AULA 2

1. Formulação Geral Equações de Transporte.
2. Classificação das Equações Diferenciais Parciais de 2ª ordem

Parte I

Formulação Geral das Equações de Transporte

Preliminares

- Na aula 1 foram vistas alguns tipos de Equações de Transporte.
- O desafio desta aula é colocar as equações vistas, e outras que serão apresentadas, numa única forma geral capaz de representar qualquer uma delas.
- A vantagem da representação geral permite que um único Solver possa tratar cada Equação isoladamente ou resolvê-las simultaneamente.
- A abordagem realizada neste tópico será baseada nas práticas empregadas pelo PHOENICS

Forma Geral das Equações de Transporte

- O método dos volumes finitos parte da forma conservativa das Eq. Transporte. Considere uma variável escalar ϕ genérica:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho\vec{\mathbf{V}}\varphi - \Gamma\nabla\varphi\right) = \mathbf{S}$$

- onde Γ é o coeficiente difusivo definido por:

$$\Gamma = \left(\frac{\rho \cdot \nu_L}{\mathbf{Pr_L}} + \frac{\rho \cdot \nu_T}{\mathbf{Pr_T}}\right)$$

- O fonte S tem natureza diversa:
  - i) representam as condições de contorno do fenômeno;
  - ii) modelam a ação de forças ou energia de novos mecanismos físicos ou ;
  - iii) representam todos os outros termos da eq. particular que se quer representar e que não são representados pelo lado esquerdo da equação!

O Coeficiente Difusivo, Γ

- O coeficiente difusivo Γ no PHOENICS tem um papel central no modelo:

$$\Gamma = \left(\frac{\rho \cdot \nu_L}{Pr_L} + \frac{\rho \cdot \nu_T}{Pr_T} \right)$$

- Ele representa a contribuição do transporte 'laminar' e 'turbulento' da modelagem, sub-índices L e T, respectivamente.
- O coeficiente de difusão de qualquer fenômeno é representado pelo produto da densidade e da viscosidade cinemática divido pelo parâmetro Pr que está associado a uma variável.
- O significado de Pr será explorado ao longo de exemplos nesta aula.

Equações Auxiliares

Para modelar um fenômeno é frequente a utilização de equações auxiliares para definir:

- ***Prop Termodinâmica.:*** densidade, entalpia, etc
- ***Prop Transporte:*** viscosidade, difusividade, condutividade, etc
- ***Termos Fonte:*** leis de cinética química, dissipação viscosa, Coriolis, absorção de radiação, etc
- ***Termos ´artificiais´:*** falso transiente para relaxação e condições de contorno

Todos os termos dependem de uma ou mais das variáveis e/ou das equações auxiliares. A medida que um número maior destas equações auxiliares se faz necessário, ele causa um aumento no ´grau´ de não-linearidade do sistema.

Natureza dos Termos

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\varphi - \Gamma\nabla\varphi\right) = S$$

- A equação geral possui três termos no lado esquerdo: transiente, convectivo e difusivo.
- Nem todos fenômenos de transporte requerem a existência simultânea destes termos. O comando TERMS no grupo 8 permite a ativação ou não de cada um deles:

Group 8. Terms & Devices

```
* Y in TERMS argument list denotes:
* 1-built-in source 2-convection 3-diffusion 4-transient
* 5-first phase variable 6-interphase transport
TERMS (P1  ,Y,Y,Y,N,Y,N)
TERMS (U1  ,Y,Y,Y,Y,Y,N)
TERMS (V1  ,Y,Y,Y,Y,Y,N)
```


- A seqüência desta parte I da aula 2 será a representação de alguns tipos de Equação de Transporte na forma geral identificando seus termos fontes.
- Serão representadas as Equações de
  - Massa
  - Q. Movimento
  - Energia
  - Concentração
  - Miscelânia
- Para facilitar a representação será adotado o sistema cartesiano e a notação indicial.
- Um paralelo com a prática do PHOENICS será realizado onde for possível.

Notação Indicial Eq. Geral de Transporte

- **A Eq. de Transporte em Notação vetorial**

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho\vec{V}\varphi - \Gamma\nabla\varphi\right) = S$$

- **também pode ser representada em notação indicial pelos operadores**

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left(\rho V_j\varphi - \Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = S$$

- **onde j pode variar de 1 a 3 representando cada uma das direções ortogonais.**

- **φ é uma variável escalar genérica e**

Eq Diferencial da Massa

- **Fazendo φ = 1, Γ = 0 e S = 0, chega-se a forma da Equação da Conservação da Massa:**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho V_j\right) = 0$$

- **Note que para fluidos incompressíveis, isto é, ρ constante, a forma geral também satisfaz pq o termo transiente deixa de existir e ela se reduz para:**

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(V_j\right) = 0$$

Eq de Navier Stokes

- A Equação de NS *<u>não é uma equação escalar</u>* mas vetorial. Esta é uma das dificuldades que a forma geral da equação de transporte encontra.
- Ela é superada tratando cada componente da Eq. NS como uma equação de um escalar.
- A estratégia é: colocar os termos que forem possíveis das Eq. NS para cada componente na forma da Eq. Geral de Transporte (escalar) e, aqueles que não se ajustarem entram como termo fonte.

Eq de Navier Stokes

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = -\nabla P + \nabla\cdot\left[-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\,\mathbf{S}\right] + \rho\vec{g}$$

- A componente i é:

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\cdot(\rho V_j V_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[P + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\right] + \rho g_i$$

- onde i e j podem variar de 1 a 3 representando cada uma das direções ortogonais.
- Cada componente é gerada fixando um i e somando as variações de j,
- O próximo slide traz como exemplo a componente na direção X;

Eq de Navier Stokes, dir. X

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\rho V_j V_i\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[P+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\right]+\rho g_i$$

- Assumindo que os índices 1,2 3 representam as direções ortogonais X, Y e Z e que por sua vez estão associadas às velocidades U, V e W, então a equação para direção x é:

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial X}\cdot(\rho UU)+\frac{\partial}{\partial Y}\cdot(\rho VU)+\frac{\partial}{\partial Z}\cdot(\rho WU)=$$
$$-\frac{\partial}{\partial X}\left[P+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial X}\cdot\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial U}{\partial X}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial Y}\cdot\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial Y}+\frac{\partial V}{\partial X}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial Z}\cdot\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial Z}+\frac{\partial W}{\partial X}\right)\right]$$
$$+\rho g_x$$

Equação de NS

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\rho V_j V_i\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[P+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\right]+\rho g_i$$

- Pode-se perceber que a forma da equação de NS ainda está longe de se ajustar a forma geral:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\rho V_j\varphi-\Gamma\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)=S$$

- Rearranjando os termos viscosos podemos re-escrever as componentes de NS como:

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\rho V_j V_i-\rho\nu\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left[\mu\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right]+\rho g_i$$

Eq de NS: compressível e μ variável

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left(\rho V_j V_i - \rho \nu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left[\mu \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right] + \rho g_i$$

- **A representação de NS atende à forma geral e é válida para um escoamento em *regime laminar*, compressível ou incompressível, e viscosidade variável (função da Temp. ou S) ou constante.**
- **O lado direito da equação traz os termos fonte:**
  - **Pressão, Sp**
  - **Compressível, Sc**
  - **Viscoso, Sμ**
  - **Força de Campo, Sg**

---

*Note que a viscosidade do fluido pode variar com a temperatura ou também com o módulo do tensor **S** no caso de fluidos não Newtonianos Generalizados (power law fluids)*

Eq de NS: incompressível e μ variável

- **Para escoamentos incompressíveis, ∇V=0 portanto a eq. NS pode ser simplificada e um termo fonte é eliminado.**
- **Desejamos manter ainda a possibilidade de viscosidade variável (T ou S)**

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left(\rho V_j V_i - \rho \nu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left[\mu \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right] + \rho g_i$$

- **O lado direito da equação traz os termos fonte:**
  - **Pressão, Sp**
  - **Viscoso, Sμ**
  - **Força de Campo, Sg**

Eq de NS: incompressível e μ cte.

- Se a viscosidade é constante, o termo fonte viscoso, S_μ é nulo:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left[\mu\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right]\equiv\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\underbrace{\left[\frac{\partial V_j}{\partial x_j}\right]}_{\nabla\cdot\vec{V}=0}\equiv 0$$

- Neste caso a Eq. NS assume sua forma mais simples, com dois termos fonte: pressão e força de campo.

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\rho V_j V_i-\rho\nu\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho g_i$$

- O termo de campo é relevante somente para escoamentos com superfície livre; escoamentos internos ele pode ser incorporado ao termo de pressão: $P^* = P - \rho g z$.

Eq de NS – Regime Turbulento

- Considerando que a eq. NS representa o campo médio de velocidades, surge um termo extra de tensão (tensões de Reynolds) devido a presença dos turbilhões.
- O tensor das tensões para um fluido Newtoniano, incompressível com μ constante é:

$$T_{ij}=-P\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)-\rho\overline{v'_i v'_j}\equiv-P\delta_{ij}+(\mu+\mu_T)\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

- e a equação de transporte passa a ser

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\rho V_j V_i-(\rho\nu+\rho\nu_T)\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho g_i$$

- onde ν_T é a viscosidade cinemática turbulenta obtida por meio de modelos de turbulência

Termos Extras

- A análise até o momento foi realizada num tensor cartesiano. Para outros sistemas de coordenadas surgem termos associados a inércia e à viscosidade.
- Exemplo:, sistema cilíndrico-polar com axi-simetria para um fluido com propriedades constantes

$$\theta \leftrightarrow X \rightarrow \frac{\partial}{\partial Z}\left[\rho WU - \mu\frac{\partial U}{\partial Z}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\rho VU - \mu\frac{\partial U}{\partial Y}\right] = 0$$

$$R \leftrightarrow Y \rightarrow \frac{\partial}{\partial Z}\left[\rho WV - \mu\frac{\partial V}{\partial Z}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\rho VV - \mu\frac{\partial V}{\partial Y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial Y} - \mu\frac{V}{Y^2} + \rho\frac{U^2}{Y}$$

$$Z \leftrightarrow Z \rightarrow \frac{\partial}{\partial Z}\left[\rho WW - \mu\frac{\partial W}{\partial Z}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\rho VW - \mu\frac{\partial W}{\partial Y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial Z}$$

- (θ,R,Z) correspondendo a (X, Y,Z)

Eq. Geral NS e seus Termos Fontes

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\rho V_j V_i - \Gamma\frac{\partial}{\partial x_j}V_i\right) = S_P + S_C + S_\mu + \rho g_i$$

	V_i	S
Q. Mov. X	U	$-\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial X}(\mu\nabla\cdot\vec{V}) + \frac{\partial}{\partial X}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial X}\right) + \rho g_X$
Q. Mov. Y	V	$-\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial Y}(\mu\nabla\cdot\vec{V}) + \frac{\partial}{\partial X}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial Y}\right) + \rho g_X$
Q. Mov. Z	W	$-\frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial Z}(\mu\nabla\cdot\vec{V}) + \frac{\partial}{\partial X}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial Z}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial Z}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial Z}\right) + \rho g_X$

Representação válida somente para coordenadas cartesianas

Eq. Geral NS e Implementação PHOENICS

- **O PHOENICS já possui implementado três termos fontes para eq. NS : pressão, centrífugo e Coriolis. Todos os outros o usuário terá que inserir.**

Compressivel?		Viscosidade		Regime		$S\varphi$	
Comp	Incomp	μ cte	μ var	Lam	Turb	Phoe	User
X			X	X		S_P	S_C+S_μ
X		X		X		S_P	S_C
	X		X	X		S_P	S_μ
	X	X		X		S_P	-
	X	X			X	S_P	-

Sistemas de coord. cartesiano e cilíndrico-polar requerem termo fonte viscoso que deverá ser implementado pelo usuário.

Eq. Geral NS e Implementação PHOENICS

- **Os efeitos de compressibilidades não são sentidos até Ma ~0.3. Em geral o termo $2/3\mu\nabla.V$ é pequeno e pode ser desprezado na maioria das aplicações, exceção pode ocorrer na presença de choques.**
- **O termo fonte viscoso se faz sentir para dois casos: quando μ varia com a temperatura e também para simulações com fluidos não-Newtonianos.**

1. **A variação de μ com T '*pode ser lenta*' e fazer com que o termo $S\mu$ seja desprezível. Ele de fato é para Escoamentos em Camada Limites.**
2. **Fluidos não-Newtonianos tem a viscosidade dependente da deformação e o termo S_μ não pode ser desprezado. O manual do PHOENICS não é claro sobre a prática adotada, vale a pena investigar mais...**

Eq de Transporte da Entalpia, h

- A Equação de Transporte da Entalpia é de natureza escalar.

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot(\rho V_i h)=\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{DP}{Dt}+\mu\phi+q'''$$

- A estratégia é: colocar os termos que forem possíveis da equação na forma da Eq. Geral de Transporte (escalar)

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\rho V_j\varphi-\Gamma\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)=S$$

- e, aqueles que não se ajustarem entram como termo fonte.

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Eq de Transporte da Entalpia, h

- A primeira dificuldade encontrada é que o termo difusivo não depende da entalpia, mas da temperatura.
- Para uma substância simples,

$$h=h(P,T)\rightarrow dh=\left.\frac{\partial h}{\partial T}\right|_P dT+\left.\frac{\partial h}{\partial P}\right|_T dP$$

$$dh=C_P dT+\frac{(1-T\beta)}{\rho}dP;\quad \beta=\rho\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_P\ \left(\begin{array}{c}\text{coef compress.}\\ \text{isobárica}\end{array}\right)$$

- Para líquidos, h = h(T) e portanto dh = CdT
- Para gases ideais, b = 1/T, portanto dh = CpdT
- Para gases reais, h = h(P,T) mas para eq. Energia adota-se a aproximação: **dh = CpdT**

Eq de Transporte da Entalpia, h

- Pode-se expressar a temperatura em função da entalpia no termo difusivo da equação:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = C_P \frac{\partial T}{\partial x_i} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{C_P} \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

- Assim chega-se a forma geral da eq. transporte,

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\rho V_i h - \frac{k}{C_P} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) = \frac{DP}{Dt} + \mu\phi + q'''$$

- O lado direito da equação traz os termos fonte:
  - Trabalho de Pressão, Sp
  - Dissipação viscosa, $\mu\phi$
  - Fonte volumétrica de energia, q’’’

- A eq. é válida para escoamentos compressíveis ou incompressíveis e propriedades variáveis.

Eq de Transporte da Entalpia, h

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

- Para ajustar-se a prática do PHOENICS ainda é necessário definir o coeficiente difusivo, Γ:

$$\Gamma = \frac{\rho \nu}{Pr(h)} \equiv \frac{k}{C_P} \rightarrow Pr(h) = \frac{C_P \mu}{k} \equiv \frac{\nu}{\alpha}$$

- Neste caso o Pr(h) é o próprio N. Prandtl do fluido,

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\rho V_i h - \frac{\rho \nu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) = \frac{DP}{Dt} + \mu\phi + q'''$$

Eq Transporte <u>Turbulento</u> da Entalpia, h

- O fluxo turbulento de energia é proporcional ao gradiente do campo médio de temperatura (hipótese de Boussinesq):

$$\left(q''_T\right)_i = -\rho C_P \left(\frac{\nu_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

- Ele pode ser diretamente incorporado ao termo difusivo da eq. da entalpia :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(\rho V_i h - \left(\frac{\rho\nu}{Pr} + \frac{\rho\nu_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) = \frac{DP}{Dt} + \mu\phi + q'''$$

  - Pr_T é o n. Prandtl turbulento, Pr_T ~0.9.

Eq de Transporte da Entalpia, h

- A equação de transporte de entalpia se ajusta bem a forma geral da equação de transporte. Há porém um inconveniente em sua aplicação: definição de condição de contorno em paredes.

- Em geral se conhece nas paredes sua temperatura e não sua 'entalpia', neste caso os contornos onde estão especificados temperatura terão que ser multiplicados por Cp.

- Para superar este inconveniente foi desenvolvida a equação para transporte da Temperatura!

Eq de Transporte da Temperatura

- A Equação de transporte da Temperatura,

$$C_P \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + C_P \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (\rho V_i T) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu\phi + q'''$$

- tem o calor específico multiplicando seu lado esquerdo. Isto causa um problema para expressá-la na forma geral da eq. de transporte.
- Dividindo ambos os lados por C_p,

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (\rho \vec{V} T) = \frac{1}{C_P} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\beta T}{C_P} \frac{DP}{Dt} + \frac{\mu\phi}{C_P} + \frac{q'''}{C_P}$$

- ainda não é suficiente. Para forçar a forma geral um novo fonte aparece:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\rho V_i T - \frac{k}{C_P} \nabla T \right) = + \frac{\beta T}{C_P} \frac{DP}{Dt} + \frac{\mu\phi}{C_P} + \frac{q'''}{C_P} - \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{C_p} \right)$$

Eq de Transporte da Temperatura

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

- No entanto, se considerarmos ***Cp constante*** ou que o novo termo fonte associado a variação de Cp seja muito pequeno em relação aos demais,
- A equação de transporte para temperatura simplifica-se para:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\rho V_i T - \frac{k}{C_P} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = + \frac{\beta T}{C_P} \frac{DP}{Dt} + \frac{\mu\phi}{C_P} + \frac{q'''}{C_P}$$

Eq de Transporte da Temperatura

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(\rho V_i T-\left(\frac{\rho\nu}{Pr}+\frac{\rho\nu_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)=+\frac{\beta T}{C_P}\frac{DP}{Dt}+\frac{\mu\phi}{C_P}+\frac{q'''}{C_P}$$

- **O lado direito da equação traz os termos fonte:**
  - **Trabalho de Pressão, Sp**
  - **Dissipação viscosa, $\mu\phi/C_p$**
  - **Fonte volumétrica de energia, q'''/C_p**

- **A eq. é válida para escoamentos compressíveis ou incompressíveis, transporte de calor em regime laminar ou turbulento e propriedades variáveis, *exceto o calor específico, C_p*.**

Eq Transporte Entalpia Total, h_0

- **A eq. Transporte da entalpia total é**

$$\frac{\partial\rho h_0}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho V_i h_0\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial P}{\partial t}+V_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{2}{3}\mu\frac{\partial V_j}{\partial x_j}+2\mu\,\mathbf{S}_{ij}\right)+\mu\phi+q'''$$

- **mas** $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k}{Cp}\frac{\partial h_0}{\partial x_i}-\frac{k}{Cp}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right)}{\partial x_i}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k}{Cp}\frac{\partial h_0}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k}{Cp}\frac{\partial K}{\partial x_i}\right)$

$$\frac{\partial\rho h_0}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho V_i h_0-\left(\frac{\rho\nu}{Pr}+\frac{\rho\nu}{Pr_t}\right)\frac{\partial h_0}{\partial x_i}\right)=$$

$$\underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}+V_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{2}{3}\mu\frac{\partial V_j}{\partial x_j}+2\mu\,\mathbf{S}_{ij}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k}{Cp}\frac{\partial K}{\partial x_i}\right)+\mu\phi+q'''}_{S_{h0}}$$

Eq Transporte Espécies (escalar)

- A equação de transporte para o ***componente ou espécie*** química 'm' de uma mistura é:

$$\frac{\partial(\rho w_m)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(\rho V_i w_m - \left(\frac{\rho\nu}{Pr_m} + \frac{\rho\nu_t}{Pr_{tm}}\right)\frac{\partial w_m}{\partial x_i}\right) = \Psi_m$$

- Onde w_m é a concentração mássica da espécie m
- A variável Pr_m é $\mu/\rho D$, também conhecida como n. de Schmidt, Scm
- A variável Pr_{tm} é o correspondente Sc do transporte turbulento
- e Ψm representa a geração (+) ou extinção (-) da espécie m por reação química, Ψm tem unidade de $kg_m/(s.m^3)$.

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Eq Transporte para Modelo k-ε

Dentre os modelos de turbulência, o modelo k-ε é um dos mais populares. Para referência as eqs de transporte para k e ε são mostradas na forma geral,

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho V_i k - \left(\rho\nu + \frac{\rho\nu_T}{\sigma_K}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) = P_k - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho V_i \varepsilon - \left(\rho\nu + \frac{\rho\nu_T}{\sigma_K}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right) = C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P_k - C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon^2}{k}$$

O termo de produção, P_k, é determinado por:

$$P_k = \overline{u_i' u_j'}\cdot\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \nu_T\underbrace{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\text{Hipótese Bousinesq}} \equiv \nu_T\phi$$

e a viscosidade turbulenta:

$$\nu_T = C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}$$

Eq. Geral Escalar e Termos Fontes

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left(\rho V_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = S \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \Gamma = \left(\frac{\rho\nu}{Pr} + \frac{\rho\nu_T}{Pr_T}\right) \\ \varphi = h, T, h_0, w_m, k \text{ e } \varepsilon \end{cases}$$

φ	Pr	S
h	$Pr_h = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k}$	$\left(\frac{\partial P}{\partial t} + V_i \frac{\partial P}{\partial x_i}\right) + \mu\phi + q'''$
T	$Pr_T = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k}$	$+\frac{\beta T}{C_P}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + V_i \frac{\partial P}{\partial x_i}\right) + \frac{\mu\phi}{C_P} + \frac{q'''}{C_P} - \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{C_P}\right)$
h_0	$Pr_{h0} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k}$	$\frac{\partial P}{\partial t} + V_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{2}{3}\mu \frac{\partial V_j}{\partial x_j} + 2\mu \mathbf{s}_{ij}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k}{Cp}\frac{\partial K}{\partial x_j}\right) + \mu\phi + q'''$
w_m	$Pr_w = \frac{\nu}{D} = Sc$	Ψ_m
k	$Pr_k = 1$	$P_k - \varepsilon$
ε	$Pr_\varepsilon = 1$	$C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P_k - C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon^2}{k}$

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Eq. Geral Escalar e Implementação PHOENICS

- **O PHOENICS já possui implementado dois termos fontes para eq. entalpia : o trabalho de pressão e o termo de dissipação de energia mecânica em energia térmica .**
- **Estes dois termos fontes são aqueles que a eq. H1 necessita, note porém que GXGENK – dissipação en. Mecânica não inclui a parcela compressível.**
- **O PHOENICS não possui termo fonte 'implementado' para nenhuma outra forma da equação da energia (TEM1 ou h_0) pelo menos é o que o manual diz.**
- **O PHOENICS não emprega a forma geral da equação de transporte quando resolve temperatura, *mas ele também não informa como ele implementa*.**
- **Os termos fontes para modelo k-ε são implementados ao ativar o modelo no PHOENICS**

Notas Finais da Parte I

- Até o momento vimos que as equações de transporte podem ser representadas, de forma genérica como:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho\vec{V}\varphi - \Gamma\nabla\varphi\right) = S$$

- Nem todos os fenômenos físicos que elas podem modelar requerem que todos os seus termos estejam presentes.
- A supressão dos termos: transiente, convectivo ou difusivo muda o comportamento da equação e seus requerimentos de condições de contorno.
- Para melhor entender este comportamento é necessário classificar as EDP, assunto de nosso próximo tópico.

Parte II

Classificação das Equações Diferenciais

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Condições Iniciais e de Contorno

• A definição da Eq. Geral de Transporte

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho\vec{V}\varphi - \Gamma\nabla\varphi\right) = S$$

não é completa a menos que sejam definidas as C.I. e C.C. do fenômeno que ela representa.

• As C.I. e C.C. variam dependendo do tipo de equação diferencial que o modelo emprega.

• A distinção é feita baseando-se no modo como a *informação do contorno é transportada para o domínio*.

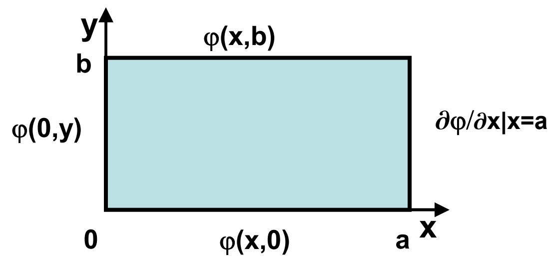
Nota Introdutória

- **A forma geral da Eq. de Transporte é complexa para iniciarmos nosso estudo.**
- **Vamos começar estudando três ‘simples’ EDP lineares e sua dependência com relação a informação do contorno.**
- **Elas são:**
  - **Equação da condução em regime permanente** → $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$
  - **Equação da difusão em regime transiente** → $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$
  - **Equação da onda** → $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$

Eq de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

- **Este tipo de equação possui derivadas de 2ª ordem para cada direção, portanto ela necessita de duas c.c. para direção x e outras duas para direção y!**

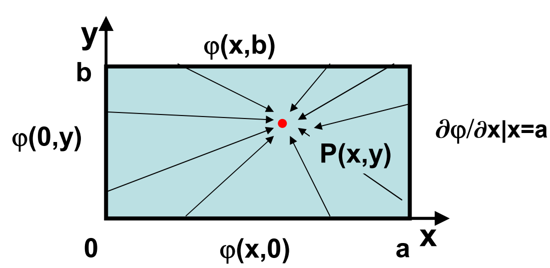


- **Pode-se generalizar que φ é determinado pela informação de TODO o contorno.**

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Eq de Laplace: modelo ELIPTICO,

- **Qualquer 'perturbação' introduzida no contorno influencia o valor de TODOS os pontos do domínio, entretanto tanto menor será a influência num ponto P quanto maior for sua distância da perturbação.**

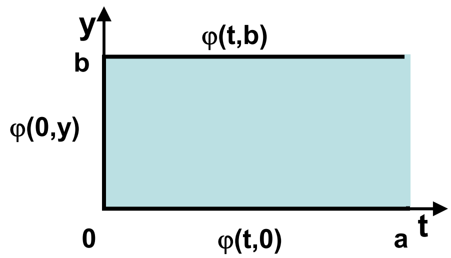


- **A informação do contorno se propaga em TODAS as direções instantâneamente, i.e. velocidade 'infinita.**
- **Por sua vez, uma pertubação em P irá influenciar o domínio à montante e a jusante de P.**
- **Esta equação é classificada como ELIPTICA**

Eq Condução Transiente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

- Esta EDP é de 1ª ordem no tempo e 2ª ordem no espaço, portanto ela poderá satisfazer uma única C.I. e duas C.C. na direção Y

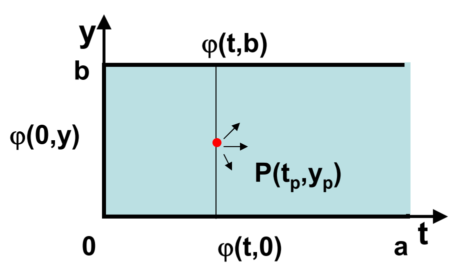


- Como a EDP só satisfaz uma CI, o domínio é aberto no eixo do tempo! Não se especifica C.C. na outra fronteira.
- A informação no eixo T caminha numa única direção enquanto que no eixo Y caminha nas duas direções

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Eq. Condução Transiente: modelo PARABÓLICO

- A solução desta EDP marcha para frente no tempo mas é ‘difusa’ no espaço.
- Introduzindo uma perturbação em P, ela só influenciará parte do domínio computacional onde $t > t_P$



- A pertubação em P **NÃO** influencia valores de φ para $t < t_p$
- As EDP com este comportamento são classificadas como **PARABÓLICAS**.

Eq Onda:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

- Esta EDP é de 2ª ordem no tempo e no espaço, portanto ela requer duas C.I. e duas C.C. no espaço.
- Uma corda vibrando presa em duas extremidades.
  - *CI: $\varphi(x,0)=sen(\pi x)$, $\partial\varphi/\partial t(x,0)=0$; & CC: $\varphi(0,t)= \varphi(1,t)=0$,*
  - *Solução exata: $\varphi(x,t)=0.5[sen(\pi x+\pi t)+ sen(\pi x-\pi t)]$*
- A solução geral deste tipo de equação é:

$$\varphi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

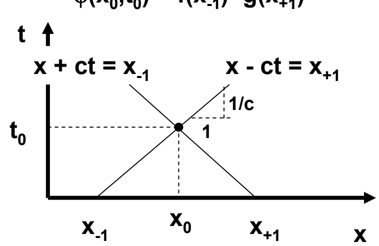
- As funções f e g sempre satisfazem a equação da onda!
- Note que o argumento de f e de g o espaço e o tempo estão relacionados de forma que se caminharmos numa ***linha característica*** $dx/dt = \pm c$ seus valores serão constantes. .

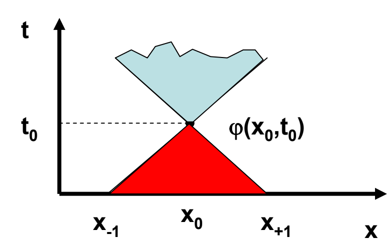
Eq Onda: modelo HIPERBÓLICO

- A CI é definida quando t = 0:

$$\varphi(x,0) = f(x) + g(x) \quad e \quad \partial\varphi/\partial t\big|_{t=0} = 0$$

$\varphi(x_0,t_0) = f(x_{-1})+g(x_{+1})$



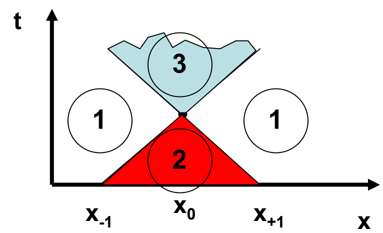


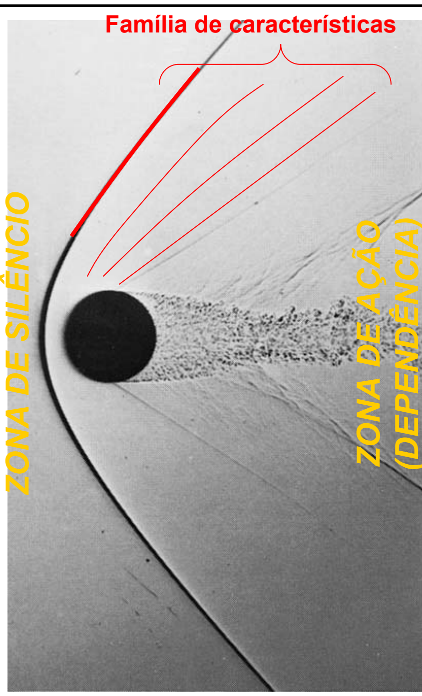
- O valor de $\varphi(x_0,t_0)$ depende somente da região vermelha;
- Por outro lado, $\varphi(x_0,t_0)$ influencia o valor de φ na região azul.

Regiões do Domínio

- Como um contorno do domínio influencia somente uma região do domínio costuma-se dividí-lo em regiões:

1. Zona de Silêncio
2. Zona de Dependência
3. Zona de Influência





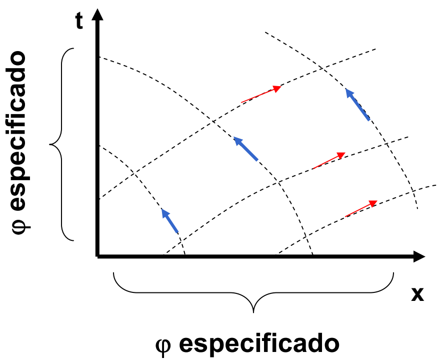
Curva Característica

Definida com família de superfícies ou curvas onde certas propriedades permanecem constante ou certas derivadas podem se tornar descontínuas.

A shock wave is observed in front of a sphere at M = 1.53. (photograph by A.C. Charters.)

Curva Característica & Contorno

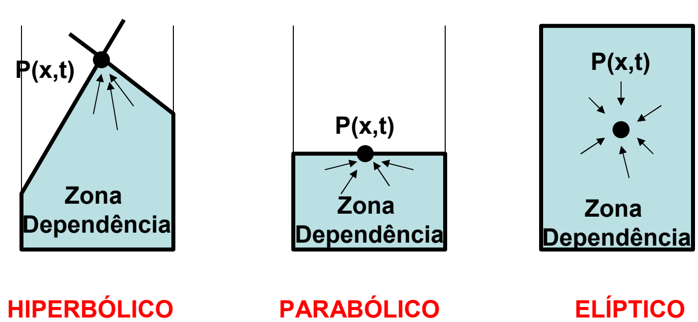
- A informação se propaga do contorno para o domínio ao longo de linhas características com velocidade c (variável ou constante).
- A informação do contorno (CI ou CC) ***não pode coincidir*** com uma curva característica.



FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

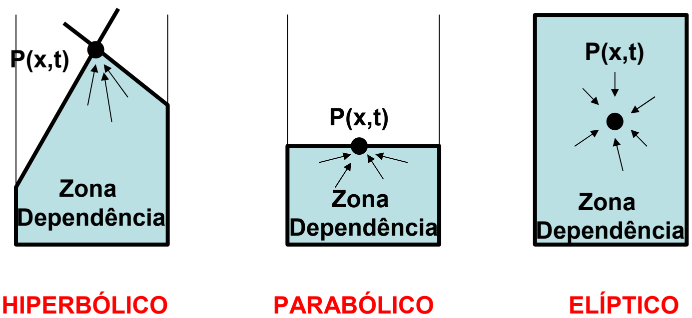
Sumário

- A forma como a variação em um ponto influi nos eventos dos pontos vizinhos depende se a EDP é elíptica, parabólica ou hiperbólica.
- Diversos fenômenos físicos se enquadram nestas categorias e eles dependem se o regime é permanente ou transitório, se a propagação das perturbações é finita ou infinita!



Sumário

- A informação do contorno 'sempre' propaga-se a **jusante** *(downstream)* nas EDP parabólicas e hiperbólicas.
- Esta característica faz com que as EDP parabólicas e hiperbólicas sejam resolvidas por ***métodos que 'marcham'*** a jusante. As EDP elípticas, que recebem a influência de todo o contorno, são resolvidas por ***métodos de 'equilíbrio'.***



FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Método de Classificação para Simples EDP

- A classificação de uma EDP 2ª ordem é baseada no comportamento dos seus termos de ordem 2:

$$A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \underbrace{D\frac{\partial\varphi}{\partial x} + E\frac{\partial\varphi}{\partial y} + F\varphi + G}_{H} = 0$$

- A classe da EDP 2ª ordem é identificada procurando-se curvas características de eq. hiperbólicas. Se elas existirem ela é hiperbólica, do contrário ela pode ser elíptica ou parabólica.
- Isto é realizado forçando uma busca para equação homogênea por meio de uma combinação linear dos termos.

Método de Classificação para Simples EDP

- Soluções simples do *'tipo eq. da onda'* existem se a equação característica tiver duas raízes reais:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0$$

B^2-4AC	Tipo	Características
>0	Hiperbólica	2 características reais
=0	Parabólica	1 características real
<0	Eliptica	Sem caract. reais (2 Imaginárias)

Eq Protótipos

- Equação de Laplace:
  - A =1, B =0 e C = 1; B^2 - 4AC = -4 < 0 portanto Elíptica, dy/dx = ± i,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

- Equação de calor transiente;
  - A = 1, B = C = 0; B^2 - 4AC = 0 portanto Parabólica, dy/dt = 0

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

- Equação da onda:
  - A = 1, B = 0 e C = c^2; B^2 - 4AC = ± c portanto Hiperbólica, dx/dt = ± c

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

Eq. Burgers Completa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- É uma EDP não-linear do tipo convecção-difusão utilizada para modelar eq. Q. Movimento x para modelos numéricos;
- A omissão do termo udu/dx a reduz para a equação da difusão ou 1º prob. Stokes;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Também pode representar a equação linear da energia em termos da temperatura;

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

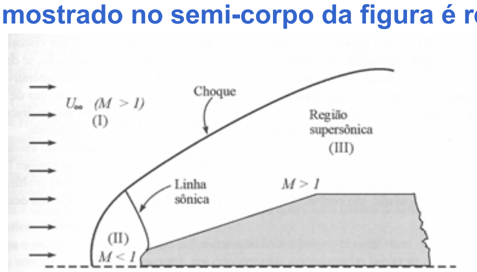
- Os coef. da Eq. Burgers são A = 1, B = C = 0; B^2 - 4AC = 0 portanto Parabólica,.

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Os Coeficientes A, B e C da EDP

• Os coef. A, B e C não necessariamente são constantes, mas podem ser dependentes das propriedades do fluido ou mesmo da própria variável que se está resolvendo.

• Por exemplo, o escoamento potencial de um fluido compressível mostrado no semi-corpo da figura é representado pela equação:



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{\left(M^2 - 1\right)}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

• Ele contêm regiões super-sônicas M>1 e também regiões sub-sônicas M<1. Note que nas regiões onde M>1 a equação é hiperbólica enquanto que onde M < 1 ela é elíptica.

• Conseqüentemente será necessário mudar o método de aproximar, numericamente, as equações para adequar a natureza local do escoamento!

Sistema de Equações

- As equações de transporte freqüentemente são empregadas na forma de um sistema ao invés de isoladamente.
- A seguir será apresentado uma classificação para um sistema de EDP de 1ª ordem com **DUAS** *variáveis independentes: (x,y) ou (t,x)*.

$$A_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial v}{\partial x} + B_{11}\frac{\partial u}{\partial y} + B_{12}\frac{\partial v}{\partial y} = E_1$$

$$A_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial v}{\partial x} + B_{21}\frac{\partial u}{\partial y} + B_{22}\frac{\partial v}{\partial y} = E_2$$

- Na forma matricial:

$$\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial y \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Auto Valores, λ

- Os auto valores λ que tornam o sistema homogêneo, definem as características:

$$\det\left|\mathbf{A}\,dy - \mathbf{B}\,dx\right| = 0$$

- onde $\lambda = dy/dx$ ou $\lambda = dx/dt$ se as variáveis independentes forem (x,y) ou (t,x);
- e **A** e **B** são as matrizes que compõem o sistema com ***‘n’*** EDP de 1a ordem

Auto Valores	Tipo
n reais e distintos	Hiperbólica
η reais , $1 \leq \eta \leq n-1$ e não há valores complexos	Parabólica
Se nenhum valor real for obtido	Elíptica
Reais e Complexos	Misto H/E

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Eq. Onda não-Linear de 1ª Ordem
Eq. Burgers sem viscosidade

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Somente uma equação. As matrizes contém somente um elemento: **A** = 1 e **B** = u.

$$\det\left|dx - u dt\right| = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = u$$

- A EDP é hiperbólica. A onda se propaga com velocidade u, que também é uma variável da equação.
- Ela permite o surgimento de choques: ondas com vel. propagação maior alcançam as mais lentas.

A análise da Eq. Completa de Burgers leva a matrizes singulares (determinante nulo) veja Whitham pg. 115 para resolver esta dificuldade

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Eq. Laplace / Poisson

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = S$$

- Fazendo u = dφ/dy e v = dφ/dx

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial y \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left|\mathbf{A}\frac{dy}{dx} - \mathbf{B}\right| = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm i$$

- Como os auto-valores são complexos, o sistema é Eliptico!

Eq. Onda 2ª Ordem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Fazendo w = c.du/dx e v = du/dt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Rightarrow \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = c\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left|\mathbf{A}\frac{dx}{dt} - \mathbf{B}\right| = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm c$$

- Como os auto-valores são reais e distintos, o sistema é Hiperbólico! A informação propaga com velocidade finita em duas direções

Equações Euler Incompressível

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2ex] u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\[2ex] u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 0 & 1 \\ 0 & u & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & 1 \\ 0 & v & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left|\mathbf{A}\frac{dy}{dx} - \mathbf{B}\right| = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-1}$$

- Trata-se de um sistema misto: hiperbólico e elíptico.

Equações Euler Compressível, 1D - gás perfeito & c = $(kRT)^{1/2}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + u\dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left|\mathbf{A}\frac{dx}{dt} - \mathbf{B}\right| = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = u \quad , \quad \frac{dx}{dt} = u \pm c$$

- Auto Valores reais e distintos: sistema hiperbólico.

NS incompressível e permanente, 2D

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Formando um Sistema de EDP de 1ª ordem

- u, v e p são as variáveis dependentes. As eq. NS são reduzidas a um sistema de 1ª ordem introduzindo as variáveis auxiliares: R = dv/dx; S = dv/dy e T = du/dy

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial x} = T \\[2mm]
\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2mm]
-\dfrac{\partial R}{\partial y} + \dfrac{\partial S}{\partial y} = 0 \\[2mm]
\dfrac{\partial S}{\partial y} + \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \\[2mm]
\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial S}{\partial x} - \dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial T}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = uS - vT \\[2mm]
-\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial R}{\partial x} - \dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial S}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = uR - vS
\end{array}\right\}$$

As eq. das variáveis auxiliares são escolhidas de modo a evitar que as matrizes A ou B sejam singulares (tenham determinante nulo).

NS, incompressível e permanente, 2D

- Na forma matricial:

$$\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1/Re&0&1\\ 0&0&-1/Re&0&0&0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u\\ v\\ R\\ S\\ T\\ p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-1/Re&0\\ 0&0&0&-1/Re&0&1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} u\\ v\\ R\\ S\\ T\\ p \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} T\\ 0\\ 0\\ 0\\ uS - vT\\ uR - vS \end{bmatrix}$$

$$\det\left|\mathbf{A}\frac{dy}{dx} - \mathbf{B}\right| = 0 \rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-1}$$

- Auto Valores complexos: sistema elíptico.

Comentários sobre Comportamento NS

- **As Eq. NS formam um sistema não-linear de EDP 2ª ordem com 4 variáveis independentes.**
- **O esquema de classificação não se aplica ‘diretamente’ às Eq. NS.**
- **Entretanto, as Eq. NS possuem muitas das propriedades de Eq. Elíptica, Parab. e Hiperp.**
- **Ao invés de classificar as eq. NS como um todo aponta-se seu caráter em cada direção.**

Comentários sobre Comportamento NS

- **Elíptica no espaço – modelo viscoso, incompressível, regime permanente com recirculação, i.e. escoamento com direção contrária a direção principal, requer que a informação a montante e a jusante. O domínio de solução é fechado mesmo que parte de sua extensão seja infinita (escoamentos externos).**

- **Elíptica no espaço e Parabólica no tempo – modelo viscoso incompressível e regime transiente. Problemas transientes nunca são elípticos. Neste caso o esquema do tempo é um esquema de marcha enquanto que no espaço ele é elítico.**

Comentários sobre Comportamento NS

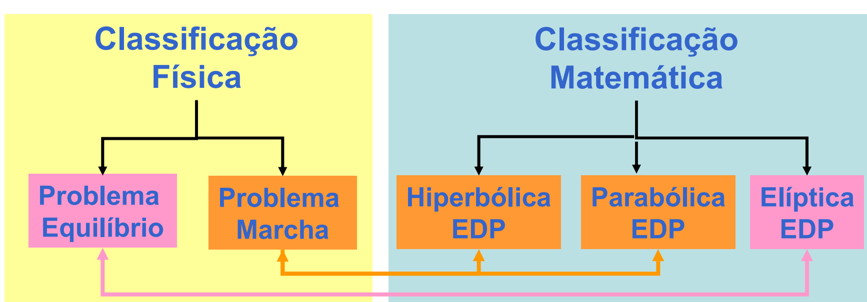
- **Parabólica no espaço** – **modelo viscoso, incompressível, regime permanente porém o escoamento é caracterizado por uma única direção (one way flows). Neste caso as Eq. NS se reduzem às Eq. Camada Limite. O domínio é fechado numa direção e aberto na outra.**

- **Elíptica no espaço** – **modelo viscoso, compressível - sub-sônico e regime permanente.**

- **Hiperbólica no espaço e Parabólica no tempo** - **escoamento compressível supersônico em regime transiente.**

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Classificação EDP



FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Notas Finais Parte II

- **A diferença no comportamento da equações deve refletir nos métodos empregados para sua solução de forma que eles possam descrever comportamento físico das equações que eles estão resolvendo.**
- **Evidentemente o conjunto completo das Eq. NS é complexo e pode requerer muito esforço computacional.**
- **Entretanto não são raras as oportunidades de se realizar simplificações nas Eq. NS de forma que elas ainda representem um problema físico porém com uma significativa simplificação no modelo que irá refletir no método numérico.**

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO I – Aula 2 - Jan/06 Prof. Eugênio

Referências

- **Fletcher, C.A.J., "Computational Techniques for Fluid Dynamics – Vol 1", Springer Verlag, 2nd ed. (1991)**
- **Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., "Na Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method", Longman Scientific & Technical, 1995**
- **Ferziger, J.H. and Peric, M., "Computational Methods for Fluid Dynamics", Springer Verlag, 2nd, 1999**
- **Maliska, C.R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", LTC 2a ed., 2004**
- **Schlichting, H.,"Boundary Layer Theory", McGraw Hill, 7th ed, (1979)**
- **Eckert E.R.G and Drake, R.M., "Analysis of Heat and Mass Transfer", McGraw Hill (1972)**
- **Whithan, G.B. , "Linear and Nonlinear Waves" John Wiley (1974)**

FIM