FENÔMENOS DE TRANSPORTE CHEMTECH

MÓDULO I Hidrodinâmica e Térmica - 15 horas -

AULA 1

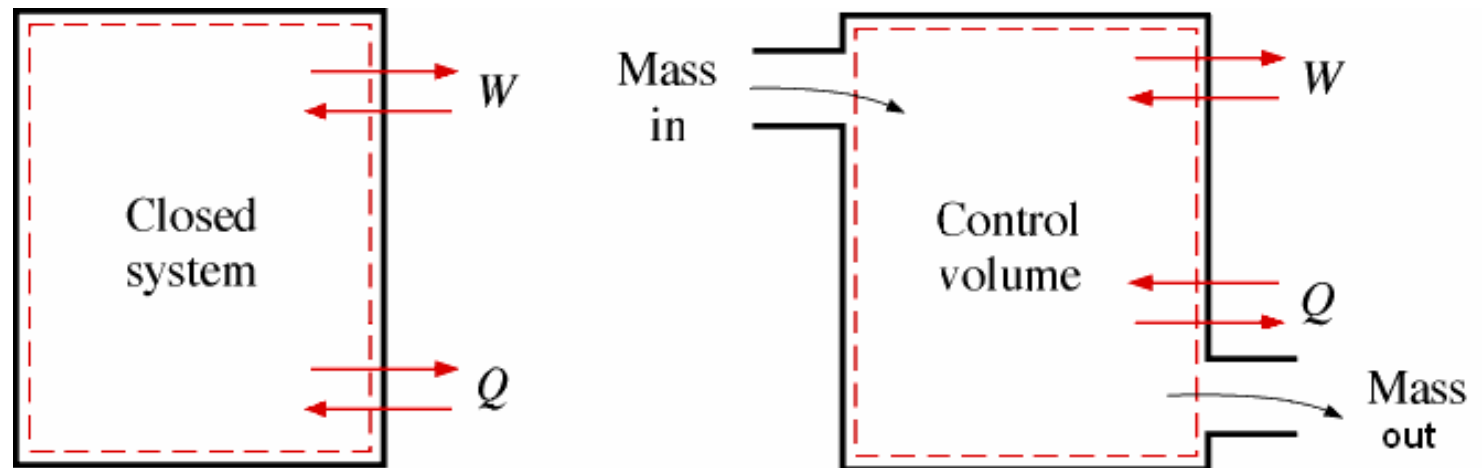
- 1. Formulação Integral das Equações de Transporte.**
- 2. Formulação Diferencial das Equações de Transporte.**
- 3. Equações Constitutivas.**

Parte I

Formulação Integral das Equações de Transporte

As Leis Físicas e o Conceito de Sistema

- Todas as leis físicas foram desenvolvidas para sistemas: um conjunto de partículas (massa) com identidade fixa.
- Não há fluxo de massa na fronteira de um sistema, mas pode haver forças (pressão, tensão) e energia na forma de calor ou trabalho cruzando sua fronteira.



Propriedades de Sistemas

- Um sistema pode ser caracterizado pela sua Massa, Quantidade de Movimento Linear, Energia, Entropia, entre outros parâmetros.

Variação da Massa de um sistema é, por definição, nula:

$$\left. \frac{DM}{Dt} \right|_{\text{sis}} = 0$$

Variação da Quant. de Movimento de um sistema - 2ª lei de Newton

$$\left. \frac{D(M\vec{V})}{Dt} \right|_{\text{sis}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

Variação da Energia de um sistema - 1ª Lei da Termodinâmica

$$\left. \frac{D(E)}{Dt} \right|_{\text{sis}} = \dot{Q} - \dot{W}$$

Variação da Entropia de um sistema - 2ª Lei da Termodinâmica

$$\left. \frac{D(S)}{Dt} \right|_{\text{sis}} = \frac{\dot{Q}}{T} + P_S$$

Forma Genérica

- Se considerarmos **B** uma propriedade extensiva de um sistema, sua variação pode ser expressa genericamente por:

$$\left. \frac{DB}{Dt} \right|_{\text{sis}} = S$$

- Onde **S** representa um termo fonte adequado para o fenômeno que **B** representa: massa, quantidade de movimento, energia etc.

Propriedade Não-Uniformes

- A propriedade genérica B (massa, q. movimento, energia etc) do sistema, em geral, não é uniforme no espaço.
- Ela pode ser convenientemente avaliada definindo-se uma propriedade intensiva β como:

$$\beta = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta B}{\Delta m} \right)$$

- De tal forma que a taxa de variação de B no sistema pode ser determinada por:

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{\text{sis}} \rho \cdot \beta \cdot dV \right] = S$$

Propriedades de Sistemas

- **As equações que descrevem as variações das propriedades nos sistemas são postulados ou leis da física.**
- **Para constituirmos estas equações propriamente devemos especificar a natureza do termos fonte.**

Equação da Massa para um Sistema

- A equação da Massa é obtida fazendo-se $\beta = 1$,

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{\text{sis}} \rho \cdot dV \right] = 0$$

- Note que não há termo fonte de massa, pressupõe-se na ausência de efeitos nucleares.

Equação da Q. Movimento para um Sistema

- A equação da Q. Movimento é obtida fazendo-se $\beta = V$,

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{\text{sis}} \rho \vec{V} dV \right] = \underbrace{\int_A \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \vec{g} dV}_{\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}}$$

- As forças externas são divididas em forças que agem na fronteira do sistema, Tensões $\mathbf{T}$ (natureza tensorial), e forças de campo que agem no volume do sistema.

Equação da Energia para um Sistema

- A equação da Energia é obtida fazendo-se $\beta = e$, não especificada neste estágio,

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{\text{sis}} \rho e dV \right] = + \underbrace{\left[- \int_A \vec{q}_k'' \cdot \vec{n} dA \right]}_{\dot{Q}} - \underbrace{\left[- \int_A \vec{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \vec{V}) dA \right]}_{\dot{W}} + \int_V \dot{q}''' \cdot dV$$

- Q e W só existem na fronteira do sistema, o calor é exclusivamente devido a condução térmica e o trabalho é aquele realizado pelas tensões que atuam na fronteira.
- O último termo refere-se a geração volumétrica de energia no interior do volume (reação química, dissipação efeito joule, etc)

2ª Lei para um Sistema

- A 2ª Lei é obtida fazendo-se $\beta = s$,

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{\text{sis}} \rho s dV \right] = - \int_A \left(\frac{\vec{q}_k''}{T} \right) \cdot \vec{n} dA + \int_V \left(\frac{\dot{q}'''}{T} \right) \cdot dV + P s$$

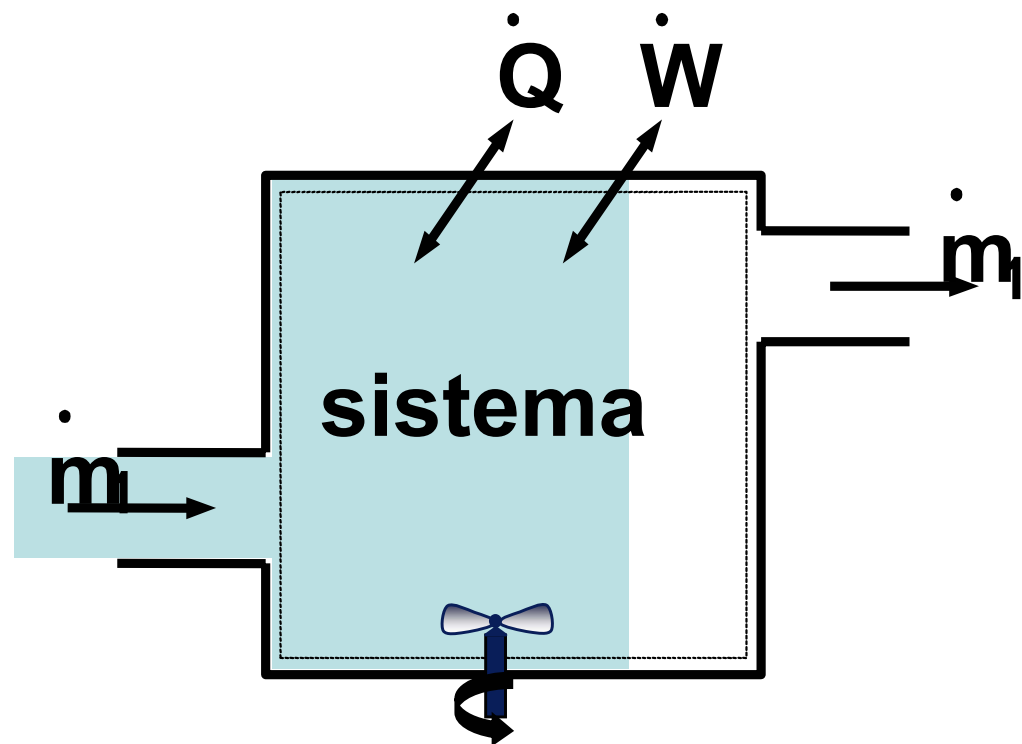
- O primeiro e segundo termo referem-se a produção ou destruição de s devido a transferência de calor na fronteira e devido a geração de energia internamente ao volume.
- O último termo refere-se a produção de entropia devido as irreversibilidades do sistema, $P s \geq 0$.

Equações de Transporte ou Conservação?

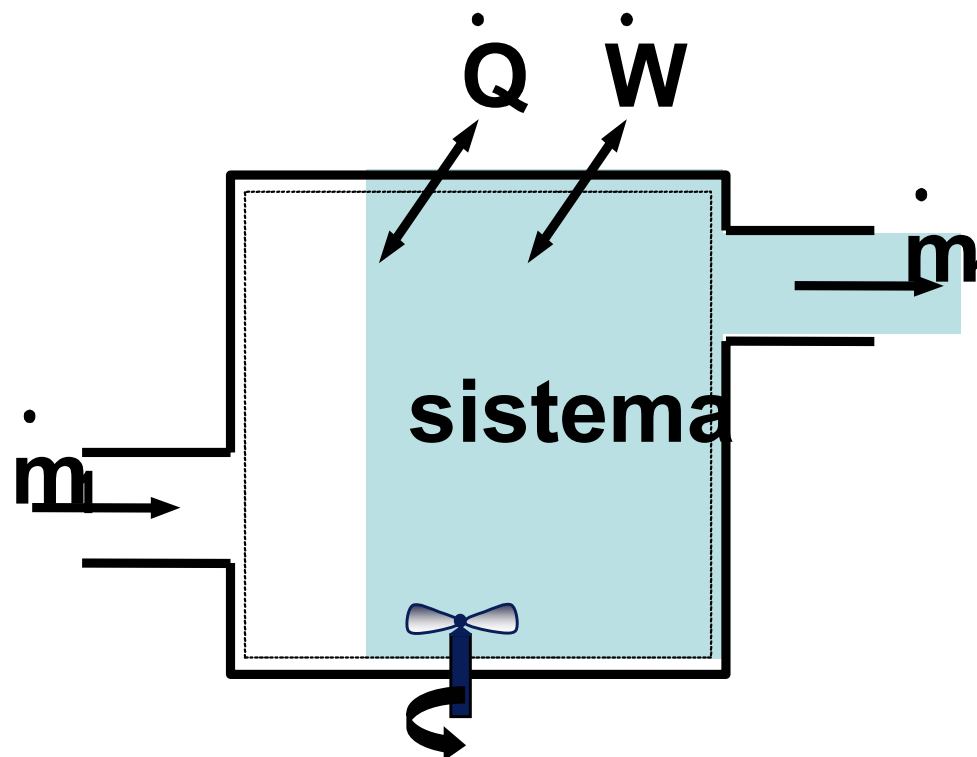
- Os livros textos freqüentemente denominam estas propriedades dos sistemas por ***Equações de Transporte*** ou ***Equações de Conservação***.
- A primeira denominação sub-entende como uma propriedade específica é transportada (convecção e difusão) pelo campo.
- O termo conservação é igualmente aplicado porque o lado direito da equação deve ser igual ao seu lado esquerdo, isto é, o transporte deve ser igual ao termos fonte associados a produção ou destruição da propriedade!

Aplicação do Conceito de Sistema

- Os postulados físicos para sistemas são aplicados com sucesso para partículas e corpos rígidos.
- No entanto encontra-se dificuldade para aplicá-los em corpos que se deformam continuamente **(FLUIDOS)**!
- Veja se você conseguiria identificar, em qualquer instante de tempo, todas as partículas de fluido que compõe o sistema ao entrar em um reator com agitação, transferência de calor e trabalho:



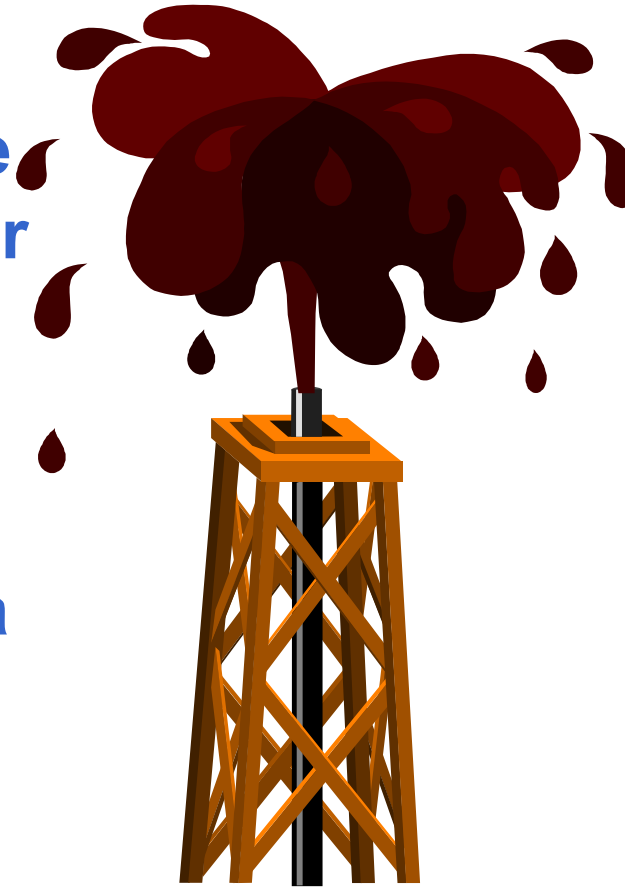
Instante: t_0



Instante: $t_0 + \Delta t$

Sistema x Volume de Controle

- Para corpos que se deformam continuamente(gases e líquidos) é difícil realizar uma análise seguindo-se o sistema!
- É muito mais simples se ater a uma região no espaço (Volume de Controle) onde massa pode cruzar sua fronteira.
- O Teorema de Transporte de Reynolds (TTR) permite que se faça uma análise de um Sistema a partir do conceito de Volume de Controle!



O Volume de Controle

- **O Volume de Controle V.C. é uma região do espaço onde se deseja realizar a análise.**
- **O Volume de Controle pode ser estacionário ou móvel no espaço; fixo ou deformável ou qualquer outra combinação;**
- **Ele delimita uma região do espaço onde massa, força e energia podem cruzar a fronteira.**
- **A sua fronteira com o meio externa é delimitada pela Superfície de Controle, S.C.**

Teorema de Transporte de Reynolds

- Ele descreve a variação da propriedade do sistema em termos de propriedades medidas no Volume de Controle.

$$\frac{D}{Dt} \int_{\text{sis}} \rho \beta \cdot dV \equiv \frac{d}{dt} \int_{VC} \beta \rho dV + \int_{SC} \beta \rho (\vec{n} \cdot \vec{V}_r) dA$$

onde V_r é a velocidade relativa do fluido em relação a fronteira, $V_r = V_f - V_b$

- A variação da propriedade B do sistema é igual a variação de B no V.C. mais o fluxo líquido de B que cruza a S.C.

Forma Integral das Equações de Transporte

- O TTR permite escrever as Equações de Transporte a partir do conceito de Volume de Control

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \beta \rho dV + \int_{SC} \beta \rho (\vec{n} \cdot \vec{V}_r) dA = \underbrace{\int_{SC} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \int_{VC} \mathbf{f} \cdot dV}_{\text{Source S}}$$

	β (B/M)	Source
Massa	1	0
Movimento	V	$\int_{S \cdot C} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{V \cdot C} \rho \vec{g} dV$
1ª Lei	e	$-\int_{SC} \vec{q}_k'' \cdot \vec{n} dA + \int_{SC} \vec{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \vec{V}) dA + \int_{VC} \vec{q}''' \cdot dV$
2ª Lei	s	$-\int_{SC} \left(\frac{\vec{q}_k''}{T} \right) \cdot \vec{n} dA + \int_{VC} \left(\frac{\vec{q}'''}{T} \right) \cdot dV + P_s$

J e f são fontes genéricas associadas a SC e ao VC

Notas Finais da Parte I ...

- Note que a formulação integral das Equações de Transporte contêm termos envolvendo integrais na Superfície de Controle e também no Volume de Controle.
- A estratégia para se obter uma formulação diferencial começa transformando todos as integrais de superfície em volume,
- Para isto vamos introduzir o Teorema de Gauss

Parte II

Formulação Diferencial das Equações de Transporte

Teorema de Gauss

- O Teorema de Gauss transforma a avaliação de uma integral de superfície em integral de volume.
- Ele aplica-se a grandezas escalares, vetoriais e tensoriais:

$$\int_{SC} (\vec{n} \cdot \phi) \cdot d\mathbf{A} \equiv \int_{VC} (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{V}$$

$$\int_{SC} (\vec{n} \times \vec{V}) \cdot d\mathbf{A} \equiv \int_{VC} (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\mathbf{V}$$

$$\int_{SC} (\vec{n} \cdot \mathbf{T}) \cdot d\mathbf{A} \equiv \int_{VC} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot d\mathbf{V}$$

∇ é o operador nabla, ∇f é o gradiente de um escalar (vetor); $\nabla \times V$ é o rotacional de um vetor (vetor) e $\nabla \cdot \mathbf{T}$ é o divergente de um tensor (vetor)

Aplicação do Teorema de Gauss

- Aplicando o Teorema de Gauss à Equação de Transporte vamos transformar os termos de superfície em volume:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \beta \rho dV + \int_{SC} \beta \rho (\vec{n} \cdot \vec{V}_r) dA = \underbrace{\int_{SC} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \int_{VC} \mathbf{f} \cdot dV}_{\text{Source S}}$$

↓ Teorema de Gauss ↓

$$\int_{VC} \left[\frac{d(\beta \rho)}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \cdot \beta) - \nabla \cdot \mathbf{J} - \mathbf{f} \right] dV = 0$$

A transformação é válida para V.C. não deformáveis, isto é, seu volume não varia com o tempo.

Forma Diferencial

$$\int_{VC} \left[\frac{\partial(\beta\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \cdot \beta) - \nabla \cdot \mathbf{J} - \mathbf{f} \right] dV = 0$$

- Como representação Integral acima o tamanho do VC é arbitrário, para a identidade ser válida para qualquer volume é necessário que seu argumento seja nulo!

$$\underbrace{\frac{\partial(\beta\rho)}{\partial t}}_{\text{transiente}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \vec{V} \cdot \beta)}_{\text{convectivo}} = \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{J}}_{\text{fonte de Superfície}} + \underbrace{\mathbf{f}}_{\text{fonte de Volume}}$$

Equação Diferencial da Massa

- A equação da Massa é obtida fazendo-se $\beta = 1$ e $\mathbf{J} = \mathbf{f} = 0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

- Note que para fluidos incompressíveis, isto é, ρ constante, ela se reduz para:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Equação Diferencial da Q. Movimento

- A equação da Q. Movimento é obtida fazendo-se $\beta = \mathbf{V}$, $\mathbf{J} = \mathbf{T}$ e $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$,

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{g}$$

- A Equação da Q. Movimento é vetorial, possui 3 componentes,
- Todos os termos possuem unidades de Força/Volume (N/m^3)
- O termo $\rho \mathbf{V} \mathbf{V}$ é um produto diádico, possui natureza tensorial e representa o fluxo de Q. movimento que cruza a S.C.

Equação da Diferencial da Energia ‘e’

- A equação da Energia é obtida fazendo-se $\beta = e$, $\mathbf{J} = \mathbf{q}_k + \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}$ e $f = q'''$;

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} e) = -\nabla \cdot \vec{q}_k'' + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \vec{V}) + q'''$$

- O lado esquerda representa o transporte da energia.
- O lado direita representa os termos de calor e trabalho (1a lei) e também um fonte de energia volumétrico

Equação Diferencial da 2ª Lei

- A 2ª Lei é obtida fazendo-se $\beta = s$, $J = q_k/T$ e $f = q'''/T$,

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}s) = -\nabla \cdot \frac{\vec{q}_k''}{T} + \frac{q'''}{T} + P_s$$

- O primeiro e segundo termo referem-se a produção ou destruição de s devido a transferência de calor na fronteira e devido a geração de energia internamente ao volume.
- O último termo refere-se a produção de entropia devido as irreversibilidades do sistema.

Forma Conservativa e Não-Conservativa

$$\frac{\partial(\beta\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \cdot \beta) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \mathbf{f}$$

- A equação de transporte acima está na sua forma Conservativa. Os termos transiente e convectivos podem ser desdobrados :

$$\underbrace{\beta \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right]}_{\equiv 0} + \rho \frac{\partial \beta}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla \beta = \nabla \cdot \mathbf{J} + \mathbf{f}$$

- Nota-se que a forma Conservativa mantinha implicitamente a equação da massa. Após as simplificações chega-se a forma Não-Conservativa

$$\rho \frac{\partial \beta}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla \beta = \nabla \cdot \mathbf{J} + \mathbf{f}$$

Derivada Substantiva ou Total

$$\rho \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \beta \right)$$

- **Em cinemática o termo acima tem um significado especial.**
- **Ele coincide com a taxa de variação de uma propriedade seguindo uma partícula, isto é, a partir de um referencial Lagrangeano.**

$$\rho \frac{D\beta}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \beta \right)$$

Equação Diferencial da Massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

- **Desmembrando o segundo termo da equação vamos encontrar:**

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \nabla \rho}_{D\rho/Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

- **Para regime permanente e um fluido incompressível, a sua densidade não varia ao longo de uma linha de corrente, logo $D\rho/dt = 0$ portanto:**

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Equação Diferencial da Q. Movimento Forma Não-Conservativa

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{g}$$

- Desmembrando os termos de transporte e eliminando a equação da massa encontra-se:

$$\rho \left[\frac{\partial(\vec{V})}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right] = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{g} \quad \text{ou} \quad \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{g}$$

- A derivada total da velocidade DV/Dt dá a aceleração seguindo uma partícula!
- Note que a derivada total resgata o conceito da análise de Sistemas pois ele segue uma partícula infinitesimal com identidade fixa!

1ª e 2ª Leis Forma Não-Conservativa

- De maneira similar a equação da massa e Q. de movimento, os termos transiente e convectivos podem ser desmembrados , a equação da massa eliminada e gerando a forma não conservativa da 1ª e 2ª leis:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q}_k'' + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \vec{V}) + q'''$$

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \frac{\vec{q}_k''}{T} + \frac{q'''}{T} + P_s$$

Notas Finais da Parte II

- As equações de transporte, especificamente a Quantidade de Movimento, Energia e 2a Lei estão expressas em função do campo de tensões **T**.
- Não é possível resolvê-las nesta forma porque não se conhece como o campo de tensão se comporta com o campo de velocidades.
- É necessário estabelecer as equações constitutivas para o fluido onde será modelado como a tensão varia com o campo de velocidades, nosso próximo tópico.

Parte III

Equações Constitutivas

Introdução

- Por equação constitutiva entende-se ‘modelos’ que expressam uma variável em função de outra.
- Por exemplo, a tensão em função da taxa de deformação do fluido.
- Estes ‘modelos’ não são leis físicas mas podem representar sob condições estabelecidas o comportamento físico do fluido.
- Nesta seção serão desenvolvidas equações constitutivas para a
 - Tensão $\mathbf{T}$ no fluido ,
 - Taxa de Calor por condução no fluido, q_k .
- Das duas equações a mais envolvente é a equação constitutiva para tensão, vamos começar por ela.

Sobre a Natureza da Tensão $\mathbf{T}$

- As tensões que agem no fluido podem ser Normais ou Cisalhantes;
- Além disto, no estado estático (sem movimento relativo) só agem tensões normais enquanto que para fluido em movimento surgem tensões normais e cisalhantes devido ao atrito entre as camadas de fluido.
- A tensão $\mathbf{T}$ é dividida em duas partes, uma devido a pressão $\mathbf{P}$ (forças normais) e outra denominada por desvio da tensão, $\mathbf{T}'$

$$\mathbf{T} = -\mathbf{P} + \mathbf{T}'$$

A Pressão

- A pressão é um tensor isotrópico, isto é, ela não depende da orientação, seus elementos da diagonal são iguais e fora da diagonal são nulos, por isto o tensor pode ser representado por um único escalar:

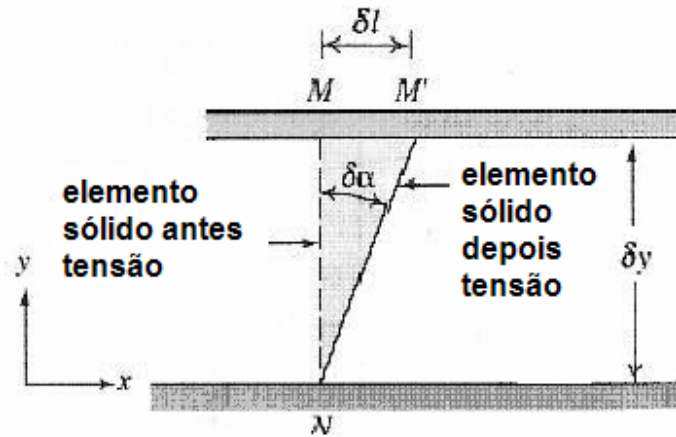
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

Propriedades do Tensor Desvio das Tensões, T'

- O tensor desvio das tensões existe somente se houver movimento relativo entre as partículas de fluido.
- Ele possui tensões normais e cisalhantes,
- Ele é simétrico, isto é, os elementos fora de sua diagonal são idênticos,
 $T'_{ij} = T'_{ji}$

Similaridades Sólido - Fluido

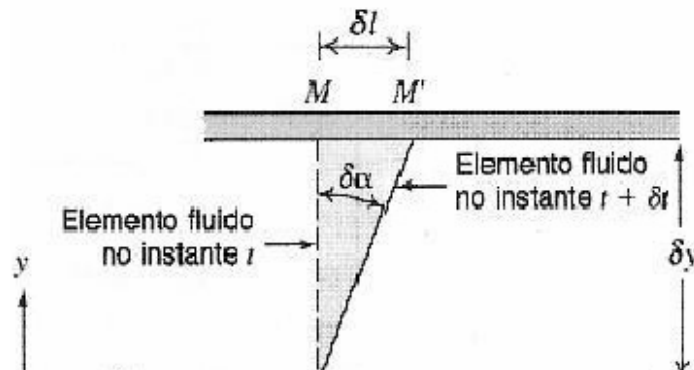
- Uma tensão aplicada a um corpo sólido causa uma deformação, lei de R. Hooke (1635-1703)



$$\tau = G \frac{d\ell}{dy}$$

Coeficiente Lamé (N/m²) Deformação

- Fluido se deforma continuamente quando sujeito a uma tensão. Newton propôs, por similaridade, que a tensão é proporcional a taxa de deformação

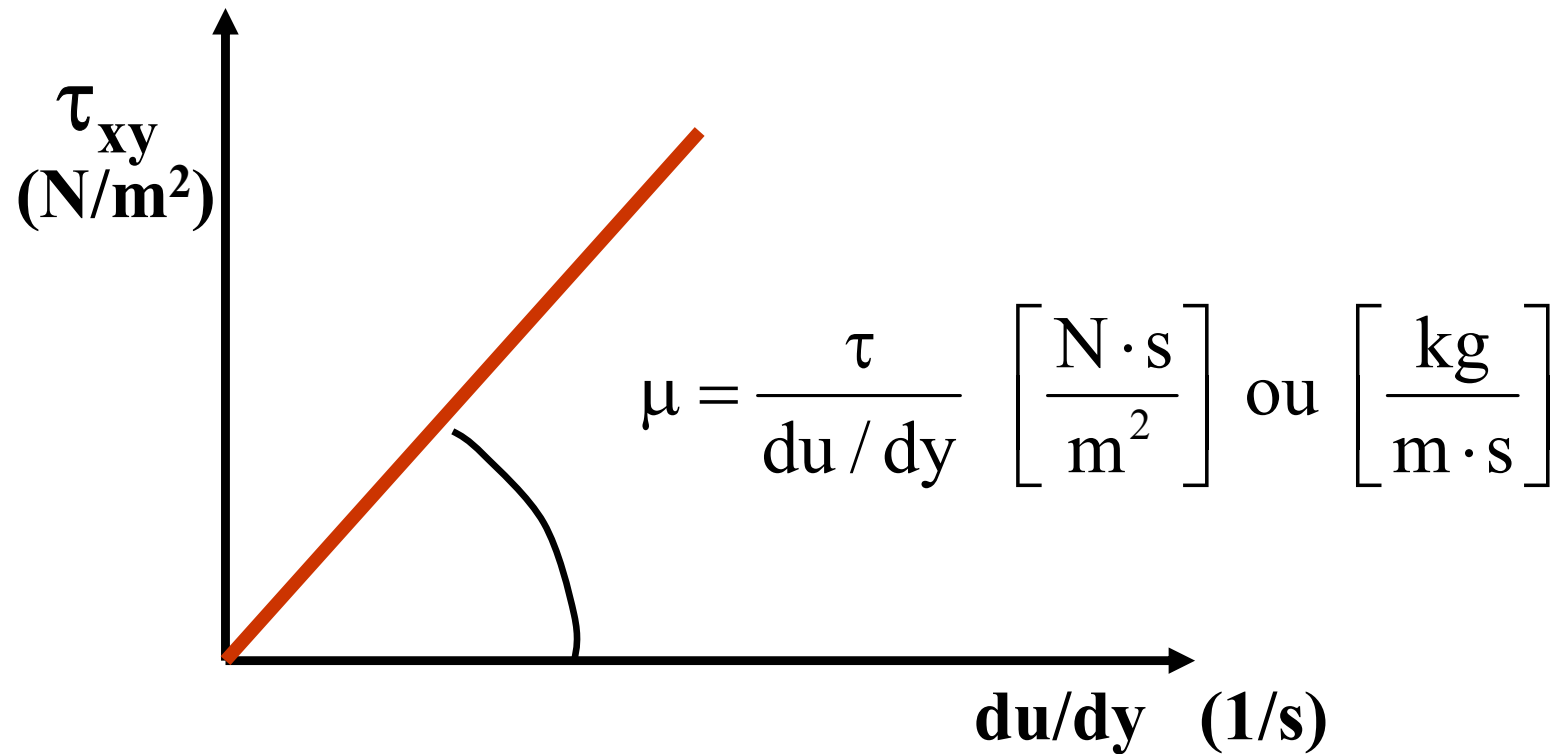


$$\tau = \mu \frac{(d\ell/dt)}{dy} \equiv \mu \frac{du}{dy}$$

viscosidade (N.s/m²) Taxa Deformação

Viscosidade Dinâmica (Absoluta)

- Fluidos Newtonianos (água, todos os gases e maioria dos líquidos) são aqueles que apresentam uma relação linear entre a tensão e a taxa de deformação.



- A viscosidade μ é uma propriedade do fluido e tem natureza escalar.

Extensão para Escoamentos 3D

- **A lei de Newton pode ser
estendida para escoamentos
3D a partir do conhecimento
da taxa de deformação**

Tensor Deformação, D_{ij}

- ✓ Em notação indicial, o tensor deformação, D_{ij} , é definido por

$$\mathbf{D}_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} \\ \mathbf{D}_{31} & \mathbf{D}_{32} & \mathbf{D}_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \end{bmatrix}$$

- ✓ Em notação vetorial,

$$\mathbf{D} = \text{grad} \vec{\mathbf{V}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{D} = \nabla \vec{\mathbf{V}}$$

Operação com Tensores

- ✓ Qualquer tensor pode ser decomposto em uma parte simétrica e outra anti-simétrica:

$$\mathbf{D}_{i,j} \equiv \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{D}_{i,j} + \mathbf{D}_{j,i})}_{\text{Tensor Simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{D}_{i,j} - \mathbf{D}_{j,i})}_{\text{Tensor Anti-Simétrico}}$$

- ✓ Como $\mathbf{T}'$ é um tensor simétrico ele é proporcional a parte simétrica do tensor Deformação (paralelo a lei de Newton)

Decomposição do Tensor Deformação

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\text{Tensor Simétrico}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Tensor Anti-Simétrico}}$$

- 1. A diagonal do tensor simétrico está associada a dilatação linear do elemento**
- 2. Os elementos fora da diagonal do tensor simétrico estão associados a deformação angular**
- 3. Os elementos do tensor anti-simétrico estão associados a rotação do elemento fluido.**

O Tensor, $\mathbf{S}_{ij}$

- O tensor $\mathbf{S}$ é a parte simétrica do tensor deformação $\mathbf{D}$.
- Ele existe devido ao movimento relativo do fluido que causa deformações normais e angulares ao elemento de fluido.

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T)$$

$\nabla \mathbf{V}$ e $\nabla \mathbf{V}^T$ são tensores que representam o gradiente de

Equação Constitutiva para Fluido Newtoniano

- Para fluidos incompressíveis (ρ constante)

$$\mathbf{T} = -P \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{S}$$

- Para fluidos compressíveis

$$\mathbf{T} = -P \mathbf{I} - \underbrace{\frac{2\mu}{3} \nabla \cdot \vec{V} \mathbf{I}}_{\mathbf{T}' } + 2\mu \mathbf{S} \quad \text{ou}$$

$$\mathbf{T} = -\left[P + \frac{2\mu}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right] \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{S}$$

- Onde $\mathbf{I}$ é o tensor identidade

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Porque Tensão e Deformação são Linearmente Dependentes?

- A relação $\tau = \mu du/dy$ é um modelo! Portanto não há razão alguma que na natureza os fluidos devam seguir este modelo.
- Entretanto, os gases seguem este modelo;
- Água, óleos em geral e uma grande maioria de líquidos podem ser bem representados por este modelo;
- Mas há líquidos que não são representados: tintas, fluidos biológicos, emulsões em geral.

Fluidos Newtonianos Generalizados

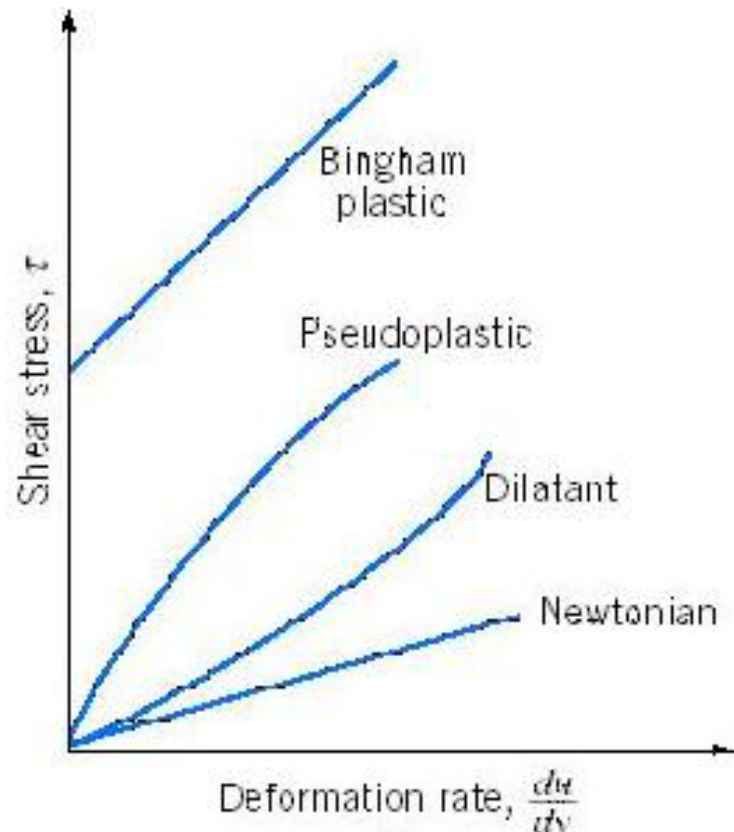
- **Eles descrevem fluidos com comportamento não-linear tensão x deformação mas não reproduzem efeitos de:**
 - **tensão normal,**
 - **efeitos dependentes do tempo,**
 - **ou efeitos elásticos**

Fluidos Newtonianos Generalizados

- A relação 'mais' geral entre tensão e deformação:

$$\tau_{yx} = k \left(\frac{du}{dy} \right)^n$$

- n – índice de comportamento do escoamento.
- k – índice de consistência.



$n = 1$, fluido newtoniano, $k = \mu$

$n > 1$, fluido dilatante

$n < 1$ fluido pseudo plástico

Viscosidade Aparente, η

- É uma conveniência matemática para ajustar a forma de modelos lineares.
- Desmembrando a tensão em um termo linear e outro com potência (n-1):

$$\tau_{yx} = k \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} = \eta \frac{du}{dy}$$

- A viscosidade aparente é $\eta = k(du/dy)^{(n-1)}$.
- Note que ela não é mais propriedade do fluido mas depende do campo de velocidades.
- Ela pode variar ponto a ponto dentro do campo do escoamento

Equação Constitutiva para Fluido Newtoniano Generalizado

- Para fluidos incompressíveis (ρ constante)

$$\mathbf{T} = -P \mathbf{I} + 2\eta(S) \mathbf{S}$$

- onde S é um escalar com dimensão de $(1/s)^2$ e é definido pelo produto escalar do tensor $\mathbf{S}$

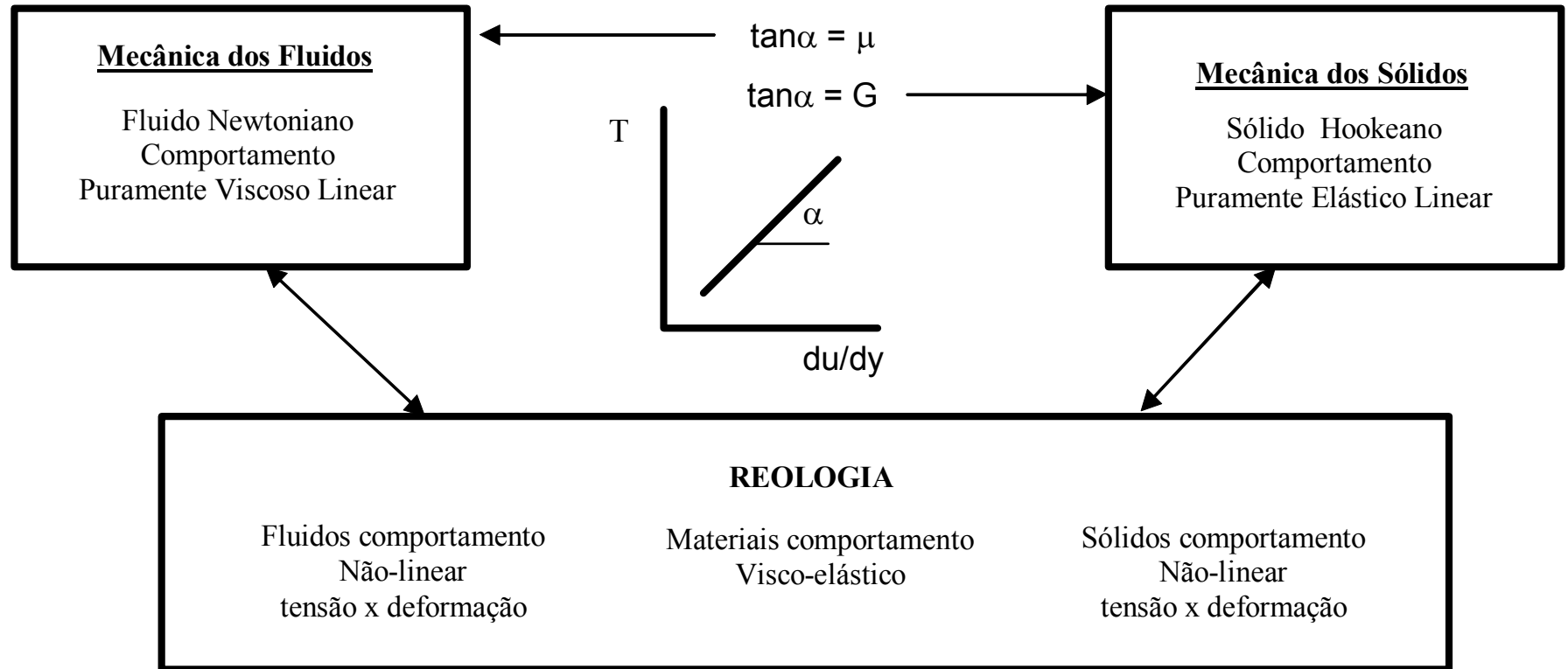
$$S = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}$$

- e η é uma função tipo lei de potência de S ,

$$\eta = kS^{(n-1)}$$

$S:S$ é o produto escalar entre dois tensores, veja definição em

Campo da Reologia



Difusão de Calor, Lei de Fourier

- A condução ou difusão de calor tem natureza vetorial e é dada pela Lei de Fourier:

$$\overrightarrow{q''_k} = -k \nabla T \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

- onde k é o coeficiente de condução ou difusão térmica, $\text{W/m}^\circ\text{C}$.

Difusão de Massa, Lei de Fick

- O fluxo de massa por difusão de uma espécie química em outra é proporcional ao gradiente de concentração mássica da espécie :

$$\vec{m}_j'' = -\rho D_j \nabla w_j \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{s.m}^2} \right]$$

- onde m'' é o vetor fluxo de massa (kg/(s.m²));
- ρ é a densidade da mistura;
- D_j é o coef. Difusão de massa, (m²/s);
- e w_j é a fração mássica ou concentração do componente j, $w_j = m_j/M$.

Notas Finais da Parte III

- **As equações constitutivas para tensão e calor permitem que as equações de transporte de Q. Movimento e Energia sejam escritas em termos das variáveis básicas: Velocidades, Pressão e Temperatura.**
- **Na Parte IV desta aula vamos retornar às Equações de Transporte para fazermos esta substituição e chegarmos a sua forma final!**

Parte IV

Retorno às Equações Diferenciais de Transporte

Equação Diferencial da Massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\text{ou } \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \nabla \rho}_{D\rho/Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

- **Note que para fluidos incompressíveis, isto é, ρ constante, ela se reduz para:**

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Equação de Navier Stokes

- A Eq. Transporte de Q. Movimento é:

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{g}$$

- Substituindo a Eq. constitutiva da Tensão para fluido Newtoniano vamos chegar às Equações de Navier-Stokes (NS):

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = -\nabla P + \nabla \cdot \left[-\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \mathbf{S} \right] + \rho \vec{g}$$

- A Eq. acima é válida para escoamentos compressíveis, e viscosidade variável. $\mathbf{S}$ é definido por:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T)$$

Equação de Navier Stokes Compressível

- Para μ constante e considerando a identidade:

$$\nabla \cdot 2\mathbf{S} \equiv \nabla \cdot \left[\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T \right] \equiv \nabla^2 \vec{V} + \nabla \left[\nabla \cdot \vec{V} \right]$$

- vamos chegar às Equações de Navier-Stokes (NS) para um fluido compressível com μ constante:

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = -\nabla P + \frac{1}{3} \mu \nabla \left[\nabla \cdot \vec{V} \right] + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g}$$

Equação Navier Stokes Incompressível

- Para ρ e μ constantes temos que, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, logo:

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g}$$

- Esta é a forma mais popular das Equações de Navier Stokes: fluido incompressível e com viscosidade constante.

Equação de Transporte de 'e'

- A equação de transporte da Energia 'e', na sua forma não-conservativa é:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_k'' + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \vec{V}) + q'''$$

- Neste estágio é conveniente substituir $\mathbf{T} = -\mathbf{P} + \mathbf{T}'$ e expandir os termos:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \vec{V}) + \nabla \cdot (\mathbf{T}' \cdot \vec{V}) - \nabla \cdot \mathbf{q}_k'' + q'''$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \overbrace{-\vec{V} \cdot \nabla \mathbf{P} - \mathbf{P} \nabla \cdot \vec{V}}^{\nabla \cdot (\mathbf{P} \vec{V})} + \overbrace{\vec{V} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}' + \mathbf{T}' : \nabla \vec{V}}^{\nabla \cdot (\mathbf{T}' \vec{V})} - \nabla \cdot \mathbf{q}_k'' + q'''$$

$\mathbf{T}' : \nabla \mathbf{V}$ é o produto 'escalar' entre o tensor desvio da tensão e o tensor deformação do fluido, seu resultado é um escalar. Veja definições no material impresso do curso

Equação de Transporte de 'e'

- Para se chegar a forma final da Equação da Energia é necessário definir:
 1. As formas de energia que 'e' representa;
 2. A difusão do calor, q_k
 3. O tensor das tensões no fluido e seus produtos
- Estas tarefas serão feitas na seqüência.

Modos de Energia 'e'

- Vamos considerar três modos de energia: interna, cinética e potencial:

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} - \vec{g} \cdot \vec{r}$$

- onde $\hat{u}$ é a energia interna, g a aceleração da gravidade e r o vetor posição

- A derivada total em termos das parcelas de 'e' fica sendo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{u} & \rightarrow \frac{D\hat{u}}{Dt} \\ \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} & \rightarrow \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \right) \equiv \vec{V} \frac{D}{Dt} (\cdot \vec{V}) \\ \vec{g} \cdot \vec{r} & \rightarrow \vec{g} \cdot \frac{D}{Dt} (\vec{r}) \equiv \vec{g} \cdot \vec{V} \end{array} \right.$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + \rho \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho \vec{g} \cdot \vec{V}$$

Equação de Transporte da Energia Cinética, K

- Multiplicando-se ambos os lados da Eq. NS por $\vec{V}$ vamos encontrar:

$$\rho \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{V} \cdot \nabla P + \vec{V} \cdot \nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \mathbf{S} \right) + \rho \vec{V} \cdot \vec{g}$$

- A energia cinética K é:

$$\rho \vec{V} \cdot \frac{D}{Dt} \vec{V} \equiv \rho \frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} (\vec{V} \cdot \vec{V}) \right] \equiv \rho \frac{D}{Dt} [K]$$

- E sua equação de transporte é:

$$\rho \frac{D}{Dt} [K] = -\vec{V} \cdot \nabla P + \vec{V} \cdot \nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \mathbf{S} \right) + \rho \vec{V} \cdot \vec{g}$$

Equação de Transporte da Energia Interna, $\hat{u}$

- Subtraindo a Equação da Energia Cinética da Equação de 'e' vamos ter:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + \rho \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho \vec{V} \cdot \vec{g} &= \overbrace{-\vec{V} \cdot \nabla P - P \nabla \cdot \vec{V}}^{\nabla \cdot (P\vec{V})} + \overbrace{\vec{V} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}' + \mathbf{T}' : \nabla \vec{V}}^{\nabla \cdot (\mathbf{T}' \vec{V})} - \nabla \cdot \mathbf{q}_k'' + q''' \\ - \rho \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} &= + \vec{V} \cdot \nabla P \quad \quad - \vec{V} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}' + \rho \vec{V} \cdot \vec{g} \end{aligned}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = - P \nabla \cdot \vec{V} + \mathbf{T}' : \nabla \vec{V} - \nabla \cdot \mathbf{q}_k'' + q'''$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = - \nabla \cdot \mathbf{q}_k'' + \mathbf{T}' : \nabla \vec{V} - P \nabla \cdot \vec{V} + q'''$$

Equação de Transporte da Energia Interna, $\hat{u}$

- Substituindo as equações constitutivas para o tensor desvio da tensão e da condução vamos ter:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T - \mathbf{P} \nabla \cdot \vec{V} + \mu \phi + \mathbf{q}'''$$

- o termo $-\mathbf{P} \nabla \cdot \vec{V}$ está associado ao trabalho de compressão para fluidos compressíveis;
- ϕ é a função dissipação, sempre positiva:

$$\mathbf{T}' : \nabla \vec{V} \equiv \mu \phi \equiv \mu \left[-\frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V})^2 + 2(\mathbf{S} : \mathbf{S}) \right] \geq 0$$

- Os dois outros termos referem-se a calor por condução e a geração de energia interna.

a função dissipação para coordenadas cartesianas, veja mais detalhes na brochura 'Forma Dif. Eq. Transporte'.

$$\phi = -\frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V})^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right]$$

Equação de Transporte da Energia Interna, $\hat{u}$

- Substituindo as equações constitutivas para o tensor desvio da tensão e da condução vamos ter:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T - P \nabla \cdot \vec{V} + \mu \phi + q'''$$

- $D\hat{u}/Dt$ é o transporte de energia interna;
- $\nabla \mathbf{k} \nabla T$ é fluxo calor líquido por condução na S.C.;
- $-P \nabla \cdot V$ é trabalho de compressão, fluidos compr.;
- ϕ é a função dissipação, converte trabalho de deformação em energia interna (veja próx slide);
- q''' representa geração volumétrica de energia dentro do volume (reação química, radiação outras fontes)

A Função Dissipação, ϕ

- O trabalho realizado pelas tensões para ‘deformar’ o fluido converte ‘energia mecânica’ do escoamento em ‘energia térmica’.
- O nome dissipação sugere que em mecânica ‘dissipada’ em térmica, portanto é um termo que introduz irreversibilidades no escoamento.
- Para um fluido Newtoniano ela é definida:

$$\mathbf{T}' : \nabla \vec{V} \equiv \mu \phi \equiv \mu \left[-\frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V})^2 + 2(\mathbf{S} : \mathbf{S}) \right] \geq 0$$

- ou em notação indicial:

$$\phi \equiv \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \geq 0$$

- ϕ é a função dissipação, sempre positiva para atender 2ª lei.

a função dissipação para coordenadas cartesianas, veja mais detalhes na brochura ‘Forma Dif. Eq. Transporte’.

$$\phi = -\frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V})^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right]$$

- O termo do trabalho de pressão pode ser re-escrito em função da equação da massa:

$$-P \nabla \cdot \vec{V} = -P \left(\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) \equiv \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) - \frac{DP}{Dt}$$

- Substituindo a definição: $h = \hat{u} + P/\rho$ na equação de $\hat{u}$, chega-se a forma *não-conservativa* da Equação de Transporte da Entalpia:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T + \frac{DP}{Dt} + \mu \phi + q'''$$

- ou a sua *forma conservativa*:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} h) = \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T + \frac{DP}{Dt} + \mu \phi + q'''$$

Equação Transporte da Entalpia Total, h_0

- A entalpia específica e a entalpia total de um fluido compressível são definidas por:

$$h = \hat{u} + P/\rho \quad \text{e} \quad h_0 = h + (1/2) \cdot (\vec{V} \cdot \vec{V})$$

- Somando à equação da entalpia a energia cinética:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu\phi + \nabla \cdot k\nabla T + q'''$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} (\vec{V} \cdot \vec{V}) \right] = -\vec{V} \cdot \nabla P + \vec{V} \cdot \nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \mathbf{S} \right) + \rho \vec{V} \cdot \vec{g}$$

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \mathbf{S} \right)}_{\text{Termos Viscosos}} + \mu\phi + \nabla \cdot k\nabla T + q''' + \rho \vec{V} \cdot \vec{g}$$

Equação Transporte da Entalpia Total, h_0

- Em geral a entalpia total é empregada para escoamentos compressíveis onde o termo de trabalho das forças de campo é desprezível, neste caso:

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \mathbf{S} \right)}_{\text{Termos Viscosos}} + \mu \phi + \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T + q'''$$

- Para tornar sua representação mais compacta é freqüente agrupar os termos viscosos num único operador:

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla \cdot (\mathbf{T}' \cdot \vec{V})}_{\text{Termos Viscosos}} + \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T + q'''$$

Equação de Transporte da Temperatura

- A partir da Equação de transporte da Entalpia e da relação termodinâmica para uma substância pura:

$$dh = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_P + \left. \frac{\partial h}{\partial P} \right|_T \equiv C_p dT + \frac{(1 - T\beta)}{\rho} dP$$

- onde β é o coef expansão volumétrica, $\beta = -\left(\frac{1}{\rho}\right)\left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_P$
- Pode-se mostrar que a forma não-conservativa da Equação de Transporte para Temperatura é:

$$\rho C_P \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \phi + q'''$$

- e a sua forma conservativa:

$$C_P \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + C_P \nabla \cdot (\rho \vec{V} T) = \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla T) + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \phi + q'''$$

Equação de Transporte da Entropia

- A equação de transporte de S é:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \nabla \cdot \frac{k \nabla T}{T} + \frac{q'''}{T} + P_s$$

- o termo de produção, O_s , é determinado a partir da relação termodinâmica para uma substância pura:

$$dh = Tds + \frac{dP}{\rho} \quad \rightarrow \quad \frac{Dh}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{DP}{Dt}$$

- substituindo as eqs. para h e s na relação acima vamos encontrar:

$$P_s = \frac{k(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{\mu \phi}{T} \geq 0$$

- As irreversibilidades estão associadas a uma troca térmica com diferença de temperatura ou ao trabalho viscoso realizado pelo fluido
-

Notas Finais Parte IV

- Estas são as formas finais de algumas das equações de transporte.
- Há diversas outras que não foram abordadas neste aula, entre elas: transporte de um escalar, transporte de energia cinética e transporte de vorticidade.
- As duas últimas estão na brochura anexa para referência.
- O desafio da próxima aula será simplificar algumas equações e procurar expressá-las numa única Equação Geral de Transporte.

Referências

- [1] White, F.M.; **"Viscous Fluid Flow"**, McGraw Hill (1974)
- [2] Moore, F.K.; **"Theory of Laminar Flows"**, Princeton Un. Press (1964)
- [3] Rosenhead, L.; **"Laminar Boundary Layers"**, Oxford (1963)
- [4] Warsi, Z.U.A., **"Fluid Dynamics: Theoretical and Computational Approaches"**, CRC (1993)
- [5] Panton, R. **"Incompressible Flow"**, John Wiley (1984)
- [6] Tennekes, H. and Lumley, J.L., **"A First Course in Turbulence"**, MIT Press, 1972,
- [7] Reynolds W.C. and Perkins, H.C., **"Engineering Thermodynamics"**, Mc Graw Hill, (1977)
- [8] Hinze, J.O., **"Turbulence"**, McGraw Hill, (1959)
- [9] Townsend, A.A., **"The Structure of Turbulent Shear Flow"**, Cambridge Un. Press, 2nd ed., (1976).
- [10] Wilcox, D.C., **"Turbulence Modeling for CFD"**, 2nd ed., DCW Industries, (1998).
- [11] Astarita, G. and Marrucci, G., **"Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics"**, McGraw Hill(1974)

FIM