

## Camada Limite Tri-Dimensional

### Índice

Equações da Camada Limite Tri-Dimensional .....	1
Escoamento Axi-Simétrico com $\delta < r_0$ .....	8
A Transformação de Mangler .....	11
Exemplo: Escoamento em um Ponto de Estagnação Axi-Simétrico .....	16
O Atomizador de Taylor .....	21
Escoamento Axi-Simétrico com $\delta > r_0$ .....	23
Exemplo: Escoamento ao Longo da Geratriz de um Cilindro .....	27
Jato Axi-Simétrico Laminar .....	30
Cilindro Inclinado com Relação ao Escoamento Externo .....	37
Fenômeno de Separação em Superfícies Cilíndricas Inclinadas.....	40
Disco Rotativo de Von Kármán.....	44
Referências e Leitura Complementar.....	55

Prof. Eugênio Spanó Rosa  
FEM-DE UNICAMP  
erosa@fem.unicamp.br

## Equações da Camada Limite Tri-dimensional

Para o estudo de escoamentos com camada limite tri-dimensionais, é conveniente colocar as equações da massa e de momento em coordenadas ajustadas ao corpo. A utilização destas coordenadas permite que se revele onde ocorre os maiores gradientes de velocidades, e de maneira análoga ao caso bi-dimensional, pode-se fazer as aproximações da camada limite.

Considere  $S$  a superfície de um corpo sólido como mostra a Fig. 1. A posição de um ponto  $P$  no espaço é descrita através da distância  $\zeta$  paralela ao vetor normal a  $S$  e do vetor posição  $\vec{r}$  que indica a posição do ponto  $P'$  na superfície  $S$ .

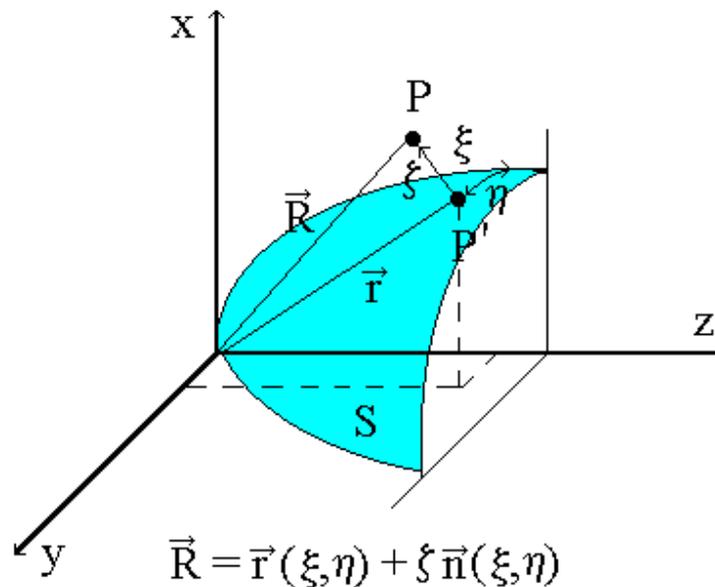


Fig. 1 - Sistema de coordenadas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  ajustados ao corpo.

As coordenadas  $\xi$ ,  $\eta$  definem a superfície  $S$  através do vetor posição  $\vec{r}$ ,

$$\vec{r} = \vec{r}(\xi, \eta)$$

Então um ponto  $P$  pode ser definido pelo vetor posição  $\vec{R}$  como:

$$\vec{R} = \vec{r}(\xi, \eta) + \zeta \vec{n}(\xi, \eta) \quad (1)$$

onde  $n$  é o vetor normal a  $S$  em  $P'$ . Para que as equações de conservação possam ser escritas em termos das coordenadas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , é necessário definir os fatores de escala correspondentes a cada dimensão que determinarão um comprimento de arco  $ds$ :

$$(ds)^2 = h_1^2(d\xi)^2 + h_2^2(d\eta)^2 + h_3^2(d\zeta)^2 \quad (2)$$

Sem perda de generalidade, pode-se definir um sistema ortogonal de coordenadas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  em  $S$  de forma que superfícies paralelas a  $S$  são definidas por

$$\zeta(x,y,z) = \text{constante}$$

Analogamente, pode-se definir duas outras famílias de superfícies:

$$\xi(x,y,z) = \text{constante} \quad \text{e} \quad \eta(x,y,z) = \text{constante}$$

tal que as três famílias  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  formam uma base tripla ortogonal. A intersecção da superfície  $S$  ( $\zeta = 0$ ) com as superfícies que definem  $\xi$  e  $\eta$  determinam as linhas de curvaturas de  $S$ . Além disto, pela definição de  $\zeta$ , que é a distância real medida ao longo de uma normal a superfície  $S$  ao ponto  $P$ , o fator de escala  $h_3$  associado a  $\zeta$  é então igual a 1. Os fatores de escala  $h_1$  e  $h_2$ , estão associados as coordenadas  $\xi$  e  $\eta$  respectivamente. Eles são calculados através das expressões:

$$h_1^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \quad (3)$$

$$h_2^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2$$

As equações paramétricas para as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  em termos das variáveis  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  podem ser obtidas diretamente da Eq. (1), decompondo-se o vetor posição  $R$  nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Desta maneira pode-se definir as relações para  $x$  e  $y$  como:

$$\begin{aligned} x &= F_x(\zeta, \eta) + \zeta \bullet G_x(\zeta, \eta) \\ y &= F_y(\zeta, \eta) + \zeta \bullet G_y(\zeta, \eta) \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $F_x$  e  $F_y$  referem-se a funções que descrevem as projeções do vetor posição  $r$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente; similarmente,  $G_x$  e  $G_y$  a funções que descrevem as projeções da normal a  $S$  no ponto  $P'$  definido por  $r(\xi, \eta)$ . Substituindo-se Eq. (4) em Eq. (3) encontra-se que a forma funcional esperada para os fatores  $h_1$  e  $h_2$  de escala é:

$$h_{1,2} = F(\xi, \eta) + \zeta \bullet G(\xi, \eta)$$

A equação da conservação da massa para um fluido incompressível, para o sistema ortogonal de coordenadas fica sendo:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 v) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_1 h_2 w) \right] = 0 \quad (6)$$

onde  $h_1, h_2, h_3$  e  $u, v, w$  são os fatores de escala e as respectivas velocidades associadas as direções  $\xi, \eta, \zeta$ , respectivamente.

Havendo uma camada limite em  $S$ , então  $\zeta$  e  $w$  são pequenos e a derivada de  $w$  com relação a  $\zeta$  é grande comparada com as derivadas relacionadas com as direções  $\xi$  e  $\eta$ . Além disto, considerando-se que a superfície  $S$  apresente uma curvatura suave, os fatores de escala  $h_1$  e  $h_2$  são de ordem de grandeza unitária,  $h_1$  e  $h_2 \approx O(1)$ . Definindo-se um comprimento característico  $L$  para as dimensões  $\xi$  e  $\eta$  e  $\delta$  (espessura da camada limite) para a dimensão  $\zeta$ , encontra-se, a partir da Eq. (6), que a ordem de grandeza da velocidade  $w$  é:

$$w \approx O \left[ U_0 \left( \frac{\delta}{L} \right) \right]$$

onde  $U_0$  é a velocidade característica do escoamento externo. Analogamente ao caso bi-dimensional, esta ordem de magnitude da velocidade  $w$  será usada na equação do momento para se determinar os termos significativos na aproximação da camada limite.

A equação do momento requer uma maior elaboração dos termos. Como a expansão de todos os termos envolvidos na equação do momento para um sistema ortogonal de coordenadas é excessivamente longa, serão apresentados as expansões parciais respectivas aos termos de: aceleração ( $\partial V / \partial t + V \cdot \nabla V$ ), pressão ( $1/\rho \nabla P$ ) e viscosos ( $\nu [\nabla(\nabla \cdot V) - \nabla_x(\nabla_x V)]$ ), levando-se em conta que  $h_3 = 1$ .

As componentes de aceleração são:

$$(\text{dir. } \xi) \Rightarrow \frac{Du}{Dt} + uv \frac{\partial h_1}{h_1 h_2 \partial \eta} - v^2 \frac{\partial h_2}{h_1 h_2 \partial \xi} + wu \frac{\partial h_1}{h_1 \partial \zeta}$$

$$(\text{dir. } \eta) \Rightarrow \frac{Dv}{Dt} - u^2 \frac{\partial h_1}{h_1 h_2 \partial \eta} + vu \frac{\partial h_2}{h_1 h_2 \partial \xi} + wv \frac{\partial h_2}{h_2 \partial \zeta}$$

$$(\text{dir. } \zeta) \Rightarrow \frac{Dw}{Dt} - u^2 \frac{\partial h_1}{h_1 \partial \zeta} - v^2 \frac{\partial h_2}{h_2 \partial \zeta}$$

$$\text{onde} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{h_1 \partial \xi} + v \frac{\partial}{h_2 \partial \eta} + w \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

(7)

Considerando mais uma vez que  $h \approx O(1)$ ,  $\xi$  e  $\eta \approx O(L)$ ,  $\zeta \approx O(\delta)$ ;  $u \approx v \approx U_0$ , temos então que a ordem de grandeza dos termos envolvidos no operador  $D/Dt \approx (U_0/L)$  para as direções  $\xi$  e  $\eta$ , enquanto que para a direção  $\zeta$ ,  $D/Dt \approx (\delta/L)(U_0/L)$ . Entretanto os termos inerciais também estão associados a produtos da velocidade com as derivadas de  $h$ . Pode-se mostrar que as derivadas de  $h$  estão relacionadas com a curvatura  $k$  da superfície de acordo com as relações (Howarth 1951, Morse and Feshbach 1953):

$$\begin{aligned} k_{\xi,\eta} &= -\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \\ k_{\eta,\xi} &= -\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \\ k_{\zeta,\xi} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \zeta} ; \quad k_{\zeta,\eta} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (8)$$

Onde o primeiro índice refere-se a superfície e o segundo a direção do parâmetro onde está havendo a variação. Por exemplo:  $k_{\xi,\eta}$  refere-se a curvatura da superfície definida por  $\xi = \text{constante}$  na direção da coordenada  $\eta$  ou seja, na curva  $\zeta = \text{constante}$  na superfície  $\xi = \text{constante}$ , analogamente,  $k_{\eta,\xi}$  é a curvatura da superfície  $\eta = \text{constante}$  na direção de  $\xi$  e finalmente,  $k_{\zeta,\xi}$  e  $k_{\zeta,\eta}$  referem-se a curvatura da superfície  $\zeta = \text{constante}$  nas direções de  $\xi$  e  $\eta$  crescentes, respectivamente.

Enquanto que  $h \approx O(1)$ , não se pode, a priori, dizer o mesmo sobre suas derivadas. A ordem de magnitude destas derivadas está intimamente relacionada com a curvatura e, conseqüentemente, com forma específica da superfície  $S$ . Portanto a ordem de magnitude dos termos inerciais, associados aos efeitos de curvatura só podem ser determinadas tratando-se dos casos individualmente.

Relativo as componentes de pressão :

$$\begin{aligned} (\text{dir. } \xi) &\Rightarrow \frac{1}{\rho h_1} \frac{\partial P}{\partial \xi} \\ (\text{dir. } \eta) &\Rightarrow \frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} \\ (\text{dir. } \zeta) &\Rightarrow \frac{1}{\rho h_3} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (9)$$

e, finalmente, as componentes da tensão :

$$\begin{aligned} (\text{dir. } \xi) &\Rightarrow \frac{v}{h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 v) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_1 h_2 w) \right) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 v) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 u) \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_2}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_1 u) - \frac{\partial}{\partial \xi} (w) \right) \right) \right] \right\} \\ (\text{dir. } \eta) &\Rightarrow \frac{v}{h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 v) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_1 h_2 w) \right) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} (w) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_2 v) \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 v) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 u) \right) \right) \right] \right\} \\ (\text{dir. } \zeta) &\Rightarrow \frac{v}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 v) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_1 h_2 w) \right) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_1 u) - \frac{\partial}{\partial \xi} (w) \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} (w) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_2 v) \right) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

(10)

Levando-se em conta as escalas características da camada limite, pode-se chegar, por inspeção na Eq. (10), que os termos dominantes das forças viscosas são:

$$\begin{aligned}
 (\text{dir.}\xi) &\Rightarrow \frac{v}{h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_2}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_1 u) \right) \right) \approx O\left(\frac{U_0 v}{\delta^2}\right) \\
 (\text{dir.}\eta) &\Rightarrow \frac{v}{h_1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_2 v) \right) \right) \approx O\left(\frac{U_0 v}{\delta^2}\right) \\
 (\text{dir.}\zeta) &\Rightarrow \approx O\left[\left(\frac{\delta}{L}\right) \frac{U_0 v}{\delta^2}\right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

Agrupando-se as equações (7), (9) e (11), chega-se a equação da conservação do momento da camada limite, que, em termos das direções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  fica sendo:

$$\begin{aligned}
 (\text{dir.}\xi) &\Rightarrow \frac{Du}{Dt} + uv \frac{\partial h_1}{h_1 h_2 \partial \eta} - v^2 \frac{\partial h_2}{h_1 h_2 \partial \xi} + wu \frac{\partial h_1}{h_1 \partial \zeta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{h_1 \partial \xi} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_2}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_1 u) \right) \right) \\
 (\text{dir.}\eta) &\Rightarrow \frac{Dv}{Dt} - u^2 \frac{\partial h_1}{h_1 h_2 \partial \eta} + vu \frac{\partial h_2}{h_1 h_2 \partial \xi} + wv \frac{\partial h_2}{h_2 \partial \zeta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{h_2 \partial \eta} + \frac{v}{h_1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_2 v) \right) \right) \\
 (\text{dir.}\zeta) &\Rightarrow +u^2 \frac{\partial h_1}{h_1 \partial \zeta} + v^2 \frac{\partial h_2}{h_2 \partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{h_3 \partial \zeta}
 \end{aligned} \tag{12}$$

O gradiente de pressão na Eq. (12) é obtido, de maneira análoga ao escoamento bi-dimensional, do campo de escoamento externo a camada limite dado pela equação de Euler. Como no processo da camada limite  $\delta/L \rightarrow 0$ , o campo de velocidades externo é avaliado na superfície  $S$  e apresenta duas componentes de velocidade:  $U_0(\xi, \eta)$  e  $V_0(\xi, \eta)$ ,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{h_1 \partial \xi} &= \frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{h_1 \partial \xi} + V_0 \frac{\partial U_0}{h_2 \partial \eta} + U_0 V_0 \frac{\partial h_1}{h_1 h_2 \partial \eta} - V_0^2 \frac{\partial h_2}{h_1 h_2 \partial \xi} \\
 -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{h_2 \partial \eta} &= \frac{\partial V_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{h_1 \partial \xi} + V_0 \frac{\partial V_0}{h_2 \partial \eta} - U_0^2 \frac{\partial h_1}{h_1 h_2 \partial \eta} + V_0 U_0 \frac{\partial h_2}{h_1 h_2 \partial \xi}
 \end{aligned} \tag{13}$$

O conjunto de equações (6), (12) e (13) descrevem as equações da camada limite tri-dimensional que está sujeito as condições de contorno que passam agora a ser discutidas:

Não deslizamento:  $\zeta = 0 \Rightarrow u(\xi, \eta, 0, t) = 0; v(\xi, \eta, 0, t) = 0$   
 $w(\xi, \eta, 0, t) = 0$  sem injeção ou sucção de massa  
 $w(\xi, \eta, 0, t) = \pm w_s$  com injeção (+) ou sucção de massa (-)

Condição Inicial:  $t = 0 \Rightarrow u, v, w, U_0$  e  $V_0$  são conhecidos em todo campo para  $t = 0$

Condição de Entrada  $\xi = \xi_0 \Rightarrow u(\xi_0, \eta_0, \zeta, t) = f(\zeta, t); v(\xi_0, \eta_0, \zeta, t) = g(\zeta, t); f$  e  $g$  são conhecidas em  $\xi_0, \eta_0$

Casamento com

Escoamento Externo  $\zeta \rightarrow \infty \Rightarrow u(\xi, \eta, \infty, t) = U_0; v(\xi, \eta, \infty, t) = V_0$

Para iniciar a análise dos fenômenos em camada limite tri-dimensional, resta ainda mostrar a forma da tensão de cisalhamento no sistema ortogonal de coordenadas. Para um fluido incompressível, a tensão é proporcional a parte simétrica do tensor das deformações:

$$\tau_{i,j} = 2\mu S_{i,j}; \quad S_{i,j} = \text{parte simétrica } (\nabla \vec{V})$$

Considerando-se as aproximações de ordem de magnitude da camada limite, a tensão de cisalhamento na direção  $\xi$  e  $\eta$  se reduz a:

$$\tau_{\zeta,\xi} = \mu h_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u}{h_1} \right)$$

$$\tau_{\zeta,\eta} = \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{v}{h_2} \right)$$

Verificando-se para as equações (6), (12) e (13) que são três equações com três incógnitas,  $u, v$  e  $w$ , conjuntamente com suas condições de contorno, pode-se tirar as seguintes conclusões:

1. Camada limite tri-dimensional é consideravelmente mais complexa que a bi-dimensional.
2. Até que sejam especificados os fatores de escala  $h_1$  e  $h_2$ , particulares a superfície em estudo, muito pouco pode ser dito a respeito das equações.

3. As relações para determinação do gradiente de pressão, baseados na solução da equação de Euler para o escoamento externo, são também complexas, o que faz com que frequentemente não seja possível se ter uma forma analítica para o campo de velocidades externo. Um agravante existe se houver separação. O fenômeno de separação apresenta a forte tendência de alterar o escoamento externo de maneira que a aproximação do escoamento externo por uma solução da equação de Euler pode não ser válida.
4. Uma das etapas mais importantes da análise consiste em uma escolha adequada das coordenadas de maneira que os fatores de escala resultantes,  $h_1$  e  $h_2$ , simplifiquem as equações e as condições de contorno (Moore 1964).

### Escoamento Axi-Simétrico com $\delta \ll r_0$

As equações da conservação da massa e momento, Eqs. (6) e (12), quando aplicadas ao escoamento axi-simétrico gerado por um corpo de revolução podem ser simplificadas devido a simplicidade de seus fatores de escala. Considere um corpo de revolução como mostrado na Fig. 2. A origem do sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal está no ponto O da figura. O eixo z é o eixo de revolução e  $r_0(x)$  é a distância do eixo z a superfície S. As coordenadas  $x$  e  $\theta$  são tomadas na superfície S;  $x$  é a distância de um ponto da superfície ao ponto O e  $\theta$  indica a posição angular. A coordenada  $y$  é a distância normal da superfície S a um ponto genérico no campo de escoamento.

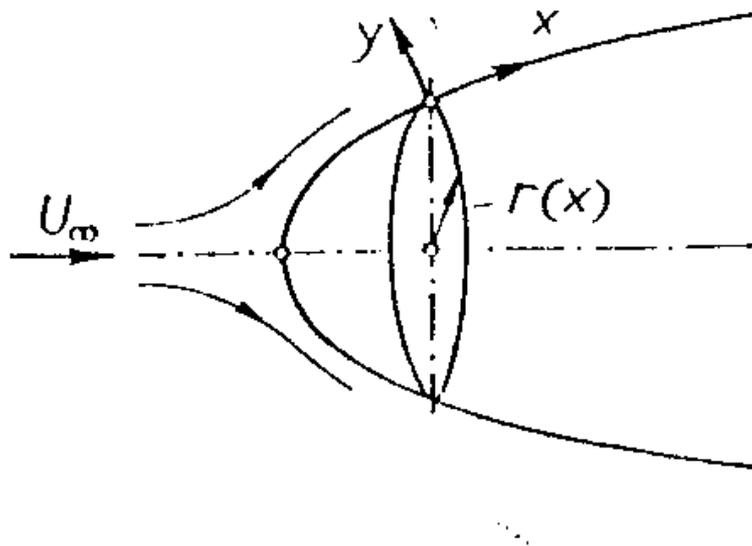


Fig. 2 - Sistema de coordenadas para um escoamento axi-simétrico através de um corpo de revolução.

A escolha deste sistema de coordenadas  $(x, \theta, z)$  deve-se a Mangler (1945). Os fatores de escala associados as direções  $x, \theta, z$  são respectivamente:

$$\begin{aligned} h_1 &= [1 + y \cdot k] \\ h_2 &= [r_0(x) + y \cdot \cos(\alpha)] \\ h_3 &= [1] \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $k$  é a curvatura da superfície  $S$  e  $\alpha$  é o ângulo que a normal de  $S$  faz com a normal do eixo  $z$ . Fazendo-se uma análise da ordem de grandeza dos termos envolvidos em  $h_1$  e  $h_2$ , encontra-se que para  $h_1$ :

$$h_1 \cong (1 + O(k\delta))$$

mas  $\delta \cong L Re_L^{-1/2}$  onde  $L$  é uma dimensão característica do corpo medida ao longo da direção  $x$ , portanto

$$h_1 \cong (1 + O(kL Re_L^{-1/2}))$$

Desde que  $k \ll Re_L^{1/2}/L$ , então:

$$h_1 \cong 1$$

o que é bastante plausível pois a curvatura de corpos de revolução é bastante suave. De maneira similar para  $h_2$  encontra-se:

$$h_2 \cong (r_0 + \delta)$$

pois  $\cos(\alpha) \cong 1$ . Desde que  $\delta \ll r_0$  ou  $r_0 \gg L Re_L^{-1/2}$  então:

$$h_2 \cong r_0$$

Sob estas considerações de ordem de magnitude, o conjunto de fatores de escala definidos na Eq. (14) fica sendo:

$$\begin{aligned} h_1 &= [1] \\ h_2 &= [r_0(x)] \\ h_3 &= [1] \end{aligned} \quad (15)$$

Substituindo-se Eq. (15) nas Eqs. (6) e (12) encontra-se para as equações da conservação da massa e momento para uma camada limite axi-simétrica quando  $\delta \ll r_0$

$$(\text{cons. massa}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [r_0(x) \bullet u] + \frac{\partial}{\partial y} [r_0(x) \bullet v] = 0$$

(Momento)

$$(\text{dir. } x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{dir. } \theta) &\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{uw}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} = v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 (\text{dir. } y) &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

É interessante observar que na equação da conservação da massa aparece o fator  $r_0(x)$  multiplicando a velocidade. Este fator surge como uma consequência do escoamento ser tri-dimensional, e a ele se deve o efeito chamado de divergência. Isto é, a geometria axi-simétrica causa um estiramento ou contração na largura dos tubos de corrente que resulta em um afinamento ou espessamento da camada limite. Deve-se lembrar que, diferentemente de escoamentos bi-dimensionais onde a largura dos tubos de correntes é constante, em escoamentos tri-dimensionais axi-simétricos, a introdução da terceira dimensão proporciona um grau de liberdade a mais no sistema permitindo que a largura dos tubos de corrente não seja constante.

Na extremidade da camada limite, a velocidade da corrente livre  $U_0(x)$  e a velocidade de rotação  $W_0(x)$  estão relacionadas, através da equação de Euler Eq. (13), com o gradiente de pressão na camada limite:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} - \frac{W_0^2}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\
 \frac{\partial W_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{U_0 W_0}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

As condições de contorno aplicáveis às equações (16) são:

Na parede,  $y = 0$

$$\begin{aligned}
 u &= 0 \\
 v &= 0 \text{ ou } \pm v_w \text{ (sucção ou injeção de massa)} \\
 w &= 0 \text{ ou } r_0 \Omega(t) \text{ (superfície com rotação } \Omega(t) \text{ no eixo revolução)}
 \end{aligned}$$

Fora da Camada Limite,  $y \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 u &\rightarrow U_0(x,t) \\
 w &\rightarrow W_0(x,t)
 \end{aligned}$$

a condição de contorno em  $v$  foi perdida porque a equação do momento em  $y$  é de ordem de magnitude inferior, não considerada na análise.

### A Transformação de Mangler

Considerando-se um escoamento incompressível axi-simétrico em regime permanente e sem rotação, as equações da camada limite neste caso ficam sendo:

$$\frac{\partial}{\partial x} [r_0(x) \cdot u] + \frac{\partial}{\partial y} [r_0(x) \cdot v] = 0 \quad (18)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (19)$$

onde na Eq. (19) o gradiente de pressão foi substituído pelo termo equivalente da velocidade externa a camada limite. É interessante notar a similaridade deste conjunto de equações com as equações da camada limite bi-dimensional. O fator que diferencia estas equações é  $r_0(x)$  que multiplica os termos de velocidade na equação da conservação da massa, e ele é o responsável por introduzir o efeito de divergência no escoamento.

Ao invés de estudar as soluções destas equações, Mangler em 1945, propôs uma transformação de variáveis (provavelmente baseada em argumentos dimensionais), que reduz estas equações a um sistema de equações equivalente ao caso bi-dimensional.

As Eqs. (18) e (19) são transformadas introduzindo-se novas variáveis dependentes e independentes definidas por:

$$x' = \frac{1}{L^2} \int_0^x r_0^2(x) dx, \quad y' = \frac{r_0 y}{L}$$

$$u' = u, \quad v' = \frac{L}{r_0} \left( v + \frac{y u}{r_0} \frac{dr_0}{dx} \right), \quad U_0'(x') = U_0(x)$$

onde  $L$  é um comprimento de referência (constante) e pode ser escolhido arbitrariamente. Antes de substituir estas relações nas Eqs (18) e (19) é necessário definir as derivadas em termos das novas variáveis independentes  $x'$  e  $y'$ . Do cálculo diferencial de múltiplas variáveis pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\quad)}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\quad)}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\quad)}{\partial y'} \\ &= \frac{r_0^2}{L^2} \cdot \frac{\partial(\quad)}{\partial x'} + \frac{y'}{r_0} \frac{dr_0}{dx} \cdot \frac{\partial(\quad)}{\partial y'} \\ \frac{\partial(\quad)}{\partial y} &= \frac{\partial x'}{\partial y} \cdot \frac{\partial(\quad)}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y} \cdot \frac{\partial(\quad)}{\partial y'} \\ &= \frac{r_0}{L} \cdot \frac{\partial(\quad)}{\partial y'} \end{aligned}$$

A substituição destas variáveis de transformação nas Eqs (18) e (19) leva a:

$$\frac{\partial}{\partial x'} u' + \frac{\partial}{\partial y'} v' = 0 \quad (20)$$

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = U_0' \frac{\partial U_0'}{\partial x'} + v' \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \quad (21)$$

As condições de contorno para  $u'$  e  $v'$ , para uma parede impermeável, são: para  $y' = 0$ ;  $u' = v' = 0$ ; e para  $y \rightarrow \infty$ ;  $u' \rightarrow U_0'$

Através da transformação de Mangler é estabelecido uma correspondência formal entre escoamentos de camada limite axi-simétricos e bi-dimensionais. Notar que  $(x', y', u', v')$  representam, genuinamente, um escoamento em um corpo bi-dimensional fictício definido pelas transformações. Há somente uma equivalência matemática através da transformação. A grande vantagem da transformação de Mangler é que ela coloca a disposição uma variedade de métodos aplicáveis para escoamentos bi-dimensionais para uso em escoamentos axi-simétricos.

### Soluções por Similaridade Utilizando a Transformação de Mangler:

Pela correspondência direta com escoamentos bi-dimensionais, escoamentos axi-simétricos devem apresentar soluções similares quando a velocidade externa,  $U_0(x)$  for proporcional a uma potência de  $x$ ,

$$U_0(x) = Kx^m$$

Escoamentos potenciais axi-simétricos proporcionais a uma potência de  $x$  ocorrem em superfícies cônicas cujo semi-ângulo interno  $\phi$  é dado pela tabela 1:

m	$\phi$ (graus)		m	$\phi$ (graus)
0.00	0.00		1.20	97.01
0.05	19.10		1.40	102.99
0.10	27.73		1.60	108.12
0.15	34.52		1.80	112.61
0.20	40.33		2.00	116.58
0.30	50.11		2.50	124.60
0.40	58.22		3.00	130.89
0.50	65.20		4.00	139.90
0.60	71.31		5.00	146.12
0.70	76.84		6.00	150.71

0.80	81.60		7.00	154.12
0.90	86.00		8.00	156.86
1.00	90.00		9.00	159.70

Tabela 1 - Correspondência entre o parâmetro de velocidade  $m$  e o semi-ângulo  $\phi$  de um cone

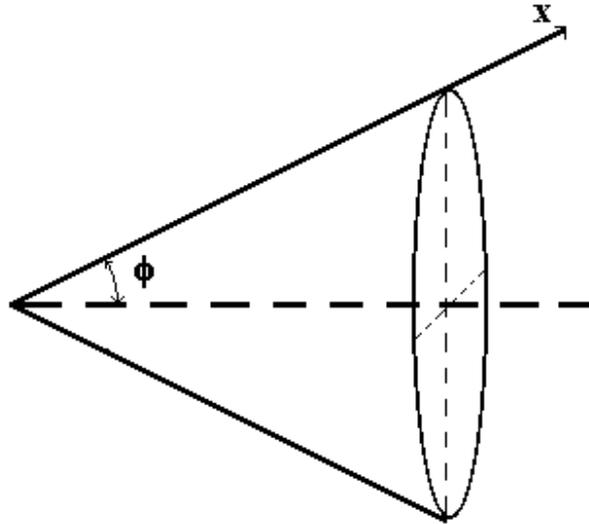


Fig. 2 - Superfície cônica com semi-ângulo  $\phi$  com solução por similaridade utilizando-se a transformação de Mangler

Nota-se pela tabela 1 que a relação entre o parâmetro  $m$  e o ângulo  $\phi$  não é simples como a encontrada no caso bi-dimensional para escoamentos em cunhas;  $\theta = 2\pi/(m+1)$ . Para o cone com semi-ângulo  $\phi$ ,  $r_0 = x \sin(\phi)$ , a transformação de Mangler conduz a:  $x' = (x^3 \sin^2 \phi)/3L^2 = Kx^3$ . Então  $x'^{1/3} \approx x$ , e desde que  $U_0 \approx x^m$  para o cone,  $U_0' \approx x^{m/3}$  para o escoamento bi-dimensional equivalente. O que vale a dizer que:

$$m_{2-D} = \frac{m_{3-D}}{3}$$

onde  $m_{3-D}$  é o parâmetro de velocidade para um escoamento axi-simétrico em um cone com ângulo de ataque nulo e  $m_{2-D}$  é o parâmetro equivalente para um escoamento bi-dimensional. Além disto, substituindo-se esta relação na definição do parâmetro  $\beta$  da solução de Falkner-Skan encontra-se que:

$$\beta_{\text{cone}} = \frac{2m_{2-D}}{m_{2-D} + 1} = \frac{2m_{3-D}}{m_{3-D} + 3}$$

A equação de Falkner-Skan fica sendo:

$$F''' + FF'' + \beta_{\text{cone}} (1 - F'^2) = 0$$

com condições de contorno:

$$F(0) = 0; \quad F'(0) = 0 \quad \text{e} \quad F'(\infty) = 1$$

e, as variáveis de similaridade, expressas tanto utilizando-se as variáveis físicas do problema (x,y) como utilizando-se as variáveis de Mangler (x',y'), estão na tabela 2.

Variáveis Físicas do Problema (x,y)	Variáveis de Mangler (x',y')
$x = \left( \frac{x' 3L^2}{\sin^2 \phi} \right)^{1/3}$	$x' = \frac{x^3 \sin^2 \phi}{3L^2}$
$y = y' \left( \frac{L}{x' 3 \sin \phi} \right)^{1/3}$	$y' = \frac{(x \sin \phi) y}{L}$
$U_0(x) = Kx^{m_{3D}}$	$U_0(x') = K(x')^{m_{2D}}$
$\eta = y \sqrt{\frac{(m_{3D} + 3)U_0(x)}{2\nu x}}$	$\eta' = y' \sqrt{(m_{2D} + 1) \frac{U_0(x')}{2\nu x'}}$
$\frac{u}{U_0} = F'(\eta)$	$\frac{u}{U_0} = F'(\eta')$

Tab. 2 - Relações entre as variáveis físicas do problema e as variáveis de Mangler

### Exemplo: Escoamento em um Ponto de Estagnação Axi-Simétrico

O escoamento na vizinhança de um ponto de estagnação axi-simétrico é descrito, esquematicamente, na Fig. 3. A direção y é a direção normal a superfície e x é a distância radial do centro da superfície.

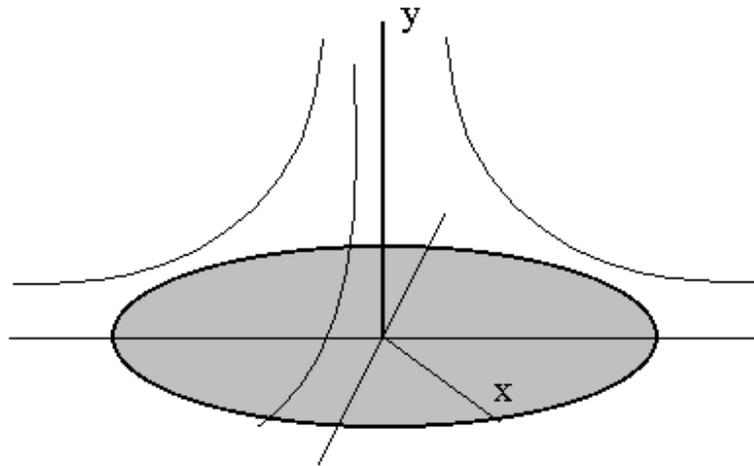


Fig. 3 - Ponto de estagnação Axi-Simétrico

A superfície apresenta um semi-ângulo  $\phi = 90$  e, de acordo com a Tab. 1, o coeficiente  $m_{3D} = 1$  e a velocidade  $U_0$  fica sendo proporcional a:

$$U_0(x) = Kx$$

Substituindo-se os valores de  $\phi$  e  $m$  na tabela 2, encontra-se:

Variáveis Físicas do Problema (x,y)	Variáveis de Mangler (x',y')
$x = (x'3L^2)^{1/3}$	$x' = x^3/3L^2$
$y = y' \left( \frac{L}{x'3} \right)^{1/3}$	$y' = \frac{(x)y}{L}$
$U_0(x) = Kx^1$	$U_0(x') = Kx'^{1/3}$
$\eta = y \sqrt{\frac{2U_0(x)}{\nu x}}$	$\eta' = y' \sqrt{\frac{2}{3} \frac{U_0(x')}{\nu x'}}$

Utilizando-se a transformação de Mangler, o escoamento axi-simétrico reduz-se a um problema bi-dimensional dado pela equação de Falkner-Skan:

$$F''' + FF'' + \beta(1 - F'^2) = 0; \quad \text{onde } \beta = 1/2$$

sujeito às condições de contorno:

$$F(0) = 0; F'(0) = 0 \text{ e } F'(\infty) = 1$$

A solução numérica do escoamento na vizinhança de um ponto de estagnação axi-simétrico é mostrada na Fig. 4, onde:

$$\frac{u}{U_0} = F'(\eta)$$

$$\frac{v'}{U_0} = -\frac{\sqrt{m_{2D} + 1}}{\sqrt{2Re'_x}} \left( F + \frac{m_{2D} - 1}{m_{2D} + 1} \eta' F' \right)$$

$$\frac{\tau'}{(\mu U_0 / x)} = \sqrt{\frac{(m_{2D} + 1) Re'_x}{2}} \bullet F''$$

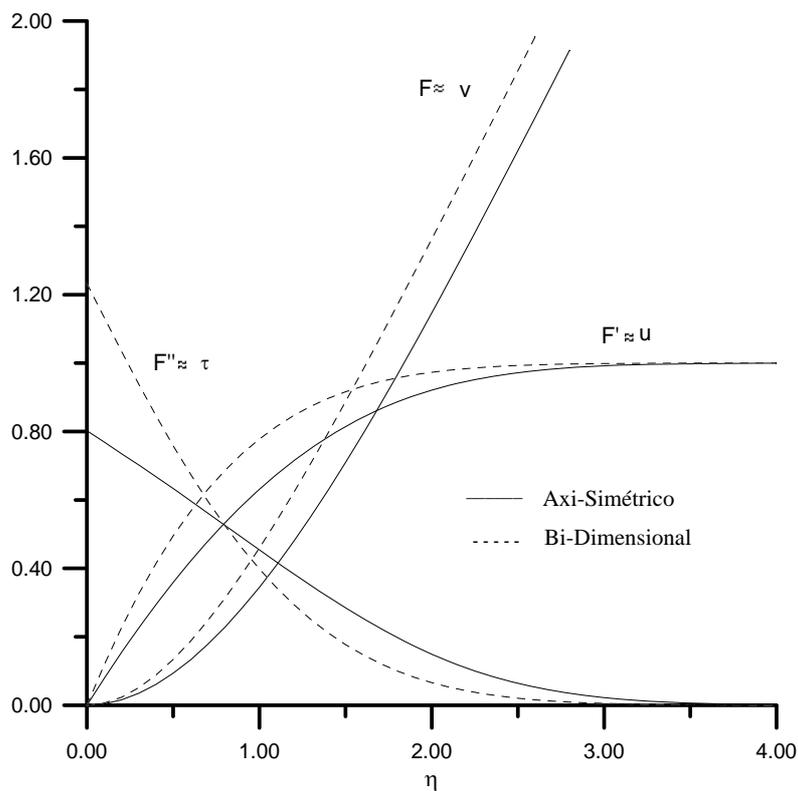


Fig. 4 Solução numérica para o escoamento na vizinhança de um ponto de estagnação: axi-simétrico e bi-dimensional.

Por motivos de comparação, os resultados numéricos do escoamento na vizinhança de um ponto de estagnação bi-dimensional também são apresentados na Fig. 4. Nota-se que a velocidade  $u$  do caso axi-simétrico é sempre menor para o caso bi-dimensional. Isto deve-se ao efeito de divergência, enquanto que no caso bi-dimensional os tubos de corrente são definidos por planos paralelos, no caso axi-simétrico, eles são definidos por planos divergentes, como mostra a Fig. 5

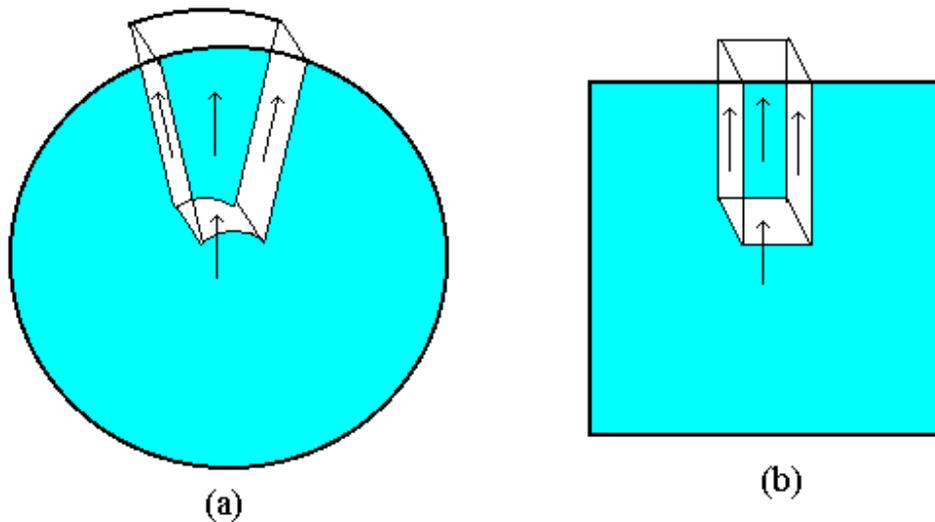


Fig. 5 - Ilustração do efeito de divergência. (a) tubo de corrente para escoamento axi-simétrico (b) tubo de corrente para escoamento bi-dimensional.

Como consequência do efeito de divergência, a tensão de cisalhamento na parede para o caso axi-simétrico é menor que a do caso bi-dimensional; e a espessura da camada limite,  $\delta$ , estimada pelo valor de  $\eta$  onde  $u/U_0 = 99\%$ , é maior para o escoamento axi-simétrico do que para o caso bi-dimensional. O valor de  $\delta$  para os casos axi-simétrico e bi-dimensional são respectivamente:

$$\delta_{3D} = 2.75 \sqrt{\frac{\nu}{K}}$$

$$\delta_{2D} = 2.40 \sqrt{\frac{\nu}{K}}$$

### O Atomizador de Taylor

Até o momento analisou-se escoamento axi-simétricos, onde  $\delta \ll r_0$ , e com escoamento externo ausente de movimento de rotação,  $W_0(x) = 0$ . Uma aplicação de escoamentos axi-simétricos com rotação pode ser encontrada em atomizadores ou separadores ciclônicos. O desenvolvimento desta aplicação deve-se a Sir Geoffrey Taylor (1950). Este problema desenvolvido por Taylor ilustra o comportamento de uma camada limite axi-simétrica, onde  $\delta \ll r_0$ , que ocorre quando o escoamento externo é do tipo vórtice livre,  $v_\theta = \Gamma/r$

O atomizador consiste de um bocal cônico, convergente e não rotativo, conforme Fig. 7. O fluido que entra pela seção maior do bocal possui um forte movimento de rotação que tende a promover a dispersão do jato necessária para um processo de atomização ou necessária para promover a separação entre uma fase gasosa e sólida quando aplicado em ciclones de separação. Taylor representou o bocal como um tronco de seção cônica e assumiu que o comportamento do fluido externo a camada limite é representado por uma solução clássica de vórtice livre. O movimento axial que é superposto ao movimento de rotação é considerado pequeno suficiente que pode ser desprezado.

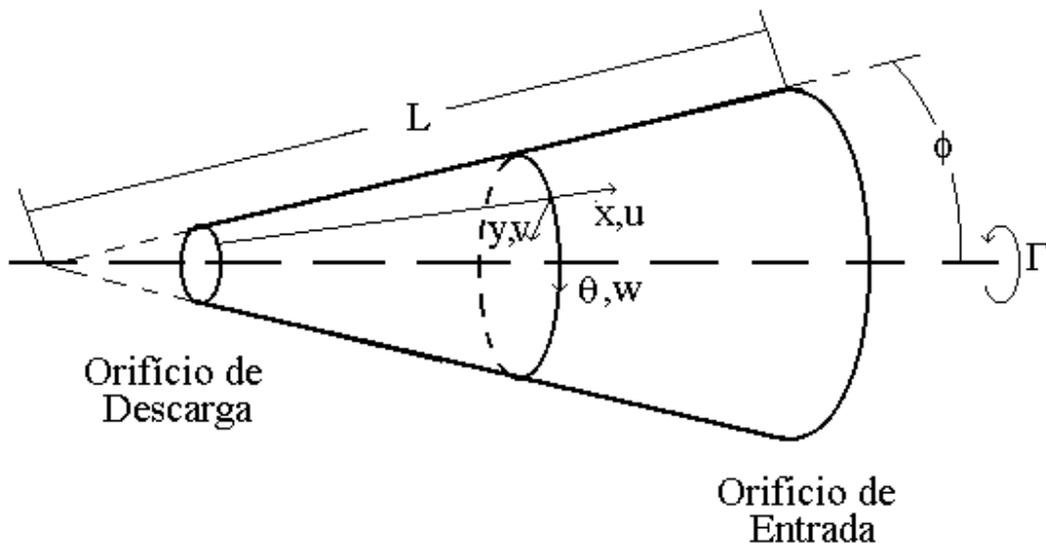


Fig. 7 - Atomizador de Taylor

As equações da camada limite são definidas pela Eq. (16), onde  $r_0(x) = x \sin \phi$ , que para regime permanente são reduzidas para:

$$\frac{\partial}{\partial x} [u(x \sin \phi)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(x \sin \phi)] = 0 \tag{21}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (22)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{uw}{x} = v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (23)$$

O campo de velocidades externo a camada limite pode ser modelado por um vórtice livre, onde a velocidade tangencial é inversamente proporcional a distância do eixo de rotação,

$$W_0(x) = \frac{\Gamma}{2\pi(x \sin \phi)} \quad (24)$$

onde  $\Gamma$  é a circulação. Considerando que o movimento axial do escoamento externo é desprezível,  $U_0(x) = 0$ , da equação de Euler, Eq. (17) obtêm-se o gradiente de pressão que atua na camada limite:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \frac{W_0^2}{r_0} \frac{dr_0}{dx} = \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 x^3 \sin^2 \phi} \quad (25)$$

Integrando-se Eq. (25) ao longo de  $x$  até  $L$ , obtêm-se a distribuição de pressão na camada limite:

$$P(L) - P(x) = \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 L^2 \sin^2 \phi} \left( \frac{L^2}{x^2} - 1 \right) \quad (26)$$

Através da Eq. (26), nota-se que a pressão diminui a medida que o escoamento se aproxima do vértice do cone. Este efeito causa uma aceleração no fluido da camada limite que causa a descarga efetiva do fluido pelo orifício de descarga do atomizador. Como o escoamento externo a camada limite possui um movimento axial desprezível, a descarga é resultante do escoamento da camada limite e representa um efeito tri-dimensional típico causado pela rotação do fluido na entrada.

Após substituir-se Eq. (25) na Eq. (22) chega-se as equações da camada limite que governam o escoamento no atomizador:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{x} = 0 \quad (27)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{x} = -\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 x^3 \sin^2 \phi} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (28)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{uw}{x} = v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (29)$$

Para resolver este conjunto de equações Taylor usou uma adaptação do método integral de Kármán-Pohlhausen (Moore, 1964; Schlichting, 1960). Uma distribuição qualitativa do campo de velocidades é mostrado na Fig. 8.

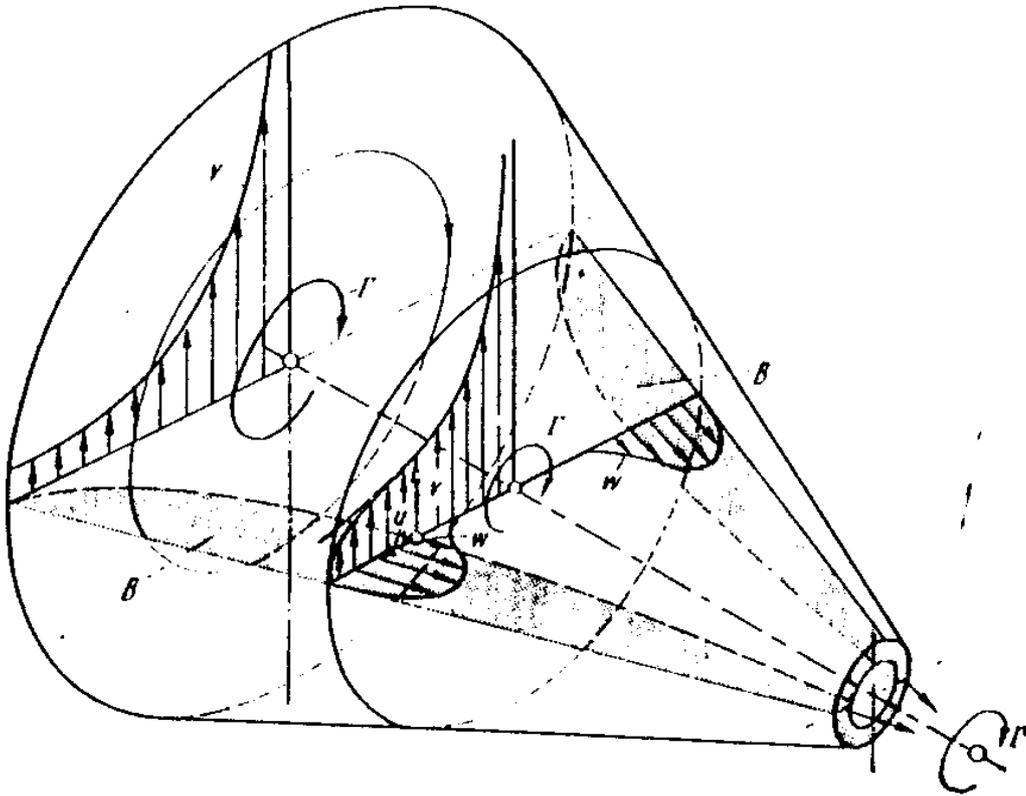


Fig. 8 - Campo de velocidades no atomizador de Taylor. A área hachurada G, representa a região de camada limite.

### Escoamento Axi-Simétrico com $\delta \gg r_0$

Até o momento foi visto simplificações nas Equações da Camada Limite Tri-Dimensional, Eq. (16), aplicáveis a corpos axi-simétricos onde o raio de curvatura transversa da superfície é muito maior que a espessura da camada limite, isto é;  $\delta \ll r_0$ . Entretanto existem muitos outros casos em que esta hipótese não é verdadeira. Considere por exemplo aplicações onde se deseja rebocar um longo cabo cilíndrico ou o escoamento na fuselagem de um míssil. Nestes casos, a camada limite que se desenvolve sobre a superfície cilíndrica haverá de ser, em algum ponto a jusante do corpo, maior que o raio deste cilindro e aí a hipótese cessa de ser válida. É importante avaliar quais as mudanças no escoamento quando  $\delta \gg r_0$  e como elas devem ser tratadas.

Como ponto de partida, deve-se reavaliar as hipóteses originais relativa a ordem de magnitude dos fatores de escala  $h$  com relação a espessura da camada limite  $\delta$ . Para este propósito, considere uma superfície cilíndrica desenvolvível como mostra a Fig. 9. A coordenada  $x$  foi escolhida de forma a ser paralela a geratriz da superfície, a coordenada  $y$  normal superfície e a coordenada  $\theta$  ao longo da superfície sendo ortogonal a  $y$  e  $x$ , conforme mostra a Fig. 9.

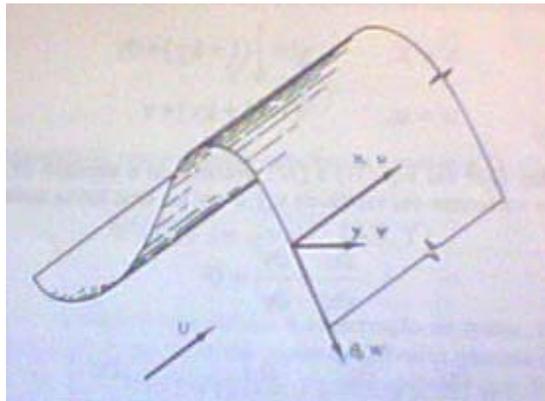


Fig. 9 - Coordenadas e velocidades para o escoamento sobre uma superfície cilíndrica.

Os fatores de escala associados as direções  $(x, \theta, y)$  são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_2 &= 1 + ky \\ h_3 &= 1 \end{aligned} \quad (30)$$

onde  $k$ , a curvatura lateral da superfície, é uma função de  $\theta$  apenas. Substituindo-se estas relações nas Eqs (6) e (12) e considerando que o escoamento externo é uniforme com velocidade  $U_0$  paralela a direção  $x$  e que a velocidade associada a direção  $\theta$  é nula, encontra-se as equações da conservação da massa e momento como:

$$\frac{\partial}{\partial x}[(1+ky)u] + \frac{\partial}{\partial y}[(1+ky)v] = 0 \quad (31)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{(1+ky)} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (32)$$

Para lidar com as Eqs. (31) e (32) é conveniente introduzir as transformações abaixo relacionadas:

$$\begin{aligned} x' &= x, & y' &= \int_0^y (1+ky) \bullet dy \\ u' &= u, & v' &= (1+ky) \bullet v \end{aligned} \quad (33)$$

Substituindo-se Eq. (33) nas Eq. (31) e (32), encontra-se a equação da conservação da massa e momento em termos das variáveis  $x', y', u'$  e  $v'$  em uma forma mais simplificada:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (31a)$$

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = v' \frac{\partial}{\partial y'} \left[ (1+2ky') \frac{\partial u'}{\partial y'} \right] \quad (32a)$$

Equações (31a) e (32a) são as equações da camada limite para corpos delgados ( raio de curvatura transversal menor que espessura da camada limite,  $r_0 \ll \delta$  ). Deve-se destacar que as Eqs (31a) e (32a) são semelhantes as equações do problema de Blasius a exceção do fator  $2ky'$ . É portanto fisicamente esperado que nas regiões próximas da montante da superfície, onde a camada limite não teve tempo suficiente para crescer, isto é,  $\delta \ll 1/k$ , a solução do problema deve se aproximar, assintoticamente, da solução de Blasius. Por outro lado, em regiões da superfície onde  $\delta \geq 1/k$ , o fator  $2ky'$  deve ser mantido na formulação. Neste caso, o problema não apresenta solução similar, entretanto é conveniente definir duas novas variáveis independentes, em analogia as soluções convencionais de camada limite bi-dimensionais, de modo que elas passam a refletir escalas para as direções  $x$  e  $y$  do escoamento:

$$X = 4k \sqrt{\frac{vx'}{U_0}}; \quad Y = \frac{y'}{2} \sqrt{\frac{U_0}{vx'}} \quad (33)$$

Reconhecendo que  $\delta(x')$  (solução de Blasius) é:

$$\delta(x') = 1 / \sqrt{\frac{U_0}{vx'}}$$

a variável  $X$  é proporcional ao produto:

$$X \approx k \cdot \delta(x')$$

lembrando que  $k$  é a curvatura,  $1/k$  é o raio de curvatura, logo  $X$  é proporcional a razão entre a espessura da camada limite,  $\delta(x')$ , e o raio de curvatura da superfície. Por sua vez, a variável  $Y$  é a razão entre a coordenada  $y'$  e a espessura da camada limite  $\delta(x')$ .

$$Y = \frac{y'}{\delta(x')}$$

Sem perda de generalidade, pode-se definir uma função corrente  $\psi'(x', y')$  tal que:

$$\Psi'(x', y') = \sqrt{vx'U_0} F(X, Y) \quad (34)$$

Note que Eq. (34) automaticamente satisfaz a conservação da massa, Eq. (31). O fator expresso pelo argumento da raiz quadrada ajusta as derivadas parciais de  $\psi$  de tal modo que ela satisfaça Eq. (31). Ele é semelhante ao fator utilizado por Blasius. A função  $F(X, Y)$  será definida pela solução da equação do momento, que é obtida a partir das derivadas parciais de  $\psi'$  como segue:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} = \sqrt{vx'U_0} \cdot \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y'} = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial Y} \\ v' &= -\frac{\partial \Psi'}{\partial x'} = -\left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{vU_0}{x'}} \cdot F + \sqrt{vx'U_0} \left( \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x'} \right) \right] = \\ &= \left( \frac{4kv}{2} \right) \cdot \left[ \frac{Y}{X} \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{F}{2} - \frac{\partial F}{\partial X} \right] \end{aligned}$$

as derivadas de ordem superior das velocidades podem ser obtidas através do mesmo procedimento. Por possuírem diversos termos, que depois de substituídos na equação do momento, Eq. (32), se cancelam elas não serão apresentadas. Após a substituição destes termos, equação do momento, em termos de  $F$  e suas derivadas, resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[ (1 + XY) \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + X \left[ \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial X} \right] = 0 \quad (35)$$

sujeito as condições de contorno:

$$Y = 0: F = \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial X} = 0; \quad Y \rightarrow \infty: \frac{\partial F}{\partial Y} = 2$$

O primeiro termo da Eq. (35) refere-se aos termos viscosos; o fator  $XY$  que multiplica a derivada segunda está associado ao efeito da curvatura transversal do corpo. Os segundo e terceiro termos referem-se aos termos convectivos, em particular o terceiro termo vem multiplicado pelo fator  $X$  que está associado ao efeito da curvatura transversal do corpo. O efeito da curvatura transversal destroi a similaridade da equação e o perfil de velocidades muda continuamente a medida que o escoamento se desenvolve ao longo da geratriz se afastando do bordo de ataque. Equação (35) e suas condições de contorno foram obtidas pela primeira vez por Seban e Bond (1951). Mais uma vez destaca-se na Eq. (35) sua semelhança com a Equação de Blasius quando  $X \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = 0; \quad \text{para } X \rightarrow 0$$

### Exemplo: Escoamento ao Longo da Geratriz de um Cilindro

O escoamento ao longo da geratriz de um cilindro, veja Fig. 10, foi originalmente tratado por Seban e Bond (1951). O escoamento externo ao cilindro de raio  $a$  possui velocidade  $U_0$ . A coordenada paralela a geratriz é  $x$  e  $y$  é a coordenada normal a superfície do cilindro.

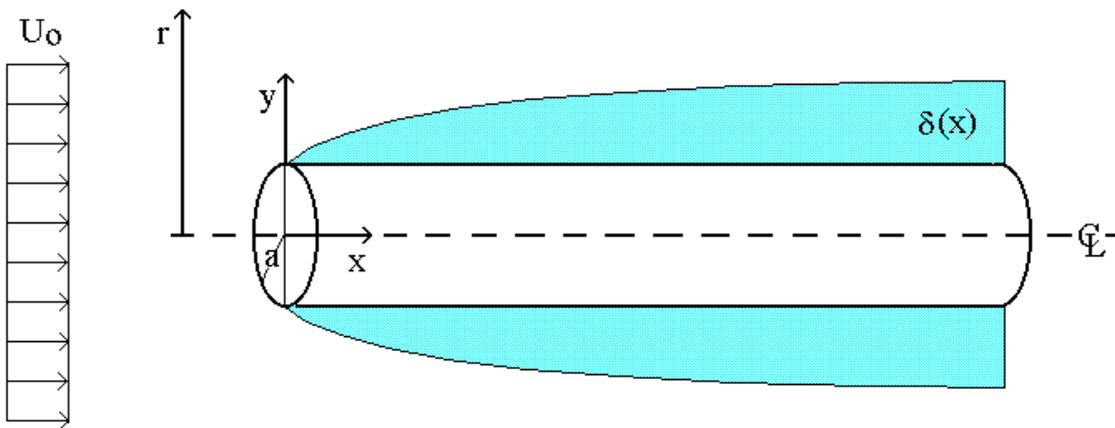


Fig. 10 - Escoamento ao longo da geratriz de um cilindro de raio  $a$ .

Neste caso particular a forma resultante das Eqs (31) e (32) é idêntica ao sistema de coordenadas cilíndricas, verifique. Isto de fato não é surpresa, por que sendo o cilindro de curvatura transversal constante  $1/a$ , o raio  $r$  e a coordenada  $y$  estão relacionados através:

$$r = \frac{1}{k} + y = a + y$$

Isto mostra que a camada limite ao longo da superfície da geratriz de um cilindro que possui uma seção regular, mas de forma arbitrária, se desenvolve exatamente da mesma forma de um cilindro circular equivalente cujo raio é  $a = 1/k$ .

Observando o carácter assintótico da Eq. (35), Seban e Bond propuseram uma solução obtida através do parâmetro de perturbação  $X$ . Expandindo a função  $F$  em série de Taylor com relação a  $X$  na vizinhança de  $X = 0$ , obtêm-se:

$$F(X, Y) = F_0(Y) + X \bullet F_1(Y) + X^2 \bullet F_2(Y) + O(X^3) \quad (36)$$

substituindo-se Eq. (36) na Eq. (35) e agrupando-se iguais potências de  $X$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} (X^0) \Rightarrow F_0''' + F_0 F_0'' &= 0 \\ Y = 0: F_0(0) = F_0'(0) &= 0; \quad Y \rightarrow \infty: F_0'(\infty) = 2 \end{aligned} \quad (37a)$$

$$\begin{aligned} (X^1) \Rightarrow F_1''' + F_0 F_1'' - F_0' F_1' + 2F_0'' F_1 + Y \bullet F_0'''' + F_0'''' &= 0 \\ Y = 0: F_1(0) = F_1'(0) &= 0; \quad Y \rightarrow \infty: F_1'(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (37b)$$

$$\begin{aligned} (X^2) \Rightarrow F_2''' + F_0 F_2'' - 2F_0' F_2' + F_0'' F_2 + F_1'' + Y \bullet F_1'''' \\ F_1 F_1'' + F_1 F_1'' + 2F_0'' - F_1' F_1' &= 0 \\ Y = 0: F_2(0) = F_2'(0) &= 0; \quad Y \rightarrow \infty: F_2'(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (37c)$$

O conjunto de equações (37) é resolvido utilizando-se, por exemplo, uma integração por Runge-Kutta. A Eq. (37a) é obtida primeiramente e na sequência são obtidas as equações (37b) e (37c). A solução apresenta boa concordância com dados experimentais até  $X \leq 0.16$ . Esta limitação na validade da solução é por que foi utilizado uma expansão de segunda ordem. Em termos práticos, isto significa que a solução representa o escoamento em cilindros "curtos", onde a razão entre a espessura da camada limite e o raio do cilindro é menor que 0.16.

Resolvendo-se Eq. (37), pode-se mostrar que o coeficiente de atrito é:

$$\frac{C_f}{C_{f_{\text{BLASIUS}}}} = 1 + 0.525 \bullet X - 0.120 \bullet X^2$$

onde  $C_{f_{\text{BLASIUS}}}$  é o coeficiente de atrito do escoamento sobre uma placa plana. Note que para  $X \rightarrow 0$   $C_f/C_{f_{\text{BLASIUS}}}$  tende a um, significando que o efeito da curvatura é desprezível (este comportamento já era previsto pela forma da Eq. (35)). A medida que  $X$  aumenta, nota-se que o coeficiente de atrito local do cilindro torna-se superior ao da placa plana. Esta tendência está mostrada na Fig. 11. Fisicamente falando, o fato de:  $C_f/C_{f_{\text{BLASIUS}}} > 1$  é esperado se considerar que a difusão de momento na superfície cilíndrica ocorre de maneira

mais "rápida" que em uma superfície plana por que a área cresce com o raio na superfície cilíndrica enquanto que na plana a área é constante com a coordenada normal a esta superfície.

Estas observações podem ser generalizadas no sentido que: **superfícies convexas ( $k > 0$ ) tendem a aumentar o fator de atrito em relação ao valor obtido por Blasius para a placa plana ; o inverso também é verdadeiro, superfícies concavas, ( $k < 0$ ) tendem a diminuir o fator de atrito em relação ao valor obtido por Blasius.**

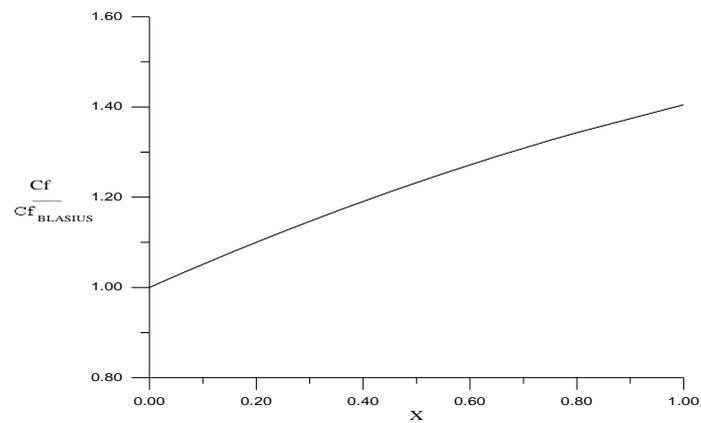


Fig. 11 - Coeficiente de atrito para cilindro paralelo a uma corrente uniforme.

## Jato Axi-Simétrico Laminar

Neste tópico será abordado o estudo de um jato laminar formado por um orifício circular que se mistura com o fluido ambiente. Vale destacar que a relevância desta análise é de carácter didático por que na maioria dos casos práticos o jato circular é turbulento. Entretanto, as equações resultantes para o caso turbulento são idênticas ao caso laminar.

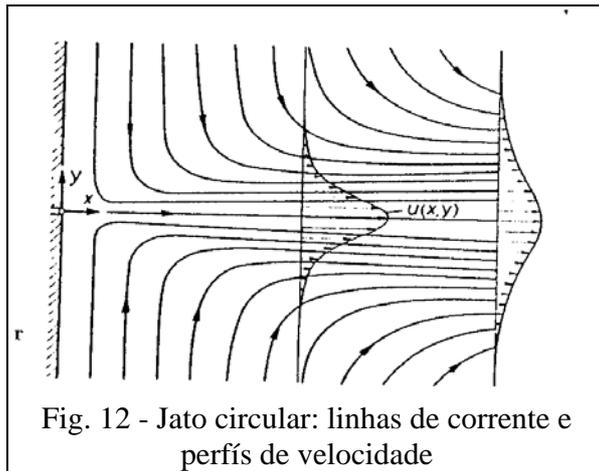


Fig. 12 - Jato circular: linhas de corrente e perfís de velocidade

A solução para o jato circular laminar é análoga ao caso bi-dimensional já estudado, veja Fig. 12. Será ressaltado algumas peculiaridades referentes a geometria axi-simétrica do escoamento. A pressão é considerada constante, como no caso bi-dimensional. O sistema de coordenadas adotado será o cilíndrico com o eixo x paralelo a direção do jato e o eixo r perpendicular. As componentes de velocidades serão u e v e correspondem as velocidades nas direções x e r, respectivamente.

A equação da conservação da massa e momento, utilizando as aproximações da camada limite, são representadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \quad (38)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (39)$$

As condições de contorno são:

$$\begin{array}{ll} r = 0 \text{ (linha de simetria)} : & v = 0; \quad \partial u / \partial r = 0 \\ r = \infty & : \quad u = 0 \\ x = x_0 & : \quad u \text{ e } v \text{ satisfeitos por similaridade} \end{array}$$

Além disto, pelo fato do gradiente de pressão ser nulo, o momento total do fluido deve-se conservar, isto é:

$$M = 2\pi\rho \int_0^{\infty} u^2 r dr = \text{const.} \quad (40)$$

A solução por similaridade é procurada fazendo-se:

$$\frac{[ru(r, x)]}{U(x)} = F'(\eta) \quad (41)$$

Na Eq. (41), destaca-se dois pontos: a) a similaridade que se procura é com a variável (ru) e não u; b) U(x) não é uma velocidade característica, U(x) tem dimensão de espaço ao quadrado por tempo. Neste sentido a busca por solução de similaridade difere, fundamentalmente do seu análogo bi-dimensional. A razão por se buscar uma similaridade do tipo proposto pela Eq. (41) é devido a forma da equação da conservação da massa, Eq. 38, escrita no sistema de coordenadas cilíndricas. A variável de similaridade  $\eta$  é escrita de forma similar aos casos bi-dimensionais:

$$\eta = r \bullet h(x) \quad (42)$$

O parâmetro U(x) ainda não especificado é determinado pela Eq. (40). Substituindo-se Eq. (42) e (41) na Eq. (40), encontra-se:

$$M = 2\pi\rho \int_0^{\infty} \frac{U^2(x) \bullet F'^2(\eta)}{\eta} \bullet d\eta = \text{const.} \quad (43)$$

Para que Eq. (43) seja satisfeita é necessário que ela seja independente de x, isto é, o parâmetro U(x) é uma constante:

$$U(x) = U = \text{const.} \quad (44)$$

o valor da constante U será determinado posteriormente com o auxílio da Eq. (43). Com o uso das Eqs. (41) e (42) pode-se escrever o valor de u e suas derivadas como segue:

$$(ru) = U \bullet F'(\eta) \quad (45a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U \frac{dh}{dx} F'(\eta) \quad (45b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = U \bullet h^2(x) \left( \frac{F''(\eta)}{\eta} - \frac{F'(\eta)}{\eta} \right) \quad (45c)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = U \bullet h^2(x) \left( F'''(\eta) - \frac{F''(\eta)}{\eta} + \frac{F'(\eta)}{\eta} \right) \quad (45d)$$

a velocidade v é obtida da equação da conservação da massa, Eq. (38) :

$$(rv) = - \frac{\partial}{\partial x} \int (ur) dr = \frac{U}{h^2} \frac{dh}{dx} (F - F'\eta) \quad (45e)$$

A principal razão de se escolher o produto  $(ru)$  ao invés da variável  $(u)$  como parâmetro de similaridade, veja Eq. (33), é para poder resolver a integral definida pela Eq. (37e). A escolha da variável  $(u)$ , apenas, na Eq. (33) impossibilita o cálculo.

Multiplicando-se ambos os lados da equação do momento, Eq. (39), por  $r$  e fazendo-se as substituições de seus termos pelas Eqs. (45 a - e), encontra-se:

$$\left( \frac{U}{vh^2} \frac{dh}{dx} \right) \left[ \frac{d}{d\eta} \left( \frac{FF'}{\eta} \right) \right] = \frac{d}{d\eta} \left( F'' - \frac{F'}{\eta} \right) \quad (46)$$

Equação (46) é independente de  $(x)$  somente se:

$$\frac{1}{h^2(x)} \frac{dh(x)}{dx} = \alpha = \text{constante} \Rightarrow h(x) = \frac{1}{\alpha x} \quad (47)$$

onde  $\alpha$  é uma constante a ser determinada. Substituição da Eq. (47) em (46) leva a:

$$\left[ \frac{d}{d\eta} \left( \frac{FF'}{\eta} \right) \right] = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{F'}{\eta} - F'' \right) \quad (48)$$

onde o valor da constante

$$\left( \frac{U}{v\alpha} \right) = 1 \quad (49)$$

foi escolhido, arbitrariamente, igual a unidade. A Equação (48) foi obtida originalmente por Schlichting em 1933. Integrando-se duas vezes Eq. (48), (realizando integração por partes onde necessário), chega-se a:

$$2\eta \frac{dF}{d\eta} - 4F + F^2 = 0 \quad (50)$$

cuja solução é:

$$F(\eta) = \frac{\eta^2}{1 + (1/4)\eta^2} \quad (51)$$

que satisfaz as condições de contorno do problema. Os valores das constantes  $U$  e  $\alpha$  podem agora serem determinados através das Eqs. (43) e (49), respectivamente em função do momento total  $M$ :

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{16} \frac{M}{\pi \rho v^2}} \quad \text{e} \quad U = \sqrt{\frac{3}{16} \frac{M}{\pi \rho}}$$

As relações entre a função F e suas derivadas com o campo de velocidades estão mostradas na Tabela 3.

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{16} \frac{M}{\pi \rho v^2}} \left( \frac{r}{x} \right) \quad \text{e} \quad U = \sqrt{\frac{3}{16} \frac{M}{\pi \rho}} \quad (52)$$

$$u = \frac{3}{8\pi} \frac{M}{\rho v x} [1 + (1/4)\eta^2]^{-2} \quad (53)$$

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi} \frac{M}{\rho}} \frac{1}{x} \left\{ \frac{\eta - (1/4)\eta^2}{[1 + (1/4)\eta^2]^2} \right\} \quad (54)$$

Tabela 4 - Relações entre F e suas derivadas com o campo de velocidades para um jato circular em regime laminar.

A Fig. 13 apresenta a distribuição de velocidades para um jato circular, de acordo com a Eq. (53). A abcissa é o valor da variável  $\eta$  definida pela Eq. (52) e a ordenada é a velocidade  $U^*$  definida por:

$$U^* = \frac{u}{U_M}; \quad U_M = \frac{3}{8\pi} \frac{M}{\rho v x} \quad (55)$$

Onde  $U_M$  é a velocidade máxima do jato. Ela ocorre na linha de centro ( $r = 0$ ) devido a simetria axial do problema.

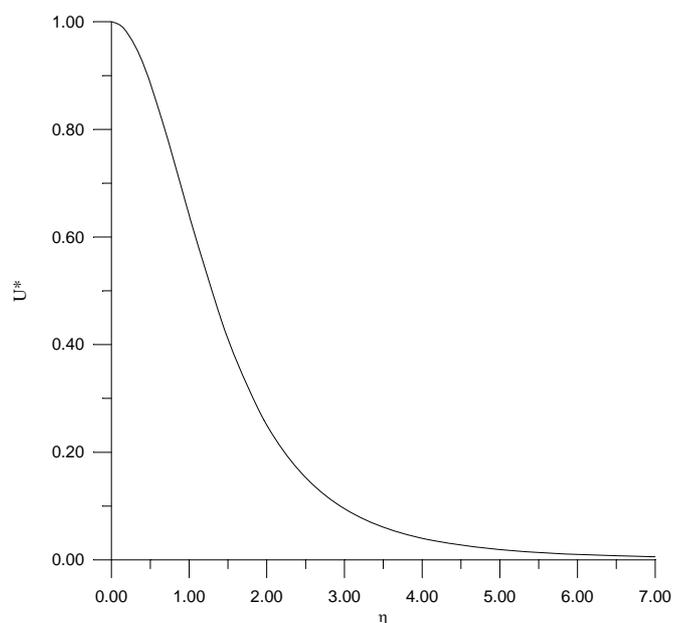


Fig. 13 - Perfil de velocidade axial do jato circular

Similar ao jato bi-dimensional, o jato circular não possui uma escala característica de velocidade que possa ser determinada a priori no início do problema. O decaimento da velocidade da linha de centro do jato é proporcional a  $x^{-1}$ , enquanto que para jato bi-dimensional ele ocorre proporcionalmente a  $x^{-1/3}$ . Definindo-se a largura do jato como sendo o valor onde a razão  $u/U_M = 0.01$ , encontra-se que  $\eta = 6$ . Logo a largura do jato,  $b$  é igual a:

$$b \approx 100 \sqrt{\frac{\rho v^2}{M}} x \quad (56)$$

Nota-se então que o jato circular espalha-se diretamente proporcional a  $x$ . Em relação ao momento  $M$  do jato pode-se afirmar então que quanto maior o momento do jato, menor é o seu espalhamento. Por motivos de comparação, o espalhamento no jato bi-dimensional é proporcional a  $x^{2/3}$ . O fato do jato circular espalhar-se mais rapidamente que o jato bi-dimensional pode também ser visto como uma manifestação do fenômeno de divergência comentado anteriormente.

Outra característica relevante é a vazão mássica através de uma seção transversal induzida pelo jato. Ela pode ser calculada através da integral

$$\dot{m} = 2\pi\rho \int_0^{\infty} (ru) \bullet dr = 8\pi\rho v x \quad (57)$$

Nota-se que a vazão mássica aumenta linearmente com  $x$  e é independente do momento  $M$ , que apenas modifica a largura do jato. Em comparação com o caso bi-dimensional existe uma grande diferença pois  $\dot{m} \approx (Mx)^{1/3}$ .

## Cilindro Inclinado com Relação ao Escoamento Externo

### Princípio da Independência

Será discutida uma classe de escoamentos de camada limite tri-dimensional na qual as equações diferenciais que governam o fenômeno são separáveis, significando que duas das velocidades podem ser determinadas de maneira totalmente independente da terceira. O problema mais representativo desta classe é o caso de superfícies com geometria cilíndrica inclinadas com relação a corrente livre (yawed cylinders) e foi desenvolvido pioneiramente por Prandtl em 1946.

Considere uma superfície cilíndrica, um aerofólio por exemplo, de comprimento infinito, que está inclinado em relação a direção do escoamento não perturbado, veja Fig. 14. O sistema de coordenadas  $(x,y,z)$  adotado corresponde, respectivamente, as direções: ao longo do bordo de ataque - direção  $(x)$ , normal a superfície - direção  $(y)$  e ao longo da geratriz - direção  $(z)$ . Como a superfície é infinita, no sentido que os efeitos das extremidades não perturbam o escoamento, nenhuma das variáveis do problema varia com  $z$ . Este fato introduz substanciais simplificações nas equações da camada limite que serão evidenciadas a seguir.

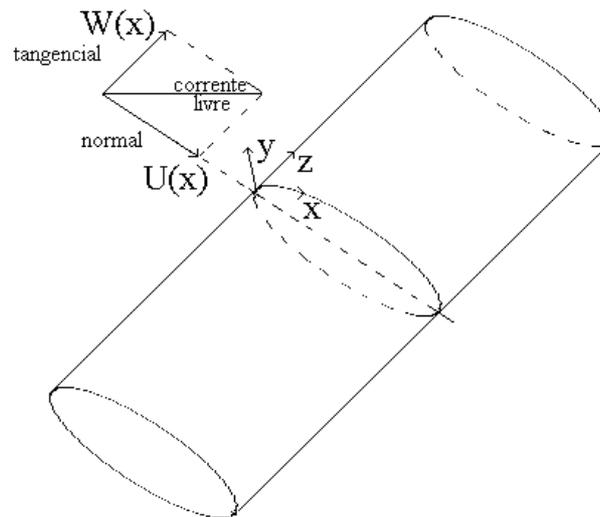


Fig. 14 - Coordenadas e velocidades para uma superfície cilíndrica de extensão infinita inclinada em relação a corrente livre.

A velocidade da corrente livre pode ser decomposta em duas componentes: uma normal a geratriz da superfície cilíndrica,  $U(x)$  e outra paralela a superfície cilíndrica  $W(x)$ . Destaca-se neste ponto que a velocidade externa  $W$  é uma função apenas da coordenada  $(x)$  por que a superfície tem simetria cilíndrica, isto é:  $\partial W/\partial z = 0$ . Fazendo-se as aproximações usuais da camada limite, conclui-se que os termos de atrito são proporcionais somente as derivadas na direção  $(y)$ , enquanto que os termos convectivos são retidos sem simplificação. Além disto, para a direção  $(x)$ , pode-se supor que a razão

entre a espessura da camada limite e o raio de curvatura é muito menor que a unidade de maneira que a equação do momento para esta direção pode ser escrita como se fosse para uma superfície plana. Assim, as equações da camada limite para este caso tomam a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (58)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (59)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (60)$$

sujeito às condições de contorno:

$$y = 0: \quad u = v = w = 0; \quad y = \infty: \quad u = U \quad e \quad w = W$$

Observando-se Eq. (58) e (59), nota-se que as velocidades  $u$  e  $v$  podem ser determinadas unicamente por este conjunto de equações que é idêntico ao caso bi-dimensional estudado. Por outro lado, a velocidade  $w$  é determinada pela Eq. (60) que é uma equação diferencial parcial linear em  $w$ <sup>1</sup>. Esta propriedade de separação de  $u$  e  $v$  de  $w$  que é denominada de **princípio da independência**.

Pelo princípio da independência, equações (58) e (59) podem ser tratadas como um caso bi-dimensional cuja superfície é definida pela seção transversal da superfície cilíndrica. As ferramentas de análise desenvolvidas para casos bi-dimensionais podem aqui também ser aplicadas. O método de solução das Eqs. (58) e (59) para superfícies cilíndricas cuja forma da seção transversal não permitem solução por similaridade, por exemplo: cilindros, elipses ou aerofólios, podem ser tratados através de métodos integrais, expansões por séries de potências ou métodos numéricos. Já para superfícies que permitem solução por similaridade, cunhas com simetria cilíndrica, pode-se aplicar a equação de Falkner-Skan.

Uma solução para superfícies em forma de cunha com simetria cilíndrica, veja Fig. 15, pode ser facilmente desenvolvida. Utilizando-se a variável de similaridade de Falkner-Skan,

$$\eta = y \sqrt{(m+1) \frac{U_0(x)}{2\nu}}; \quad U_0(x) = Kx^m \quad (61)$$

que transforma as Eqs. (58) e (59) em:

$$F''' + FF'' + \left( \frac{2m}{m+1} \right) (1 - F'^2) = 0 \quad (62)$$

<sup>1</sup>

Eq. (60), por coincidência, é similar a equação da energia da camada limite se  $w \rightarrow T$ , quando Prandtl do fluido é unitário e a dissipação viscosa é desprezível

com as condições de contorno:

$$F(0) = 0; F'(0) = 0 \text{ e } F'(\infty) = 1$$

e as velocidades  $u$  e  $v$  são definidas por:

$$\frac{u}{U_0} = F'(\eta) \text{ e } \frac{v}{U_0} = -\sqrt{\frac{\nu(m+1)}{2U_0x}} \left( F + \frac{m-1}{m+1} \eta F' \right) \quad (63)$$

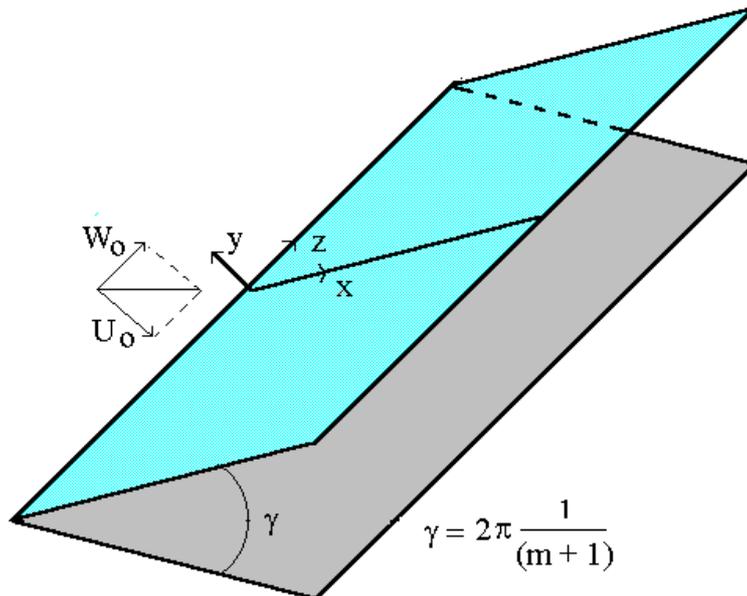


Fig. 15 - Superfície em forma de cunha com simetria cilíndrica inclinada em relação a corrente livre.

As soluções da Eq. (62) são os famosos perfis de Falkner-Skan e não necessitam serem calculados mais uma vez nesta etapa. Uma vez determinados  $u$  e  $v$  a partir dos perfis de Falkner-Skan, resta agora determinar a velocidade  $w$  dada pela Eq. (60). Como a velocidade externa,  $W_0$ , não depende das coordenadas  $(x,y,z)$   $w$  deve ser uma função de  $(x,y)$  apenas. Assumindo que  $w$  possa ser expresso através da mesma variável de similaridade:

$$\frac{w}{W_0} = G(\eta) \quad (64)$$

a Eq. (60) pode ser transformada em:

$$G'' + FG' = 0 \quad (65)$$

sujeita às condições de contorno:

$$G(0) = 0 \quad \text{e} \quad G(\infty) = 1$$

Como  $F$  é uma função conhecida de  $\eta$ , Eq. (65) pode ser integrada duas vezes para obter  $G(\eta)$  como:

$$G(\eta) = \frac{\int_0^\eta \left\{ \exp\left(-\int_0^\eta F d\eta\right) \right\} d\eta}{\int_0^\infty \left\{ \exp\left(-\int_0^\eta F d\eta\right) \right\} d\eta} \quad (67)$$

### Fenômeno de Separação em Superfícies Cilíndricas Inclinadas

Uma característica peculiar desta classe de escoamentos é quando ocorre a separação do escoamento. A Fig. 16 ilustra as linhas de corrente para o escoamento externo e a linha de corrente limite (a que ocorre na superfície do corpo). Note que enquanto que a linha de corrente do escoamento externo descreve um caminho que passa do bordo de ataque ao bordo de fuga da superfície, a linha de corrente limite é desviada de maneira assintótica para a linha de separação que por sua vez é paralela as linhas isobáricas do corpo.

Este fenômeno ocorre devido ao princípio da independência. A velocidade  $u$ , sendo incapaz de negociar com o gradiente de pressão adverso cessa de ocorrer na linha de separação. Por outro lado a velocidade  $w$ , que é independente da velocidade  $u$  e  $v$ , existe e é diferente de zero na linha de separação. Esta característica é exclusiva a escoamentos tri-dimensionais, porque o escoamento próximo da superfície toma a direção das linhas isobáricas na linha de separação, ao invés de descolar da superfície como ocorre com fenômenos de separação bi-dimensionais.

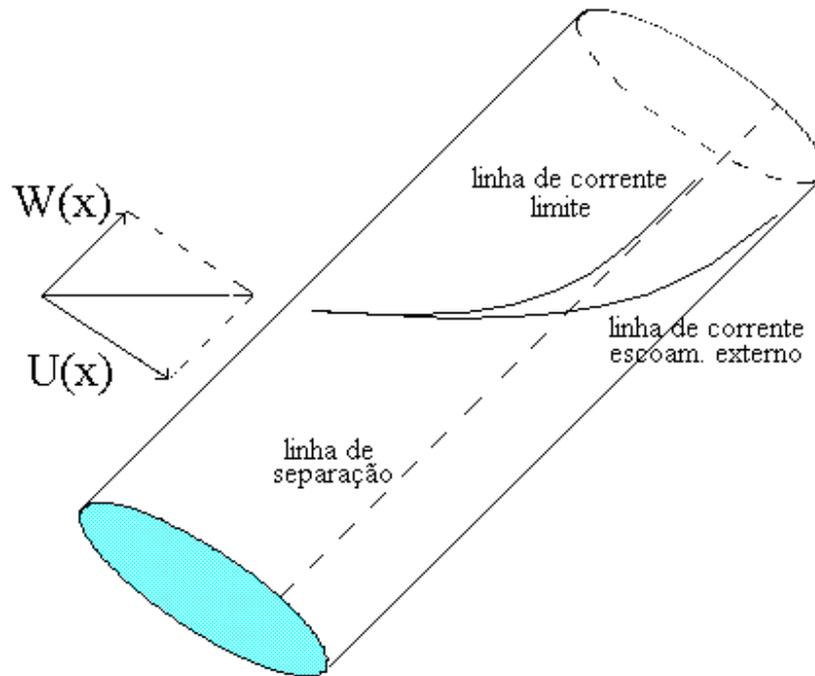
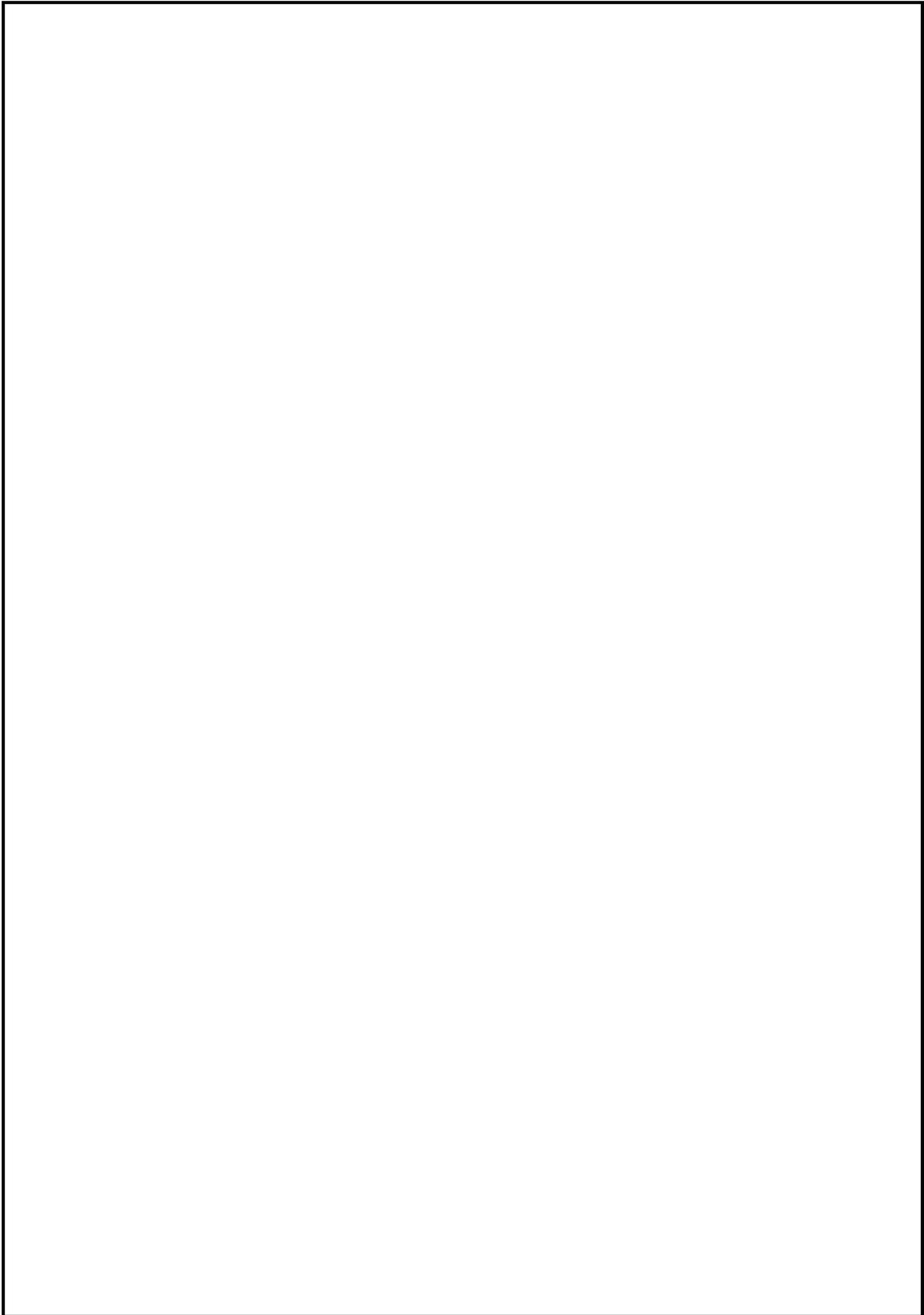


Fig. 16 - Representação esquemática da linha de corrente do escoamento externo e linha de corrente limite para um escoamento com separação sobre uma superfície cilíndrica com inclinação.

Este fenômeno é relevante no projeto de aerofólios que operam com um ângulo de inclinação em relação a corrente livre. A ocorrência de separação causa uma substancial mudança no padrão do escoamento e conseqüentemente na força de sustentação do corpo. Uma visualização das linhas de corrente limite é realizada através da identificação pelo escoamento de gotas de óleo na superfície de uma asa (Visualized Flow 1988). O controle parcial da separação pode ser realizado através da utilização de "cercas aerodinâmicas" que impedem parcialmente o escoamento do fluido ao longo da geratriz da superfície.





## Disco Rotativo de Von-Kármán

Talvez o primeiro estudo envolvendo escoamentos secundários em fluxos tri-dimensionais foi realizado por Von-Kármán em 1921. O assunto abordado foi relativo a indução de velocidades por um disco em rotação em um meio infinito e estacionário. Este trabalho pioneiro de Von-Kármán abriu fronteiras para uma série de estudos no que se chama hoje de escoamentos rotativos ou "swirling flows", com aplicações em diversas áreas entre elas: turbomáquinas, crescimento de cristais, transferência de calor em equipamentos eletrônicos, dispositivos cirúrgicos de assistência circulatória, lubrificação entre outras.

Deve-se destacar que a solução de Von-Kármán é uma das poucas soluções exatas das equações de Navier-Stokes que se tem conhecimento. Entretanto sua solução também apresenta um caráter das aproximações de camada limite quando a rotação do disco é elevada e portanto serve também para ilustrar os conceitos de camada limite<sup>2</sup>.

Considere um sistema fixo<sup>3</sup> de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  e imagine que uma superfície, de extensão infinita, e paralela ao plano  $z = 0$ , está girando com velocidade  $\omega$  com relação ao eixo  $r = 0$ , conforme mostra Fig. 17. As velocidades associadas às direções  $(r, \theta, z)$  são, respectivamente,  $(u, v, w)$ .

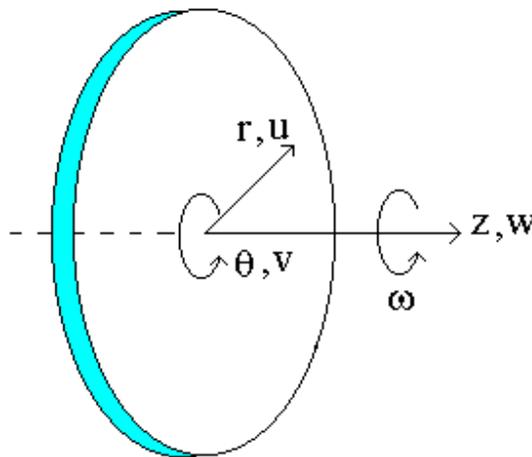


Fig. 17 - Sistema de coordenadas para o disco em rotação

---

2

O mesmo ocorre para o escoamento na vizinhança de um ponto de estagnação bi-dimensional (escoamento de Hiemenz). Neste caso a espessura da camada limite é constante e proporcional a  $\delta \approx \sqrt{\nu/K}$ .

3

A escolha de um sistema de coordenadas fixas não-rotativas elimina a necessidade de se introduzir os termos relativos a força de Coriolis nas equações do momento.

Neste problema a força motriz do escoamento é o torque externo aplicado ao disco. Este torque, necessário para manter o movimento de rotação do disco, é resistido pela força viscosa do fluido que está acima do disco. É através da viscosidade que as camadas de fluido são postas em movimento. Pela condição de não deslizamento, as camadas de fluido adjacentes ao disco possuem velocidade  $\omega r$  e este movimento é transmitido às camadas superiores através da difusão de momento (ou vorticidade) via viscosidade do fluido e transportado radialmente pelos termos inerciais, entre eles a força centrífuga. Um movimento do fluido próximo ao disco exatamente circular não é possível, desde que não há imposto nenhum gradiente de pressão radial em direção ao centro do disco, e portanto, o fluido próximo ao disco descreve uma trajetória espiral. Este movimento radial do fluido próximo ao disco deve ser acompanhado por um movimento axial em direção ao disco de maneira que o balanço de massa seja conservado. A existência deste fluxo axial previne que o momento (ou vorticidade) seja transportado via difusão por todo o campo do escoamento. As forças no fluido induzidas pela rotação do disco produzem um campo de velocidades tri-dimENSIONAL, veja Fig. 18, e fazem com que o disco haja como uma bomba centrífuga, projetando fluido na direção radial e succionando fluido em sua direção axial.

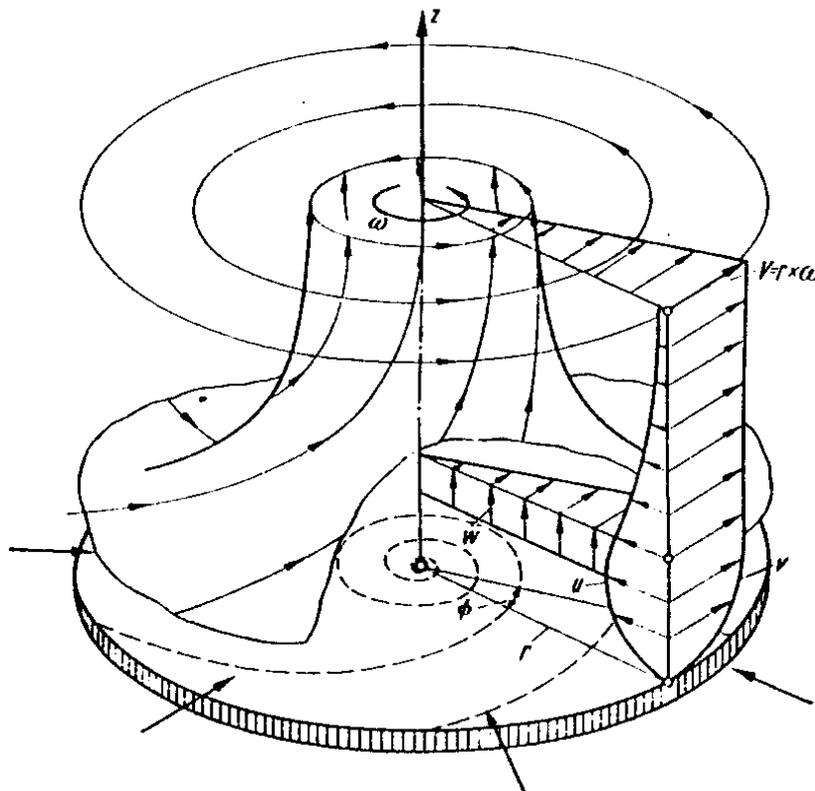


Fig. 18 - Escoamento laminar na vizinhança de um disco em rotação: a) linhas de corrente, b) componentes de velocidade.

Nas equações de conservação todas as três componentes de velocidade devem ser mantidas, entretanto, devido a simetria azimutal, elas são independentes de  $\theta$  assim

como a pressão  $p$ . Nestas condições, as equações da conservação da massa e do momento para as direções  $(r, \theta, z)$  são, respectivamente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (68)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (69)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{vu}{r} = v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (69)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (71)$$

O sistema de equações (68) a (71) é, por simples inspeção, complexo o suficiente para que mesmo se tente uma solução numérica. Todavia Von Kármán, em 1921, foi capaz de deduzir<sup>4</sup> uma solução apropriada para este sistema notando uma dependência linear das velocidades  $u$  e  $v$  na distância radial  $r$  em analogia a dependência da velocidade na parede do disco. De tal maneira que, o sistema de equações (68) a (71) e suas condições de contorno apropriadas (que serão discutidas em breve), permitem uma solução tal que  $u/r$ ,  $v/r$  e  $w$  sejam função da coordenada  $z$  apenas.

Antes de apresentar a análise, deve-se também destacar o comportamento do gradiente de pressão nas direções  $z$  e  $r$ . Pelo efeito de bombeamento produzido pela rotação do disco, é esperado que se tenha um gradiente de pressão negativo na direção  $z$ . Entretanto, na direção  $r$ , pelo fato do disco ser infinito e o fluido não ser contido pelas paredes de um reservatório, não há maneira de que se imponha um gradiente de pressão na direção radial. Deste modo espera-se que  $\partial p / \partial r = 0$  e, conseqüentemente,  $p = p(z)$ .

Para reduzir as equações (68) a (71) a um sistema de equações diferenciais ordinárias é necessário ainda que sejam definidas velocidades e dimensões características para o problema. Pela ação de bombeamento que a rotação do disco produz é plausível se supor que uma escala que expresse a ordem de magnitude da velocidade radial  $u$  seja a mesma da velocidade tangencial. Definindo uma dimensão radial característica  $R$ ,

$$u \approx O(\omega R) \quad \text{e} \quad v \approx O(\omega R) \quad (72)$$

Resta ainda definir uma dimensão característica para a direção  $z$ . Fazendo-se um balanço de forças em um elemento de fluido no disco, como mostra a Fig. 19, nota-se que, de maneira simplificada as forças principais que atuam são a força centrífuga que tende a

---

4

A capacidade para se poder chegar a esta analogia, que de modo algum é óbvia, deve-se a intuição da física do problema que Von Kármán possuía e que o coloca entre os grandes nomes na área de Mecânica dos Fluidos deste século.

impelir o elemento na direção radial (não há gradiente de pressão na direção radial) e a força viscosa que tende a se opor ao movimento:

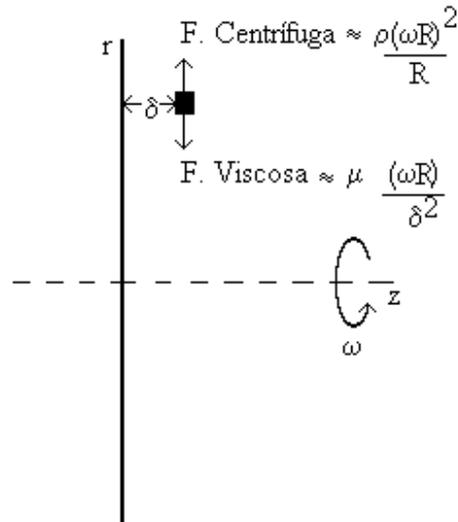


Fig. 19 - Balanço de forças num elemento de fluido a uma distância  $\delta$  do disco.

$$\mu \frac{(\omega R)}{\delta^2} \approx \rho \frac{(\omega R)^2}{R}$$

de onde se conclui que uma escala característica para a direção  $z$  é:

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad (73)$$

Esta escala mostra que a distância com que o momento (ou vorticidade) penetra no fluido é proporcional a raiz quadrada da razão entre a viscosidade cinemática e a rotação<sup>5</sup>. Ou seja, para uma mesma rotação quanto maior for a viscosidade do fluido maior é a camada de fluido acima dele que será afetada pelo seu movimento. Esta escala é fundamental para superfícies que descrevem movimentos rotativos e deve-se destacar o caracter distinto que apresenta a espessura de penetração contrapondo-se aos resultados obtidos da camada limite produzida por um escoamento externo onde se viu que:

<sup>5</sup>

Esta espessura de penetração de momento é o mesmo que a espessura da camada limite. Ela delimita uma região onde os efeitos viscosos estão confinados. Em particular, o resultado da Eq. (73) mostra que ela é uma constante, independente de  $r$ . Vale destacar que o mesmo ocorre para o escoamento de Hiemenz. Isto mostra que os efeitos de difusão e de convecção se balanceiam de maneira que a  $\delta$  permanece constante

$$\delta \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$$

Uma vez definido um comprimento característico para a coordenada  $z$ , pode-se definir uma variável adimensional  $z^*$  tal que <sup>6</sup>:

$$z^* = \frac{z}{\sqrt{\nu/\omega}} \quad (74)$$

Pela hipótese de dependência linear de  $u$  e  $v$  com  $r$ , as velocidades podem ser escritas em função de  $z^*$  como:

$$\frac{u}{\omega r} = F(z^*) \quad (75)$$

$$\frac{v}{\omega r} = G(z^*) \quad (76)$$

A velocidade axial descendente,  $w$ , não depende de  $r$ , mas a partir de uma análise de ordem de magnitude dos termos da equação da conservação da massa, Eq.(68), pode-se chegar a:

$$w \approx O(\omega\delta) = O(\sqrt{\omega\nu}) \quad (77)$$

e definir a velocidade  $w$  como:

$$\frac{w}{2\sqrt{\omega\nu}} = -H(z^*) \quad (78)$$

Com as velocidades  $(u,v,w)$  postas na forma descrita pelas equações (75), (76) e (77) os termos não nulos da equação do momento em  $z$ , Eq. (71) são:

$$w \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \frac{d^2w}{dz^2} \quad (79)$$

integrando-se uma vez em  $z$ , a pressão  $p$  pode ser obtida:

$$\frac{p}{\rho} = \nu \frac{dw}{dz} - \frac{1}{2} w^2 + \varphi(r) \quad (80)$$

---

<sup>6</sup>

O que se busca ao dividir  $z$  por  $\delta$  é ampliar a escala da coordenada  $z$ , visto que qualquer propriedade apresenta gradientes desprezíveis para  $z \gg \delta$ . O mesmo ocorre para a variável de similaridade  $\eta$  que é definida por  $\eta \approx y/\delta(x)$ .

onde  $\varphi$  é uma função de  $r$  apenas. Mas como, presumivelmente, o fluido não está em rotação para regiões distantes do disco,  $P$  deve ser independente de  $r$  quando  $z \gg \delta$  e portanto  $\varphi(r) = \text{constante}$ . O valor desta constante pode ser determinado conhecendo-se um valor de  $w$  que satisfaça eq. (80). Em particular no disco,  $z = 0$ ,  $w$  e  $dw/dz$  são nulos (não deslizamento e eq. da conservação da massa). Assim pode-se por que  $\varphi(r) = 0$  e, eq. (80) escrita em termos adimensionais torna-se:

$$P = -2(H' + H^2); \quad P = \frac{P}{\rho v \omega} \quad (81)$$

A equação da conservação da massa, Eq. (68), depois da substituições das velocidades na forma adimensional resulta em:

$$2F - H' = 0 \quad (82)$$

Na equação do momento em  $r$  os únicos termos não nulos quando  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes em  $r$  são:

$$\left(\frac{u}{r}\right)^2 + w \frac{d}{dz} \left(\frac{u}{r}\right) - \left(\frac{v}{r}\right)^2 = v \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{u}{r}\right) \quad (83)$$

que, após a substituição das velocidades em termos adimensionais, resulta em:

$$F^2 + 2HF' - G^2 = F'' \quad (84)$$

Note que a força centrífuga  $G^2$ , responsável pelo fluxo radial, é equilibrada pelos termos de convecção e tensão viscosa na direção  $z$ . De modo análogo, na equação do momento em  $\theta$ , os únicos termos não nulos são:

$$\frac{2uv}{r^2} + w \frac{d}{dz} \left(\frac{v}{r}\right) = v \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{v}{r}\right) \quad (85)$$

que em termos adimensionais resulta em:

$$2FG - 2HG' = G'' \quad (86)$$

A equação do momento em  $\theta$ , mostra que a velocidade tangencial é transportada por convecção  $HG'$  e difusão  $G''$  na direção  $z$ .

O sistema de equações (68) a (71), escrito em forma adimensional, fica sendo:

Eq. Conserv. Massa	$F - H' = 0$	(82)
Eq. Momento $r$	$F^2 - 2HF' - G^2 = F''$	(84)
Eq. Momento em $\theta$	$2FG - 2HG' = G''$	(86)

Eq. Momento em z	$P = -2(H' - H^2)$	(81)
------------------	--------------------	------

sujeito as condições de contorno:

em  $z^* = 0$

$u = 0,$	$F(0) = 0$	não deslizamento
$v = \omega r,$	$G(0) = 1$	não deslizamento
$w = 0,$	$H(0) = 0$	sem sucção ou injeção de massa
$p = 0,$	$P(0) = 0$	

em  $z^* \rightarrow \infty$

	$H'(\infty) = 0$	
$u = 0,$	$F(\infty) = 0$	não há movimento radial
$v = 0,$	$G(\infty) = 0$	não há movimento tangencial

as condições de contorno e r são satisfeitas pelo uso da dependência linear das velocidades u e v em r.

Note que a pressão é desacoplada das demais equações no sentido que equações (82), (84) e (86) podem ser resolvidas simultaneamente para F, G e H e posteriormente para P, Eq. (81). Observando-se também que, a Eq. (81) e demais equações que compõem o sistema apresentam derivadas de até primeira ordem em H, a condição de contorno para w em  $z^* \rightarrow \infty$  torna-se inexistente. Portanto, espera-se que  $H(\infty) \neq 0$  devido fluxo induzido pela rotação do disco.

O sistema de equações foi resolvido por Cochran em 1934. Para a solução deste sistema é necessário determinar valores iniciais para  $F'(0)$  e  $G'(0)$  tais que fazem com que  $F(\infty)$  e  $G(\infty)$  sejam nulos. Os valores iniciais de  $F'(0)$  e  $G'(0)$  encontrados por Cochran foram 0.51023 e -0.61592 respectivamente. Um método para solução do sistema pode ser implementado utilizando-se uma integração numérica através de uma rotina Runge-Kutta de 4ª ordem.

Apesar da equação da pressão ser independente, ela pode ser determinada simultaneamente com o sistema se escrita de forma conveniente para a rotina Runge-Kutta. Derivando-se Eq. (81) em relação a  $z^*$  e substituindo os termos equivalentes pela Eq. (82) chega-se que o sistema a ser resolvido numericamente é:

$$2F + H' = 0$$

$$F^2 + HF' - G^2 = F''$$

$$2FG + HG' = G''$$

$$P' = 2FH - 2F'$$

O sistema acima pode ser escrito em termos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem fazendo:  $Y(1) = H$ ,  $Y(2) = F'$ ,  $Y(3) = F$ ,  $Y(4) = G'$ ,  $Y(5) = G$  e  $Y(6) = P$ . e denominando-se por  $F$  as derivadas de  $Y$ . O sistema equivalente fica tendo seis variáveis:

$$\begin{aligned} F(1) &= -2 * Y(3) \\ F(2) &= -Y(5) * Y(5) + Y(3) * Y(3) + Y(2) * Y(1) \\ F(3) &= Y(2) \\ F(4) &= -2 * Y(5) * Y(3) + Y(1) * Y(4) \\ F(5) &= Y(4) \\ F(6) &= 2 * Y(1) * Y(3) - 2 * Y(2) \end{aligned}$$

A solução deste sistema está apresentada na Fig. 20 em termos da variável  $z^*$  e das funções  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $P$ .

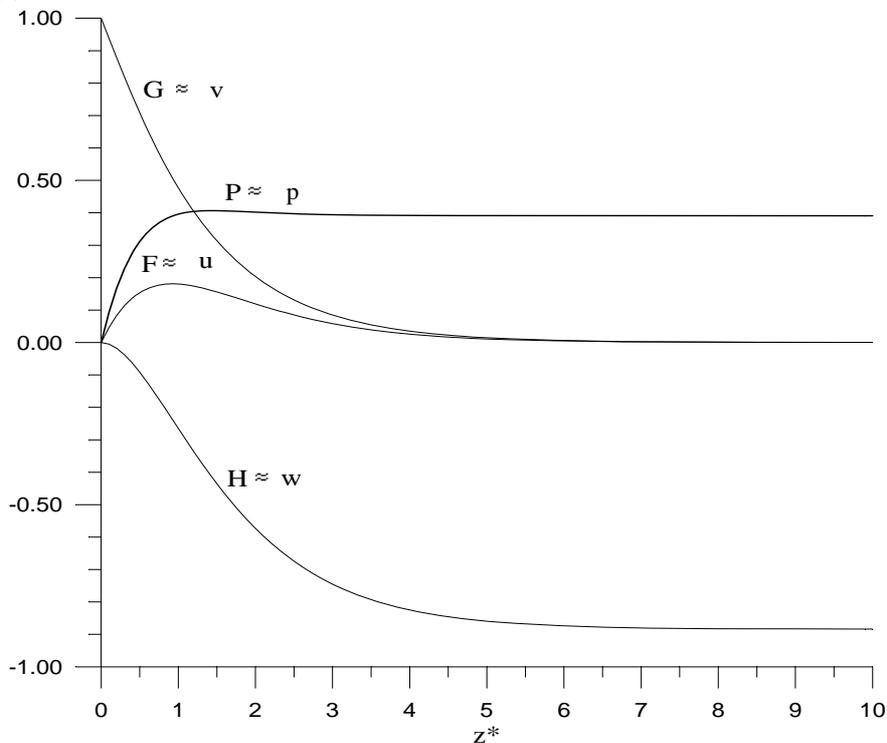


Fig. 20 - Componentes adimensionais das velocidades  $u, v$  e  $w$  resultantes do movimento de rotação de um disco infinito.  $z^*$  é a altura adimensional do disco definida na Eq. (74)

Diversos aspectos desta solução devem ser observados, entre eles: i) a velocidade tangencial  $v$  é monotonicamente decrescente, seu máximo ocorre no disco,  $z^* = 0$ , ii) a velocidade radial  $u$  atinge um máximo dentro do domínio e depois decai novamente para zero, iii) a velocidade axial  $w$  é sempre negativa e indica o influxo induzido pela rotação do disco. A análise deste campo de velocidades confirma a ação centrífuga de

bombeamento prevista pela rotação do disco. Se for definido a espessura da camada de fluido, onde os efeitos da ação da viscosidade estão confinados, pela região onde  $v/\omega r = 0.01$ , encontra-se que esta região possui espessura constante e igual a:

$$\delta = 5.4 \sqrt{\frac{v}{\omega}} \quad (87)$$

O valor da velocidade axial,  $w$ , externo a esta região é uniforme e igual a:

$$w = -0.89 \sqrt{\omega v} \quad (88)$$

indicando sempre um fluxo em direção ao disco devido ao deslocamento radial de fluido causado pelo efeito de rotação. A velocidade de aproximação  $w$  diminui a medida que  $v$  diminui, por que  $\delta$  se torna cada vez menor e conseqüentemente menos é fluido deslocado radialmente. A vazão,  $Q$ , de fluido deslocado radialmente através de qualquer superfície cilíndrica de raio  $r$ , concêntrica com o eixo de rotação, é:

$$Q = \pi r^2 (0.89 \sqrt{\omega v}) \quad (89)$$

A solução por similaridade obtida acima, referente às magnitudes das velocidades  $u, v$  e  $w$  e suas propriedades associadas, é válida para um disco infinito. Esta imposição significa dizer que as condições de contorno em  $r$  foram descartadas em favor de uma dependência linear de  $u$  e  $v$  em  $r$  e  $w$  sendo função de  $z$  sómente. Note que este fato está também refletido nas equações do momento, Eq. (83) e Eq. (85), onde não estão presentes termos associados a derivadas parciais em  $r$ . Em outras palavras, o fato do disco ser infinito em extensão impede que sejam colocadas condições de contorno na sua extremidade. A análise de discos finitos em extensão é um tanto mais elaborado e a priori não admite solução por similaridade por que é necessário que seja especificada uma condição de contorno na extremidade. Na verdade, é a condição de contorno na extremidade que distingue a solução entre um disco finito e outro infinito.

No entanto, a análise de Von-Kármán é útil sob, pelo menos, dois aspectos : i) ela é o ponto de partida para problemas mais complexos e soluções numéricas ou analíticas de outras configurações devem de uma maneira assintótica se aproximarem da solução de Von Kármán. ii) Casos de discos finitos, apesar de não possuírem solução por similaridade, podem ser razoavelmente aproximados pela solução de Von Kármán desde que:

$$\frac{\delta}{a} = \frac{\sqrt{v/\omega}}{a} \ll 1 \quad (90)$$

Equação acima é uma razão entre as dimensões características na direção normal ao disco e na direção radial. Quando  $\delta/a \ll 1$ , equivale a dizer que os gradientes envolvidos na direção  $z$  são muito maiores que os gradientes envolvidos na direção  $r$  e a solução assume o mesmo comportamento das aproximações de camada limite. Neste sentido, pode-se definir um número de Reynolds baseado na velocidade de rotação e no raio do disco como:

$$\text{Re}_a = \frac{(\omega a)a}{\nu}$$

que expressa a razão entre as forças inerciais (centrífuga) e viscosa. Baseado nesta definição de  $\text{Re}$ , a razão  $\delta/a$  fica:

$$\frac{\delta}{a} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_a}}$$

que é a característica principal de escoamentos com fenômeno de camada limite laminar.

Os resultados numéricos foram validados através de medidas experimentais do torque,  $M$ , exercido pelo fluido num disco de raio  $a$ . A expressão analítica para o torque  $M$  é mostrada abaixo e confirma uma excelente concordância com os resultados experimentais para  $\text{Re}_a$  de até  $3 \cdot 10^5$  onde o escoamento laminar transiciona para turbulento.

$$M = \int_0^a \tau_{z0} 2\pi r^2 dr = 0.616\pi r a^4 (\nu \omega^3)^{1/2} \quad \text{onde} \quad \tau_{z0} = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0}$$

## Referências & Leitura Complementar

Batchelor, G.K., "**An Introduction to Fluid Dynamics**", Cambridge Un. Press 1967

Compiled by the Japan Society of Mechanical Engineers, "**Visualized Flow**", Pergamon Press (1988)

Howarth, L., "**The Boundary Layer in Three Dimensional Flow. - Part I. Derivation of the Equations for Flow along a General Curved Surface**", Phil. Magazine, 42, March 1951, pp. 239-243

Moore, F.K., "**Theory of Laminar Flows**", Princeton University Press, 1964

Morse, P.M. and Feshbach, H.; "**Methods of Theoretical Physics**", McGraw Hill 1953

Rosenhead, L., "**Laminar Boundary Layers**", Oxford, 1963

Schlichting, H., "**Boundary Layer Theory**", McGraw Hill, 1960

Seban, R.A. and Bond, R.; "**Skin Friction and Heat Transfer Characteristics of a Laminar Boundary Layer on a Cylinder in Axial Incompressible Flow**", J. Aeronaut. Sci. 18, 671-675 (1951)

White, F.M., "**Viscous Flow**", McGraw Hill, 1974

Batchelor, G.K., "**Note on a Class of Solutions of the Navier-Stokes Equations Representing Steady Rotationally-Symmetric Flow**", Quart. J. Mech. and Appl. Math, vol.4, pp 29-41, 1951.