

AULA 3

- 1. Análise de Escala das Eq. Transporte. e seus grupos Adimensionais**
- 2. Equações de Transporte Reduzidas**

Parte I

Análise de Escala das Eq. Transporte. e seus grupos Adimensionais

Preliminares

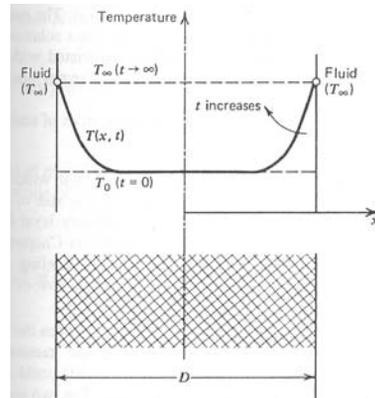
- Em engenharia não se diz se uma grandeza é *'grande'* ou *'pequena'* sem estabelecer uma comparação com uma grandeza de referência.
- É a comparação com um padrão que estabelece a grandeza de uma propriedade.
- Este conceito também pode ser levado ao estudo da relevância de cada termo da Eq Transporte.

Preliminares

- A importância de um termo da EDP em detrimento de outro é estabelecida pela análise de escala do fenômeno.
- É por meio da análise de escala que são estabelecidos os grupos adimensionais.
- Ela é a ferramenta de análise que permite obter a maior quantidade de informação pela menor *'unidade'* de esforço intelectual!

Análise de Escala

- A análise de escala não resolve a EDP, sua finalidade é estimar a ordem de magnitude de cada termo e se for o caso, simplificá-la ou não.
- Ela será introduzida por meio de um simples exemplo na área de condução térmica.
- **Uma placa de espessura D está inicialmente a temperatura T_0 .**
- **No instante $t=0$ a temp de sua superfície passa a ser $T_\infty = T_0 + \Delta T$.**
- **Deseja-se ‘estimar’ o tempo necessário para que a frente térmica atinja o centro da placa, i.e., quando o plano central ‘sente’ o fluxo de calor imposto na superfície.**



- Dada a simetria vamos focar o problema na metade da espessura, $D/2$, e utilizar a eq Energia para condução pura 1D:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- O lado esquerdo e direito expressam um balanço entre o fluxo de calor e a energia acumulada na célula. Vamos estimar a ordem de magnitude de cada termo:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\rho C_p \Delta T}{t} \quad \text{e} \quad k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \approx \frac{k \Delta T}{(D/2)^2}$$

- Como a EDP só possui 2 termos, ambos devem possuir a mesma ordem de magnitude, logo o tempo é estimado igualando os dois termos

$$t \approx \frac{(D/2)^2}{\alpha} \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

Algumas Regras Análise Escala

1. Sempre defina a extensão espacial da região onde será realizada a análise, defina uma dimensão característica! As vezes a extensão não é conhecida, p. ex.: espessura da camada limite. Neste caso ela será a variável a ser determinada, denomine-a por δ .
2. Se a EDP tiver dois termos, eles deverão ter a mesma ordem de magnitude.
3. Se a EDP tiver mais termos nem sempre todos eles são dominantes ou representativos, neste caso retenha na EDP somente os significativos.

Algumas Regras Análise Escala: Notação

Símbolos:

\sim é da mesma ordem de magnitude de...
O(a) ordem de magnitude da grandeza 'a'.

Simple Regras:

$c = a + b$ se $O(a) > O(b)$ então $O(c) \sim O(a)$
 $c = a + b$ se $O(a) \sim O(b)$ então $O(c) \sim O(a)$ ou $O(b)$
 $c = a \cdot b$ então $O(c) \sim O(a) \cdot O(b)$
 $c = a / b$ então $O(c) \sim O(a) / O(b)$

Equação da Massa

- O emprego da análise de escala na Eq Massa revela quando podemos considerá-la como incompressível, mesmo trabalhando com gases.
- A equação faz um balanço de massa e pode ser expressa na forma:

$$\nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

- O lado esquerdo deve ser igual ao lado direito, portanto ambos os termos possuem a mesma ordem de magnitude!
- Note que para fluidos incompressíveis (líquidos) ela reduz para $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, mas para gases e vapores, $\nabla \cdot \vec{V} \neq 0$.

Equação da Massa (fluido compressível)

- A variação da pressão com a densidade define a velocidade de propagação do som:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s = c^2$$

- | | | |
|----------------------------|---|---------------------------|
| 1. a escala da velocidade, | → | $V \sim V_0$ |
| 2. do comprimento | → | $X \sim L$ |
| 3. da pressão (inercial) | → | $P - P_0 \sim \rho V_0^2$ |
| 4. do tempo (inercial) | → | $t \sim L/V_0$ |

$$\nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \cong \frac{1}{\rho} \frac{1}{c^2} \frac{DP}{Dt} \sim \left(\frac{V_0}{c}\right)^2 \left(\frac{V_0}{L}\right) = Ma^2 \cdot \left(\frac{V_0}{L}\right)$$

- Note que $\text{div}V$ é da ordem de grandeza de Mach ao quadrado. Para $Ma \rightarrow 0$, $\text{div}V \rightarrow 0$.
 Tipicamente escoamentos com $Ma < 0.3$ são tratados como incompressíveis

Eq Navier Stokes

- A Eq. NS é uma expressão da 2ª Lei de Newton: a variação Q. Mov é igual a soma das forças externas.
- O balanço das forças é estabelecido por quatro parcelas: Inércia, Pressão (agente externo), Tensão e Força de Campo.

$$\underbrace{\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{\text{INÉRCIA TRANS. \& CONVEC.}} = \underbrace{- \frac{\partial P}{\partial x_i}}_{\text{FONTE PRESSÃO}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \underbrace{\left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} \right]}_{\text{TENSÃO VISCOSA}} + \underbrace{\rho g_i}_{\text{FORÇA CAMPO}}$$

- Esta forma geral aplica-se para um escoamento 3D compressível de um fluido Newtoniano com propriedades variáveis (não está incluso o tensor turbulento).
- Dependendo do fenômeno a ser modelado a importância relativa de cada termo no balanço pode mudar...

Tensão Viscosa

- A tensão viscosa é composta por dois termos: um devido ao tensor deformação e outro devido dilatação volumétrica.
- Se deseja saber em quais condições cada parcela é relevante:

$$\left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} \right] \sim O\left(\frac{\mu V_0}{L}\right) - O\left(\frac{\mu V_0}{L} \cdot Ma^2\right) \quad \text{ou}$$

$$\left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} \right] \sim \left(\frac{\mu V_0}{L}\right) \cdot O(1 - Ma^2)$$

- Para escoamentos subsônicos com $Ma \rightarrow 0$, o termo de compressibilidade fica muito pequeno em relação a unidade e o tensor de tensão pode ser aproximado por :

$$\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Termo Inercial:

Fenômenos Periódicos & n. Strouhal

- O termo inercial possui 2 parcelas: transiente e convectiva.
- Fenômenos transientes: periódicos ou de partida até atingir regime permanente. Consideremos fenômenos periódicos com freqüência característica ω .
- Uma comparação da ordem de magnitude entre os termos transiente e convectivo pode ser estabelecida:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} &\sim O(\rho V_0 \cdot \omega) + O\left(\frac{\rho V_0^2}{L}\right) \text{ ou} \\
 &\sim \left(\frac{\rho V_0^2}{L}\right) \cdot O\left(\frac{L \cdot \omega}{V_0} + 1\right) = \left(\frac{\rho V_0^2}{L}\right) O(St + 1)
 \end{aligned}$$

Número de Strouhal ($St = \omega L/V_0$)

- St expressa a razão entre as escalas de tempo periódica e convectiva (se preferir a razão entre as acelerações periódica e convectiva)

$$\frac{\text{Acel. Periódica}}{\text{Acel. Convectiva}} = \frac{[\partial u / \partial t]}{[u \partial u / \partial x]} \approx \frac{(V_0 \omega)}{(V_0^2 / L)} = \frac{L \omega}{V_0} = St$$

- O adimensional Strouhal (St) expressa a importância relativa do termo transiente no termo Inercial:

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \cong \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \text{ se } St \rightarrow 0$$

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \cong \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} \text{ e } St \gg 1$$

Eq Navier Stokes, $Ma \rightarrow 0$ & $St \rightarrow 0$

- Traduzindo: Eq NS para um fluido incompressível e regime permanente!

$$\rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left[\mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho g_i$$

- Por meio das escalas, V_0 , L , ρV_0^2 chega-se às variáveis adimensionais V^* , X^* , P^* e t^*

- | | | |
|-----------------------|---|----------------------------|
| 1. velocidade, | → | $V = V^* V_0$ |
| 2. comprimento | → | $X_i = X_i^* L$ |
| 3. pressão (inercial) | → | $P - P_0 = P^* \rho V_0^2$ |
| 4. tempo (inercial) | → | $t = t^* (L/V_0)$ |

- Note que as variáveis V^* , X^* , P^* e t^* possuem ordem de magnitude unitária $O(1)$ uma vez que a variável dimensional e a sua escala são apropriadas.

Eq NS Adimensional, $Ma \rightarrow 0$ & $St \rightarrow 0$

- Substituindo as variáveis dimensionais pelas adimensionais e suas respectivas escalas

$$\left(\frac{\rho V_0^2}{L} \right) V_j^* \frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*} = - \left(\frac{\rho V_0^2}{L} \right) \frac{\partial P}{\partial x_i^*} + \left(\frac{\mu V_0}{L^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_j^*} \cdot \left[\left(\frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial V_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right] + \rho g g_i^*$$

Comparando o termo convectivo com os demais:

$$V_j^* \frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P}{\partial x_i^*} + \left(\frac{1}{Re_L} \right) \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*} \right) + \left(\frac{1}{Fr} \right) g_i^*$$

onde Re_L e Fr são, respectivamente, Reynolds e Froude:

$$Re_L = \frac{\rho V_0 L}{\mu} \quad e \quad Fr = \frac{gL}{V_0^2}$$

Esta representação vale para ρ e μ constante, do contrário teríamos que definir $\mu = \mu^* \mu_0$, e deixar μ no dentro do operador. Quando μ constante, a ordem das derivadas pode ser trocada e utilizando a $\nabla V = 0$ podemos simplificar o tensor

Os Grupos Re e Fr

- Re_L expressa a razão entre as forças inerciais e forças viscosas:

$$\frac{\text{Força Inércia}}{\text{Força Viscosa}} = \frac{\rho D \vec{V} / dt}{\mu \nabla^2 \vec{V}} \approx \frac{\rho (V_0^2 / L)}{\mu (V_0 / L^2)} = \frac{\rho V_0 L}{\mu} = Re$$

- Froude expressa a razão entre as forças de campo e forças inerciais:

$$\frac{\text{Força Campo}}{\text{Força Inércia}} = \frac{\rho g}{\rho D \vec{V} / dt} \approx \frac{\rho g}{\rho (V_0^2 / L)} = \frac{gL}{V_0^2} = Fr$$

Eq NS na Forma Adimensional

$\left(\frac{D\vec{V}^*}{Dt} \right)$	=	$-\nabla p^*$	$\left(\frac{1}{Re_L} \right) \nabla^2 \vec{V}^*$	$\left(\frac{1}{Fr_L} \right) \vec{g}^*$
Termo Inercial		Força Pressão	Termo Viscoso	Força Campo

- A semelhança dinâmica entre as equações de transporte é visualizada por meio da sua forma adimensional. Escoamentos dinamicamente semelhantes são governados por equações de Q.M. e condições de contorno semelhantes!

- A importância ou dominância dos termos viscoso e convectivo depende da ordem de magnitude de Re do escoamento.

Classificação do Escoamento

- O Parâmetro Re é a medida da importância relativa entre os termos convectivos e viscosos.
- O primeiro introduz toda não linearidade nas Eq. NS enquanto que o 2º é um termo difusivo e linear que tende a suavizar gradientes.
- A porcentagem com que de cada um desses mecanismos participa do balanço na Eq. NS muda completamente o tipo de escoamento por isto costuma-se classificar as Eq. NS em função da ordem de magnitude de Re .

Classificação do Escoamento

$\left(\frac{D\vec{V}^*}{Dt}\right)$	=	$-\nabla p^*$	$\left(\frac{1}{Re_L}\right)\nabla^2\vec{V}^*$	$\left(\frac{1}{Fr_L}\right)\vec{g}^*$
Termo Inercial		Força Pressão	Termo Viscoso	Força Campo

$Re \ll 1$ escoamentos dominados pelas forças viscosas: balanço entre Pressão e Termo Viscoso.

$Re \sim 1$ todos os termos são igualmente importantes na Eq. NS.

$Re \gg 1$ escoamentos dominados pelas forças inerciais: balanço entre Inércia e Pressão no núcleo do escoamento, perto das paredes existência de Camada Limite.

Influência de Re no escoamento

- A medida que Re varia de zero a um número grande o escoamento, que era governado pelos termos Viscosos, passa a ser dominado pelos termos Inerciais.
- Esta mudança pode ser percebida no escoamento ao redor de um cilindro.
- A medida que o Re varia de 10^{-1} a 10^6 nota-se:
 - variação no coeficiente de arrasto (quantitativo)
 - Variação no campo do escoamento (qualitativo)

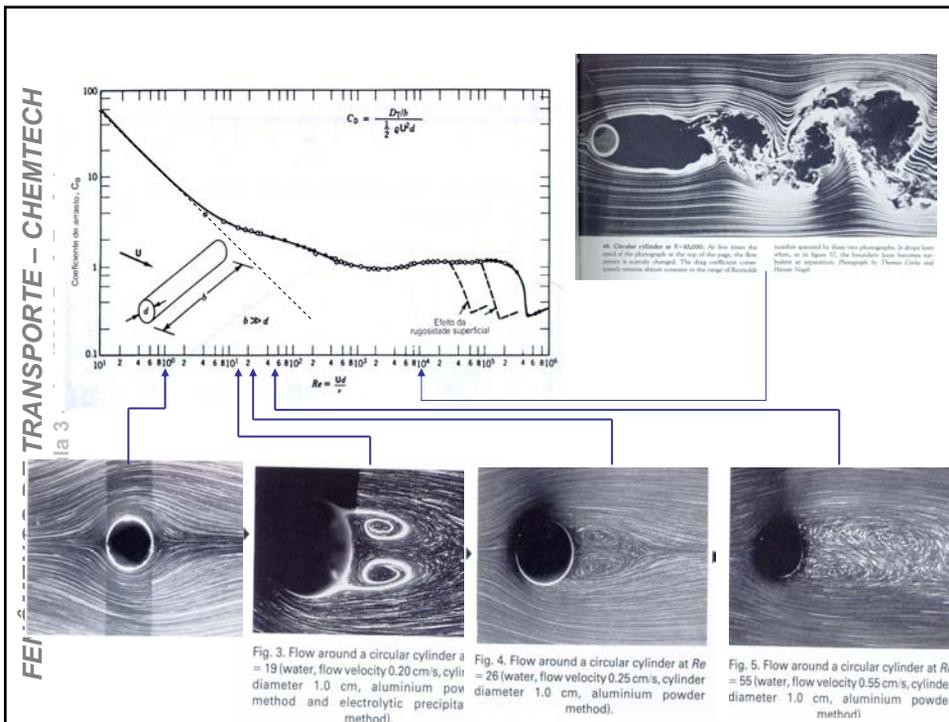


Figura 1 - Configuração do escoamento ao redor de um cilindro circular em função do número de Reynolds, segundo GERSTEN (1983).

Re	Regime	Características	Strouhal	Escoamento
$Re \rightarrow 0$	Re muito baixo	Regime permanente, ausência de esteira, simetria longitudinal	-	
$3-4 < Re < 30-40$	Vórtice duplo	Regime permanente, separação e bolha de recirculação.	-	
$30 < Re < 40$ $80 < Re < 90$	Estágio incipiente da esteira de vórtices de Von Kármán	Esteira laminar e instável e presença de recirculação.	$Sr < 0,14$	
$80 < Re < 90$ $90 < Re < 300$	Esteira de vórtices de Von Kármán plenamente desenvolvida	Esteira de vórtices de Von Kármán	$0,14 < Sr < 0,21$	
$150 < Re < 300$ $1,0 \times 10^5 < Re < 1,3 \times 10^5$	Regime sub-crítico	Esteira de vórtices instável e escoamento laminar nas proximidades da esteira	$Sr = 0,21$	
$1,0 \times 10^5 < Re < 1,3 \times 10^5$ $1,3 \times 10^5 < Re < 3,5 \times 10^5$	Regime crítico e pós-crítico	Separação laminar, recolamento turbulento, separação turbulenta final, esteira turbulenta	Sem periodicidade dominante	
$3,5 \times 10^5 < Re$	Regime super-crítico	Transição para a camada limite turbulenta, separação turbulenta	$0,25 < Sr < 0,30$	

F

Escoamentos com $Re_L \ll 1$ 'Creeping Flows' ou 'Stokes Flow'

$(Re_L) \left(\frac{D\vec{V}^*}{Dt} \right)$	=	$-\nabla p^*$	$\nabla^2 \vec{V}^*$	$\left(\frac{1}{Fr_L} \right) \vec{g}^*$
Termo Inercial		Força Pressão	Termo Viscoso	Força Campo

- São escoamentos 'lentos', $Re \ll 1$, o balanço de forças se dá entre o termo de pressão e o viscoso.
- A escala característica para pressão não é a escala inercial, ρV_0^2 mas uma escala viscosa definida por: $p^* = (p - p_0) / (\mu V_0 / L)$.

Escoamentos com $Re_L \ll 1$ 'Creeping Flows' ou 'Stokes Flow'

- A Eq N-S para $Re_L \ll 1$ reduz para:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{V}$$

- Esta é uma Eq Elíptica, semelhante a Eq. Poisson, com comportamento **LINEAR**, sua principal característica!
- A pressão é a força motriz externa, sem ela não há escoamento.
- Note também que ela se aplica para escoamentos desenvolvidos em dutos de seção constante.
- No PHOENICS ela é implementada desativando os termos convectivos nas Eq de velocidade.
- Na figura [arrasto cilindro](#) corresponde a faixa de Re variando em $0.1 < Re_L < 1$.

Escoamento com $Re_L \sim 1$

- Se Re_L tiver ordem unitária, todos os termos da Eq. N-S são da mesma ordem de grandeza.
- Isto significa que nenhum deles pode ser desprezado e o balanço de forças se dá entre os termos convectivos, pressão e viscoso, i.e. , não há simplificações ou exclusão de termos
- Na figura [arrasto cilindro](#) corresponde a faixa de Re variando em $1 < Re_L < 1000$.

Escoamentos com $Re_L \gg 1$ 'Euler & Camada Limite'

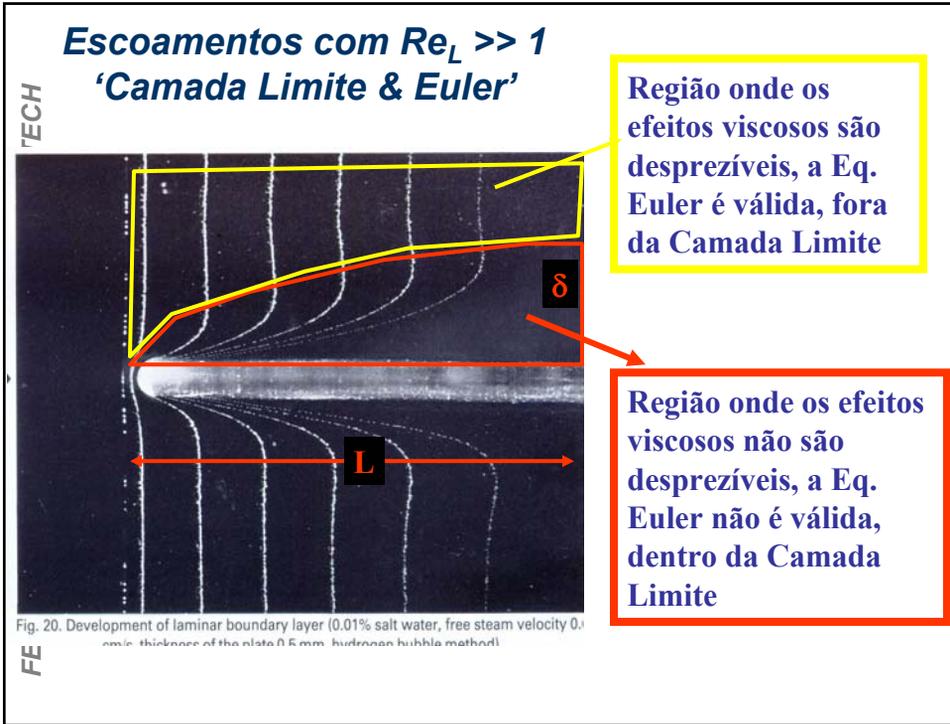
$\left(\frac{D\vec{V}^*}{Dt}\right)$	$=$	$-\nabla p^*$	$\left(\frac{1}{Re_L}\right) \nabla^2 \vec{V}^*$	$\left(\frac{1}{Fr_L}\right) \vec{g}^*$
Termo Inercial		Força Pressão	Termo Viscoso	Força Campo

- Para $Re_L \gg 1$ a contribuição dos termos viscosos é muito pequena. O balanço de forças se dá entre os termos convectivos e pressão. Resulta na equação de Euler:

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_j V_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i}$$

Escoamentos com $Re_L \gg 1$ 'Euler & Camada Limite'

- A Eq Euler é uma boa aproximação de escoamentos que não estão próximos de parede nem em 'shear layers' (jatos e esteiras).
- No séc XVIII ela foi motivo de um paradoxo: *não se sabia pq ela não previa o arrasto numa esfera se ela descrevia corretamente suas linhas de corrente!*
- Prandtl, no começo do séc XX, iniciou estudos de escoamento próximo à parede e observou a existência de uma 'Camada Limite'.
- Uma 'pequena região' onde os efeitos viscosos, originalmente negligenciados, são importantes e resultam na esperada força de arrasto!



Camada Limite

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH

MÓDULO I – Aula 3 – Jan/2006 Prof. Eugênio

- A camada limite hidrodinâmica é uma pequena região próxima a parede ou 'shear layer' onde existe um forte gradiente de velocidades.
- É nesta região que faz a 'ponte' entre a parede e o escoamento externo, Euler. Dentro da C.L. os efeitos viscosos são igualmente importantes.

$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$

Eqs. da Camada Limite

$$\text{momento } x \rightarrow \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}_{d\tau/dy}$$

$$\text{momento } y \rightarrow 0 = - \partial p / \partial y$$

- X e Y representam as direções paralela e normal à superfície do corpo.
- Como sua espessura é muito pequena, $\delta/L \ll 1$, pode-se mostrar que $du/dy \gg du/dx$.
- Isto faz que a Eq. Direção X seja parabólica e que a Eq. Direção Y informe apenas que não há grad p normal à C.L. (Prandtl 1905)
- As Eqs Camada Limite e Euler serão melhor discutidas na parte II desta aula.

Eq Transporte Temperatura, T

- O balanço de energia se dá pela interação de quatro termos: transporte, difusão, trabalho pressão e dissipação. Além disto há um quinto termo que representa outras fontes de energia e não será considerado na análise.

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_P V_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \phi + q'''$$

- Por meio das escalas, $V_0, L, \rho V_0^2, T_0$ chega-se às variáveis adimensionais V^*, X^*, P^*, T^* e t^*

- | | | |
|-----------------------|---|----------------------------|
| 1. velocidade, | → | $V = V^* V_0$ |
| 2. comprimento | → | $X_i = X_i^* L$ |
| 3. pressão (inercial) | → | $P - P_0 = P^* \rho V_0^2$ |
| 4. temperatura | → | $T = T^* T_0$ |
| 5. tempo (inercial) | → | $t = t^* (L/V_0)$ |

T_0 é a temp referência, por exemplo a temp de estagnação: $T_0 = T + V_0^2/2Cp$

Eq Temp: Forma Adimensional

- Substituindo as variáveis dimensionais pelas adimensionais e suas respectivas escalas

$$\left(\frac{\rho C_P V_0 T_0}{L} \right) \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + V_i^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} \right) = \left(\frac{k T_0}{L^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} \right) + (\beta T) \left(\frac{\rho V_0^3}{L} \right) \frac{DP^*}{Dt^*} + \mu \left(\frac{V_0}{L} \right)^2 \phi^*$$

Comparando o termo convectivo com os demais:

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + V_i^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} \right) = \left(\frac{1}{Re_L Pr} \right) \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} \right) + Ec(\beta T) \frac{DP^*}{Dt^*} + \frac{Ec}{Re} \phi^*$$

- **Ec é o nº Eckert:** $Ec = V_0^2 / C_P T_0$
- O produto $RePr$ também é conhecido como número de Peclet, Pe

Nº Eckert

- O n. Eckert constitui uma das escalas importantes para o trabalho de compressão e para função dissipação.
- Se considerarmos as relações para gás ideal:

$$C_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{e} \quad c^2 = \gamma RT$$

- e substituindo-as na definição de Eckert:

$$Ec = \frac{V_0^2}{C_P T_0} \equiv (\gamma - 1) Ma^2 \quad \text{onde} \quad Ma = V_0 / \sqrt{\gamma RT}$$

- Note que Eckert também denota compressibilidade!

Eq Adimensional Temperatura

- Considerando gás ideal, ($\beta T \equiv 1$) o transporte da temperatura fica sendo governado pelos adimensionais Re , Pr e Ma

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \left(\frac{1}{Re_L Pr} \right) \nabla^2 T^* + (\gamma - 1) Ma^2 \frac{DP^*}{Dt^*} + \frac{(\gamma - 1) Ma^2}{Re_L} \phi^*$$

- O trabalho de compressão pode deixar de ser um termo relevante desde que $Ma \rightarrow 0$. Para fluidos incompressíveis ele não existe.
- A função dissipação é uma função de Ma^2/Re_L , para fluidos compressíveis ela deixa de existir para $Ma \rightarrow 0$. Para líquidos com alta viscosidade (óleos p. ex.) o Re pode ser baixo o suficiente para que faça o termo que multiplica ϕ grande o suficiente para não ser desprezado!

Eq Adimensional Concentração

- O transporte de um escalar, concentração de um componente, possui escalas similares àquelas empregadas na equação da Temperatura.
- A diferença reside no coeficiente de difusão, D . Neste caso a equação para w_m fica:

$$\frac{Dw_m^*}{Dt^*} = \left(\frac{1}{Re_L Sc_m} \right) \nabla^2 w_m^* + \Psi_m^*$$

- onde $Sc_m = \nu/D$ é o n. Schmidt. Note que a Eq concentração é similar a Eq Temp para $Ma \rightarrow 0$

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \left(\frac{1}{Re_L Pr} \right) \nabla^2 T^* + q^{m*}$$

Notas Finais da Parte I

As principais idéias vistas nesta seção foram:

1. Por meio de escalas convenientes para cada variável é possível escrever as Eq Transporte na forma adimensional.
2. Cada variável adimensional ϕ possui magnitude unitária $\phi \sim O(1)$.
3. Cada variável ϕ vem multiplicada por um coeficiente (grupo adimensional: Re, Pr, Ma, Ec, Fr, Scm etc)
4. Esta forma adimensional das Eq Transporte permite estabelecer 'similaridade' entre equações e fenômenos e,
5. Decidir quais termos das Eqs. são relevantes para modelar um fenômeno específico dependendo do valor que Re, Pr, Ma, Ec, Scm e Fr assumem.

Parte II

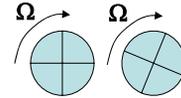
Equações de Euler, Potencial e Aproximações da Camada Limite

Conceito de Vorticidade

- Vorticidade é um conceito cinemático que expressa a rotação que um elemento de fluido faz com relação a sua vizinhança.
- Vorticidade é um conceito local, i.e. , associado a um ponto. Ela é de natureza vetorial e definida por:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \rightarrow |\vec{\omega}| = 2\Omega$$

- Onde ∇_x é o operador 'rotacional'



$$\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j}$$

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3$$

Redução da Eq NS

- A Eq NS (μ cte.) com seus termos inercial, viscoso e pressão:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{g}$$

- Os termos viscosos podem ser suprimidos num regime $Re \gg 1$, neste caso $\nu = 0$;

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g}$$

- A Eq resultante é conhecida como Eq Euler.
- Jogar fora termos de ordem mais elevada numa EDP pode ter sérias conseqüências! Veja que o n. de C.C. que Euler atende é menor que NS.
- Note também que NS tem caráter elíptico enquanto que Euler elíptico-hiperbólico.

Eq Euler

- A Eq Euler é válida para escoamentos compressíveis ou incompressíveis,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g}$$

- Empregando a identidade, o lado esquerdo da Eq fica: $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \cdot (\mathbf{V}^2/2) - \vec{V} \times \vec{\omega}$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right] = \vec{V} \times \vec{\omega}$$

- O escoamento representado por Euler não tem a ação de termos viscosos mas pode possuir vorticidade!

Uma Simplificação de Euler → Bernoulli

- Na hipótese de escoamento irrotacional e regime permanente,

$$\nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right] = 0$$

- Isto implica que a soma dos termos mecânicos seja constante, também conhecida como Eq Bernoulli:

$$\frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{constante}$$

- Ela é uma relação única pq relaciona de modo simples pressão, velocidade e altura.

Escoamento com $\mu = 0$ e Irrotacional

- O fato de $\omega = 0$ e da identidade vetorial: rotacional do gradiente de ϕ ser também nulo:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \rightarrow \vec{\omega} = \nabla \times \nabla \phi \equiv \mathbf{0}$$

- permite representar o campo de velocidades por meio de uma função potencial, ϕ tal que:

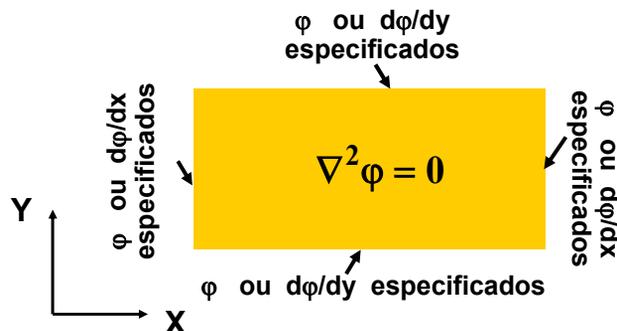
$$\vec{V} = \nabla \phi \quad \rightarrow \quad U = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad V = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{e} \quad W = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

- Observe que: $\nabla \cdot \vec{V} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0$
- A definição $V = \nabla \phi$ satisfaz a equação da massa desde que ϕ satisfaça a equação de Laplace!

Condição Contorno

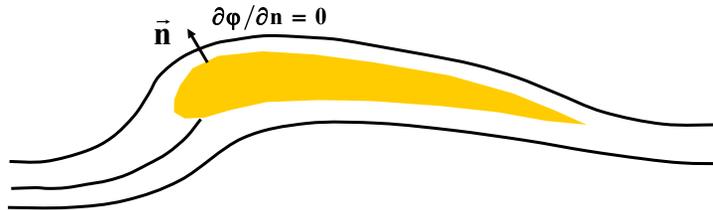
- V não é resolvido, mas sim seu potencial, ϕ .
- ϕ vem de uma equação elíptica, sendo necessário informação em todo o contorno que podem ser de duas espécies:

1. Dirichlet ou valor de ϕ no contorno.
2. Neuman ou valor do grad ϕ , normal na fronteira.



Conseqüência Condição Contorno

- Considere um corpo sólido. Neste caso somente pode-se especificar a velocidade normal ao corpo.
- Se o sólido for impermeável, então, $dV/dn = 0$.
- Não se pode impor nenhuma condição para a velocidade tangencial ao corpo. Consequentemente o escoamento potencial não satisfaz a condição de aderência junto a uma superfície sólida.



Conseqüência Condição Contorno

- Para um fluido Newtoniano o tensor da tensão é expresso por meio do tensor das deformações: $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{S}$
- O tensor de deformação do escoamento potencial não é nulo, isto é,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} [\nabla\vec{V} + \nabla\vec{V}^T] \neq \mathbf{0}$$

- Apesar de $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ p/ escoamento potencial.
- De fato se diz que simula um escoamento com ausência de viscosidade. Não é possível especificar uma velocidade paralela ao contorno.

Campo de Pressão & Bernoulli

- Uma vez resolvido o campo potencial ϕ , pode-se determinar o campo de velocidades fazendo-se o gradiente de ϕ ,

$$\vec{V} = \nabla\phi \quad \rightarrow \quad U = \frac{\partial\phi}{\partial x}; \quad V = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad e \quad W = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

- e também o campo de pressões empregando-se Bernoulli,

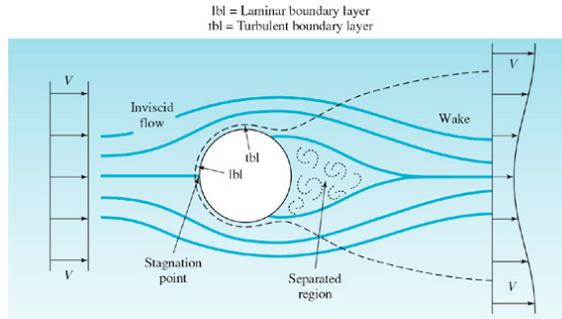
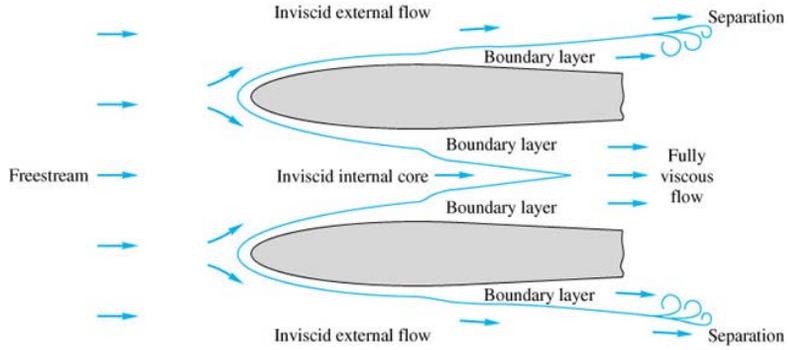
$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{const}$$

onde V^2 representa o produto escalar $V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$

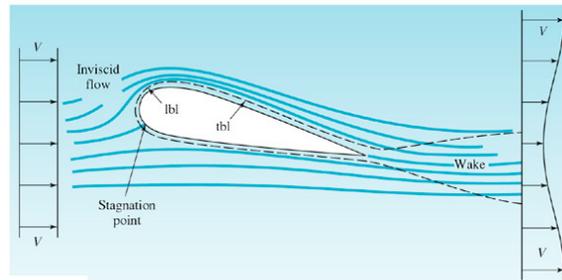
Existe Escoamento Potencial?

- Sim. Normalmente escoamentos externos, em regiões afastadas da parede onde a vorticidade não se difundiu das paredes para o fluido. Quando estas condições prevalecem, o modelo potencial faz uma boa representação do escoamento.
- Aplicações aeronáuticas: asas e fuselagens são frequentemente modeladas por meio de escoamento potencial para se obter a distribuição de pressão.
- Escoamentos com fortes transientes onde os termos viscosos são muito menores que os transientes: impacto de corpos em um líquido (splashes), corte de metais por jato de água, ...

Onde ocorre escoamento irrotacional?
Tipicamente em escoamentos externos sendo correspondente a parte externa de uma camada limite (sem separação)

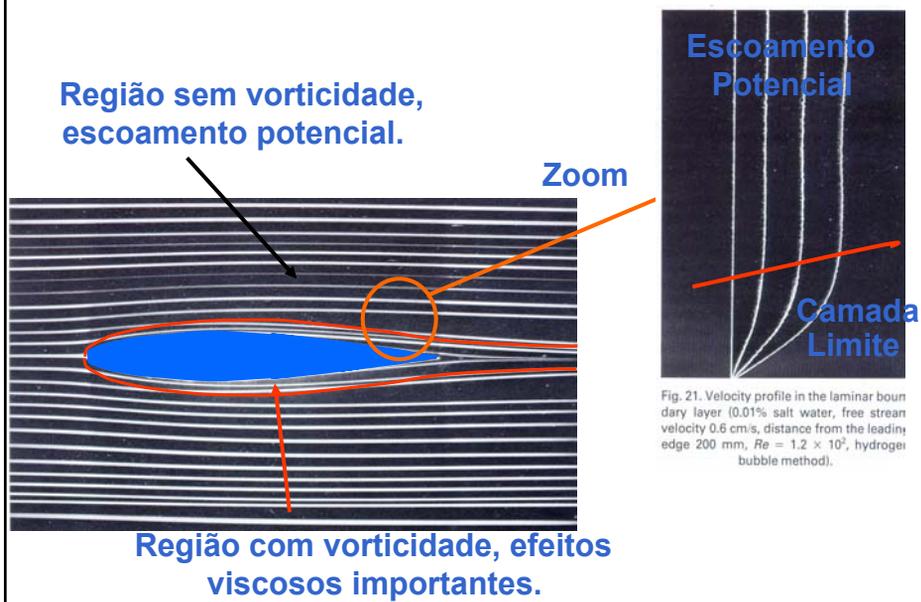


(a)



(b)

Comprovação Existência Escoamento Potencial

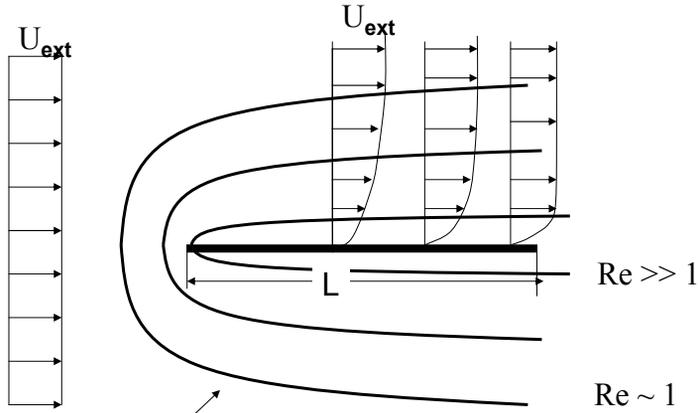


- A medida que se aproxima da parede surge uma região denominada por Camada Limite que faz um **'casamento'** ou **'ponte'**, se preferir, entre o escoamento externo (Euler ou Potencial) com o fato físico de que na parede o fluido está aderido a ela (não – deslizamento).
- É importante ressaltar que este fenômeno ocorre somente para Re elevado.
- Dada a pequena dimensão desta região com relação a dimensão do corpo, as Eqs. Transporte (movimento, escalares) podem ser reduzidas ou simplificadas



Fig. 21. Velocity profile in the laminar bound dary layer (0.01% salt water, free stream velocity 0.6 cm/s, distance from the leading edge 200 mm, $Re = 1.2 \times 10^5$, hydrogen bubble method).

N. Reynolds e seu Efeito no Escoamento



Região onde predominam efeitos viscosos com presença de gradientes de velocidade

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{[\text{Termos Inerciais}]}{[\text{Termos Viscosos}]}$$

Características da Camada Limite

- **Região Externa:** os efeitos viscosos são desprezíveis, escoamento pode ser modelado por Euler ou Potencial.
- **Região Interna:** os efeitos viscosos e os de inércia são igualmente importantes. Há atrito na parede. Bernoulli não pode se usado.
- $y = \delta(x)$ há um 'casamento' entre a região externa e a interna. Ambas soluções devem coincidir para $y = \delta(x)$

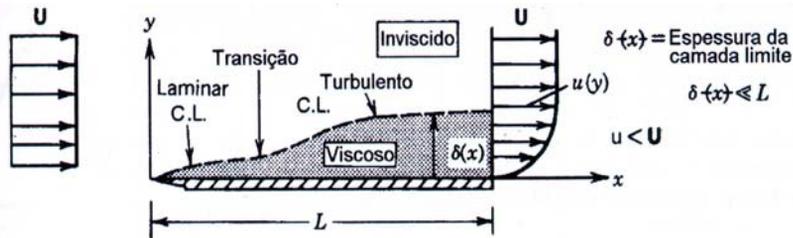


Figura 6.2 Camada limite hidrodinâmica sobre uma placa plana.

Escalas da Camada Limite

- A Camada Limite possui duas escalas de comprimento:
 1. paralela direção do escoamento, L e
 2. transversal direção ao escoamento, δ .
- A marca registrada da C.L. é: $\delta/L \ll 1$ ®
- A partir desta razão pode-se construir a análise de escala e chegar às Eq. C.L.

Equação da Massa

- A direção X é paralela ao escoamento, possui comprimento característico L e velocidade característica U_0 (a velocidade externa)
- A direção Y é transversal ao escoamento, possui comprimento característico δ .
- Da Eq Massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{U_0}{L} \sim \frac{V_0}{\delta} \rightarrow V_0 \sim \left(\frac{\delta}{L}\right)U_0$$

- Encontra-se que a velocidade transversal ao escoamento é δ/L menor que a velocidade paralela ao escoamento!

Eq Q. Movimento na Dir. do escoamento, X
Termo Inercial

- Os 3 termos inerciais possuem a mesma ordem de grandeza e portanto são retidos na Eq Transporte

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \sim O \left(\rho \frac{U_0}{L/U_0} \right) + O \left(\rho U_0 \frac{U_0}{L} \right) + O \left(\rho U_0 \frac{\delta}{L} \frac{U_0}{\delta} \right) \sim O \left(\rho \frac{U_0^2}{L} \right)$$

- A pressão possui uma escala inercial e sua ordem de magnitude é a mesma dos termos inerciais:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \sim O \left(\rho \frac{U_0^2}{L} \right)$$

Eq Q. Movimento na Dir. do escoamento, X
Termo da Tensão

- A tensão possui dois termos, observando que as diferentes escalas para X e Y,

$$\nabla \cdot \tau = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \sim \tau_w \left[O \left(\frac{1}{L} \right) + O \left(\frac{1}{\delta} \right) \right] \sim O \left(\frac{\tau_w}{\delta} \right)$$

- O resultado acima vale para C.L. laminar ou turbulenta. Considerando C.L. laminar, a tensão e a velocidade são relacionadas por:

$$\nabla \cdot \tau = \mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \right) \cong \mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \sim O \left(\mu \frac{U_0}{\delta^2} \right)$$

- O gradiente de velocidade é muito maior na direção transversal do que na direção do escoamento. Pode-se dizer que o escoamento varia *lentamente* em X e *rapidamente* em Y.

Escalas X e Y na C.L.

- Na C.L. o termo viscoso tem que ter a mesma ordem de magnitude dos termos inerciais, caso contrário não poderia ser satisfeita a condição de não-deslizamento.
- A razão entre as escalas Y e X é:

$$O\left(\rho \frac{U_0^2}{L}\right) \sim O\left(\mu \frac{U_0}{\delta^2}\right) \rightarrow \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

- Note que quanto maior Re menor é δ/L ! A proporcionalidade com o inverso da raiz é outra marca registrada da C.L. laminar!

A Eqs da Camada Limite 2D

- Na C. L. a equação da massa tem que ser satisfeita:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- A Eq da Camada Limite Hidrodinâmica na direção X é:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

- Na direção y todos os termos são (δ/L) ordens de magnitude menor daqueles da dir X portanto pode-se ‘desprezar’ esta eq no balanço e afirmar que ‘na C.L. não há gradiente de pressão transversal’, $\partial p / \partial y = 0$

Conseqüência de $\partial\tau/\partial y \gg \partial\tau/\partial x$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_T) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right]$$

- Ao jogar fora um termo de maior ordem da EDP estamos:
 1. reduzindo a ordem da EDP, isto é, ela não será capaz de atender a duas C.C. na dir X, agora somente uma.
 2. U necessita de 2 C.C. em y. Não se pode impor para U nenhuma C.C. a jusante, U satisfaz somente 1 C.C. a montante.
 3. V necessita de somente 1 C.C. em y . V perdeu sua eq movimento, ele satisfaz somente continuidade.
 4. A EDP que era elíptica passa a ser parabólica, não há difusão na direção X, a contribuição em X virá somente do termo convectivo.
 5. O domínio é aberto em x por onde a solução marcha

Características e Aplicações de Escoamentos Parabólicos

1. Ocorrem com uma direção predominante ‘one-way flows’,
2. o vetor velocidade não muda de sinal, não há recirculação na direção principal nem efeitos de difusão.

Estas condições ocorrem com freqüência em:

- *Camada Limite, Shear Layers, jatos, esteiras de corpos, escoamento desenvolvido em tubulações, plumas térmicas ou de contaminantes, entre outros casos aplicados.*

ESCOAMENTO PARABÓLICO uma direção predominante

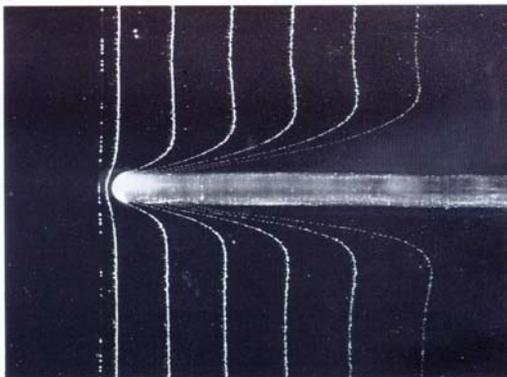


Fig. 20. Development of laminar boundary layer (0.01% salt water, free stream velocity 0.6 cm/s, thickness of the plate 0.5 mm, hydrogen bubble method)

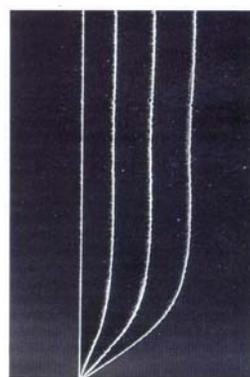
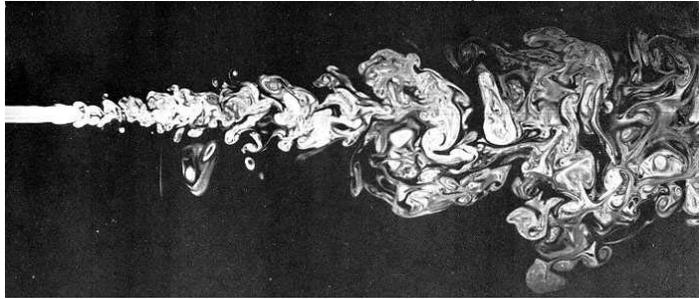
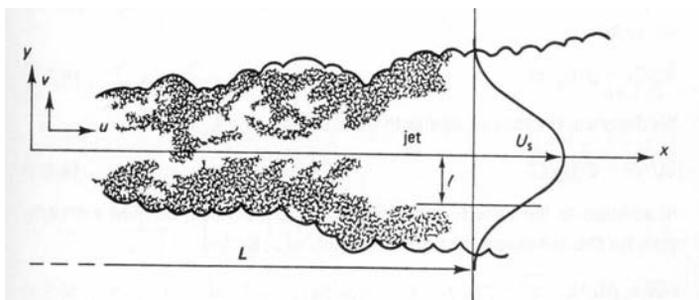
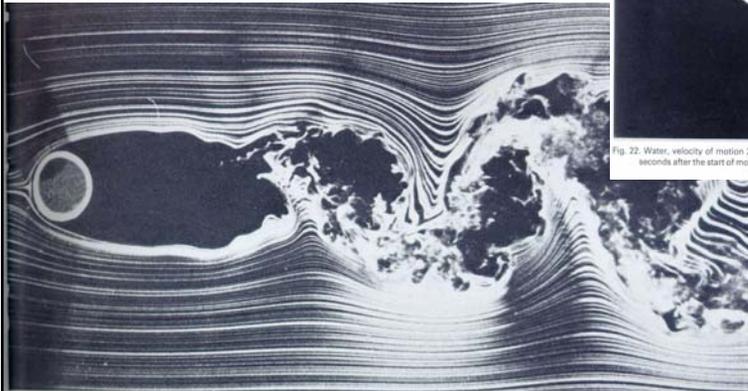


Fig. 21. Velocity profile in the laminar boundary layer (0.01% salt water, free stream velocity 0.6 cm/s, distance from the leading edge 200 mm, $Re = 1.2 \times 10^5$, hydrogen bubble method).

ESCOAMENTO PARABÓLICO uma direção predominante



**ESCOAMENTO ELÍPTICO:
recirculação presente,
mais de uma direção predominante**



48. Circular cylinder at $Re=10,000$. At five times the speed of the photograph at the top of the page, the flow pattern is scarcely changed. The drag coefficient consequently remains almost constant in the range of Reynolds

number spanned by these two photographs. It drops later when, as in figure 57, the boundary layer becomes turbulent at separation. Photograph by Thomas Corke and Hassan Nagib

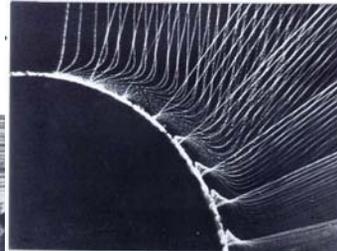


Fig. 22. Water, velocity of motion 2 cm/s, cylinder diameter 70 mm, photographed ten seconds after the start of motion, $Re = 1.2 \times 10^6$, hydrogen bubble method.

FENÔMENOS DE TRANSPORTE – CHEMTECH
MÓDULO 1 – Aula 3 – Jan/2006 Prof. Eugênio

**ESCOAMENTO ELÍPTICO:
recirculação presente,
mais de uma direção predominante**

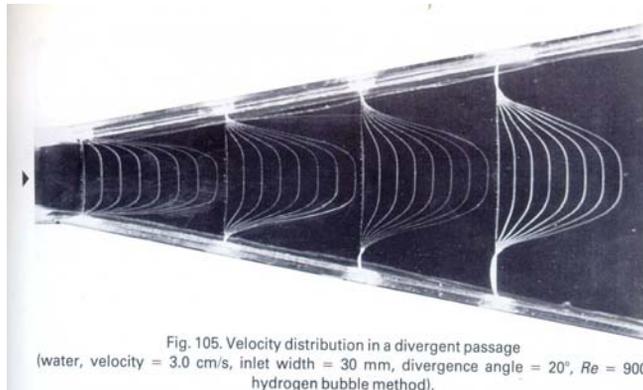


Fig. 105. Velocity distribution in a divergent passage (water, velocity = 3.0 cm/s, inlet width = 30 mm, divergence angle = 20° , $Re = 900$, hydrogen bubble method).

Separação do Escoamento e Camada Limite

- No ponto de separação $\delta/L \sim O(1)$, portanto as aproximações da C.L. não são válidas, o escoamento é Elíptico!

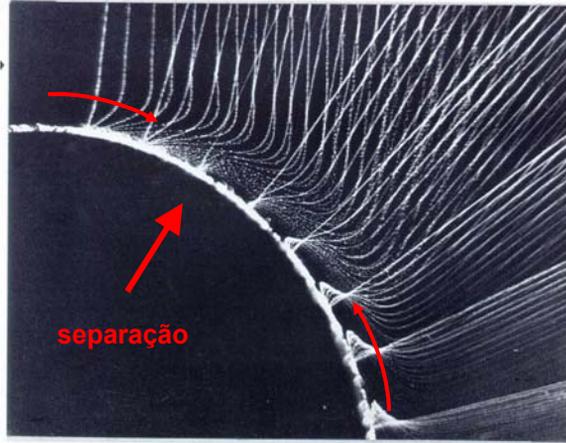
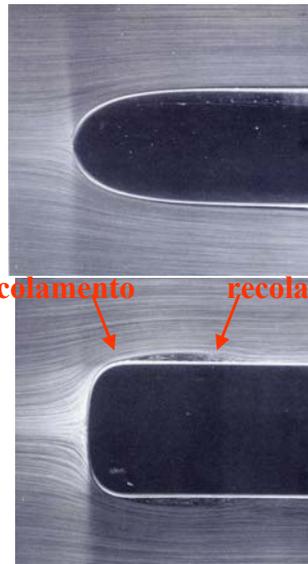
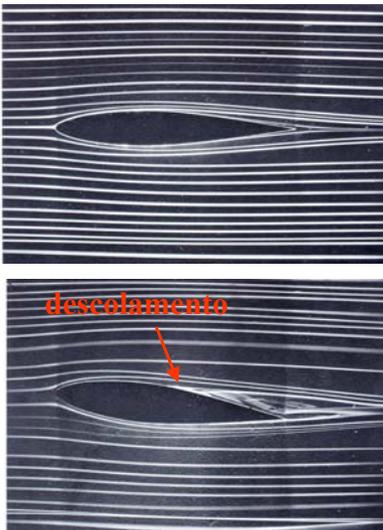
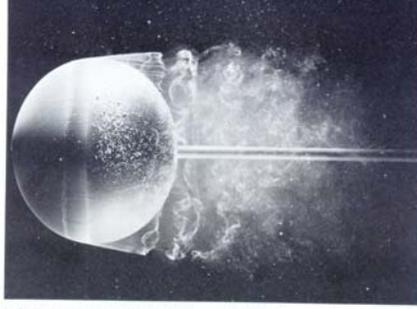


Fig. 22. Water, velocity of motion 2 cm/s, cylinder diameter 70 mm, photographed two seconds after the start of motion, $Re = 1.2 \times 10^3$, hydrogen bubble method.

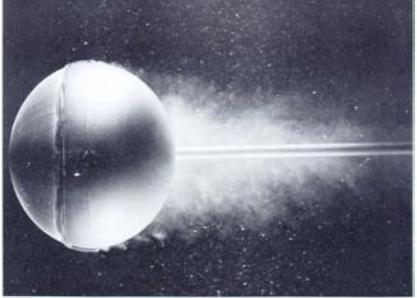
Separação do Escoamento



Separação na C.L. numa Esfera



55. Instantaneous flow past a sphere at $Re=15,000$. The flow in water shows a laminar boundary layer separating ahead of the equator and remaining laminar for about one radius. It then becomes unstable and quickly turns turbulent. ONEEA photograph, World 1980

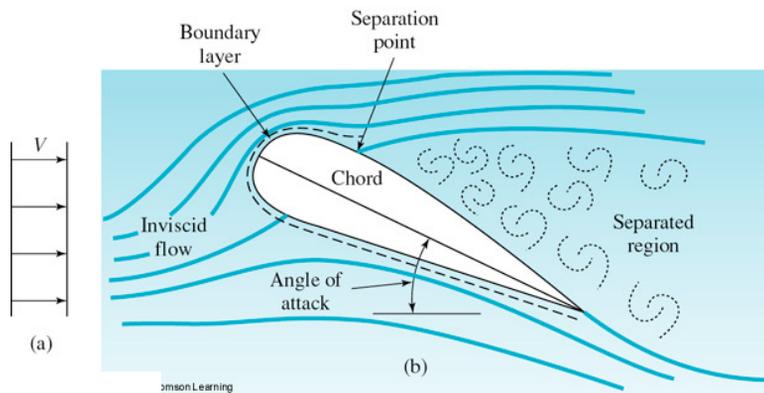


57. Instantaneous flow past a sphere at $Re=30,000$ with a trip wire. A classical experiment of Prandtl and Wuschberger is repeated here, using air bubbles in water. A wire loop ahead of the equator trips the boundary layer. It becomes turbulent, so that it separates further rearward than if it were laminar (opposite page). The drag is thereby dramatically reduced, in a way that occurs naturally on a smooth sphere only at a Reynolds number ten times as great. ONEEA photograph, World 1980

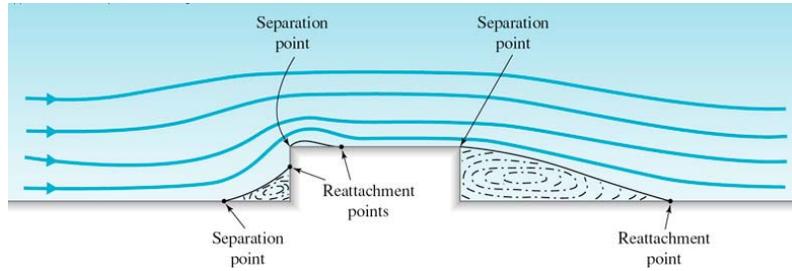
• Escoamento de água com Re 15000 em esfera.

• Figura superior: ocorre uma C.L. laminar até no ponto de separação ~ 82 graus.

• Figura inferior: com o auxílio de um fio (trip wire) a C.L. laminar transiciona para turbulenta e o ponto de separação se desloca para ~ 120 graus.



Imson Learning



Equações da Camada Limite Compressível, Transiente e 2D

$$\partial p / \partial y = 0$$

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\rho v + \rho v_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v}{\partial y} \right) = - \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right)}_{Dp/Dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\rho v}{Pr} + \frac{\rho v_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \rho v \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}_{\phi}$$

$$\left(\frac{\partial \rho w_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_m u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_m v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\rho v}{Pr} + \frac{\rho v_T}{Pr_T} \right) \frac{\partial w_m}{\partial y} \right] + \Psi_m$$



Referências

- Bejan, A., “Convective Heat Transfer”, John Wiley, 2nd ed, (1995)
- White, F.M., “Viscous Flow”, McGraw Hill 2nd ed, (1991)
- Eckert E.R.G and Drake, R.M., “Analysis of Heat and Mass Transfer”, McGraw Hill (1972)
- Tennekes, H. and Lumley, J.L., “A First Course in Turbulence”, MIT Press, (1972)

FIM