

Equações da Camada Limite Bi-Dimensional

Índice

Equações da Camada Limite Bi-Dimensional	1
Fenômeno da Camada Limite Hidrodinâmica	1
Expansão Externa: Escoamento sem Viscosidade.....	3
Expansão Interna: Equações da Camada Limite	4
Equações da Camada Limite em Termos da Função Corrente.....	11
Equações da Camada Limite ao Longo de Superfícies Curvas	12
Nota sobre a Classificação de Equações Diferenciais Parciais	15
Referências & Leitura Complementar.....	17

EQUAÇÕES DA CAMADA LIMITE BI-DIMENSIONAL

1. Fenômeno da Camada Limite Hidrodinâmica

A equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível com propriedades físicas constantes, pode ser escrita em termos adimensionais por:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla P + \left[\frac{1}{Re_L} \right] \cdot \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

onde as escalas características para espaço e velocidade são respectivamente, L e V_0 ; para o tempo, L/V_0 e para pressão ρV_0^2 . O parâmetro adimensional Re_L é o número de Reynolds definido por:

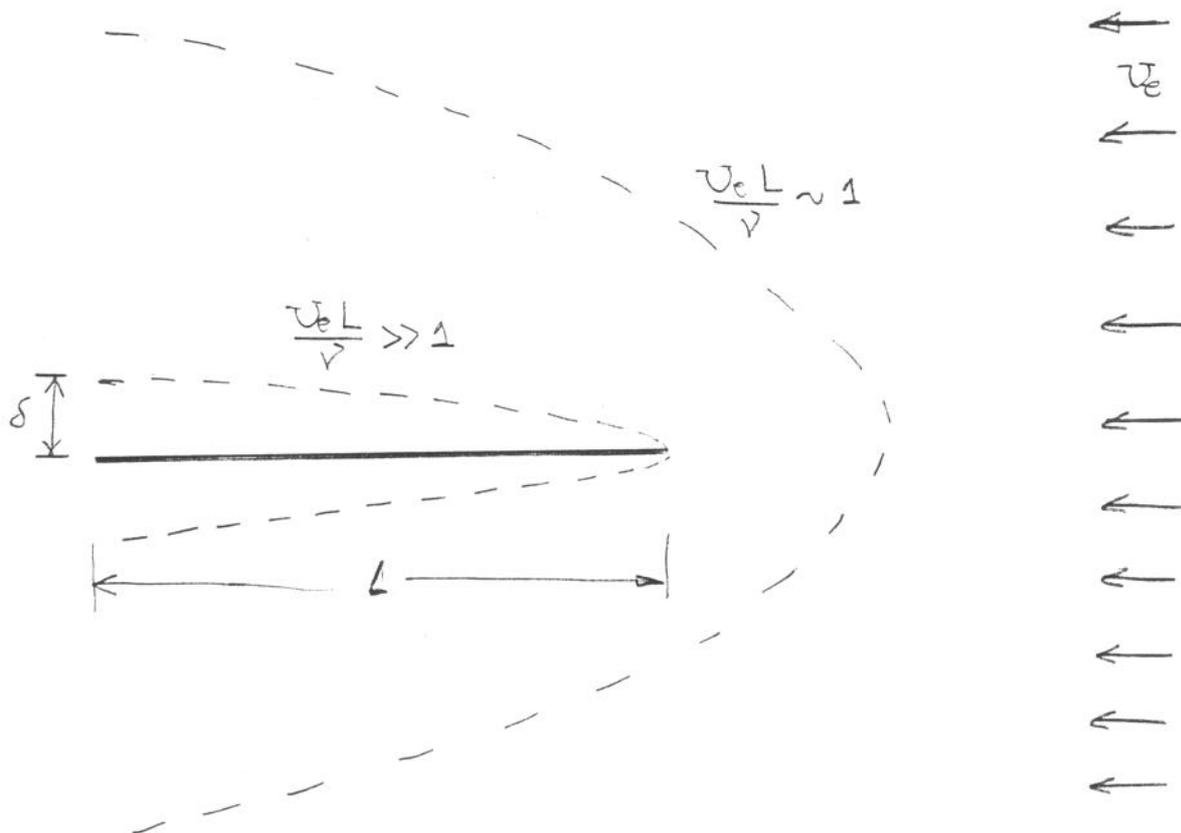
$$Re_L = \frac{\rho V_0 L}{\mu}$$

onde ρ e μ são respectivamente a densidade e a viscosidade dinâmica do fluido. Este adimensional expressa diretamente a razão entre a ordem de grandeza dos termos inerciais e os termos viscosos:

$$Re_L = \frac{[T. INERCIAIS]}{[T. VISCOSOS]} \simeq \frac{(\rho V_0^2 / L)}{(\mu V_0 / L^2)}$$

Uma das maneiras de se classificar escoamentos é através do número de Reynolds. Pelo fato dele vir multiplicando o termo de maior ordem da equação de N-S, as soluções possuem comportamento distinto para: $Re_L \rightarrow 0$ (escoamento com ausência de termos inerciais ou escoamento

de Stokes); $Re_L \simeq 0(1)$ (escoamento com termos inerciais da mesma ordem de grandeza dos termos viscosos) e $Re_L \rightarrow \infty$ (escoamento com ausência dos termos viscosos ou escoamento sem viscosidade ou escoamento ideal). A Figura abaixo mostra fisicamente estes limites para o escoamento sobre uma placa plana, com velocidade uniforme V_0 a montante da placa.



Note que para $Re_L \rightarrow 0$ a região onde os efeitos viscosos se propagam e estende-se a todo o campo do escoamento (este caso não está representado na Figura). Por efeitos viscosos entende-se o surgimento de gradientes de velocidade introduzidos pela condição de não deslizamento na superfície sólida da placa.

Para $Re_L \simeq 0(1)$ as forças inerciais e viscosas se equilibram, e a região onde os efeitos viscosos agem é mais próxima a

placa plana. A medida em que a difusão do momento ocorre da superfície sólida para o campo de escoamento, os termos convectivos tendem a "varrer" este efeito no sentido do escoamento. Como $Re_L \simeq O(1)$, os efeitos de difusão e de convecção são da mesma ordem de grandeza. Fora da região onde existem os efeitos viscosos o escoamento possui velocidade uniforme, isto é, o efeito da condição de não deslizamento não se faz sentir.

Na outra extremidade de nossa análise, quando $Re_L \rightarrow \infty$, os efeitos viscosos ficam confinados a pequenas regiões do campo de escoamento denominada por camada limite hidrodinâmica. Fisicamente, característica essencial da camada limite é ser uma região que apresenta um forte gradiente de velocidade na direção transversal ao escoamento. Fora dela o escoamento é uniforme. Matematicamente, este é um problema de perturbação singular. O parâmetro $(1/Re_L)$ é um parâmetro de perturbação. Isto indica que pode-se buscar uma solução aproximada para o problema dividindo-se em duas regiões: região externa (onde não há efeitos viscosos) e região interna, também conhecida por camada limite onde existem efeitos viscosos.

Expansão Externa para Placa Plana; Escoamento Básico sem Viscosidade

Para $Re_L \rightarrow \infty$, a Eq. (1) pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla P \quad (2)$$

que é também conhecida como equação de Euler. Deve-se observar, entanto, que ao omitir os termos viscosos na Eq. (2), por ser $(1/Re_L)$ vezes menores que os termos inerciais, a ordem da E.D.P. é reduzida de ordem dois para ordem um. Isto implica que a Eq. (2) não pode

satisfazer as condições de contorno que a Eq. (1) satisfazia. Retornando ao exemplo da Figura, ela só pode satisfazer a condição de velocidade uniforme para regiões afastadas da placa. A condição de não deslizamento não pode ser atendida pela Eq. (2).

Expansão Interna; Equações da Camada Limite; Casamento

A perda do termo com a derivada de ordem mais elevada é a marca clássica dos problemas de perturbação singular. É sabido que as soluções da Eq. (2) não são válidas próximo a superfície por que a condição de não deslizamento foi abandonada.

O que se busca agora é saber qual tipo de equação que se aplica a esta região do escoamento. Partindo-se da Eq. (1) que descreve o fenômeno global, o primeiro passo é efetuar uma análise da ordem de grandeza dos termos desta equação aplicados na região da camada limite. A fim de definir as escalas características do fenômeno é útil descrevê-lo qualitativamente através das Figuras abaixo.

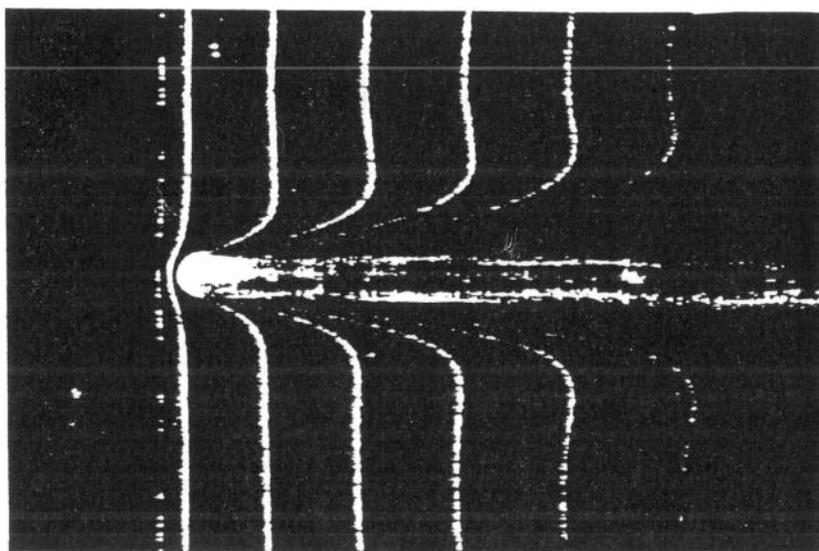


Fig. 20. Development of laminar boundary layer (0.01% salt water, free stream velocity 0.6 cm/s, thickness of the plate 0.5 mm, hydrogen bubble method).

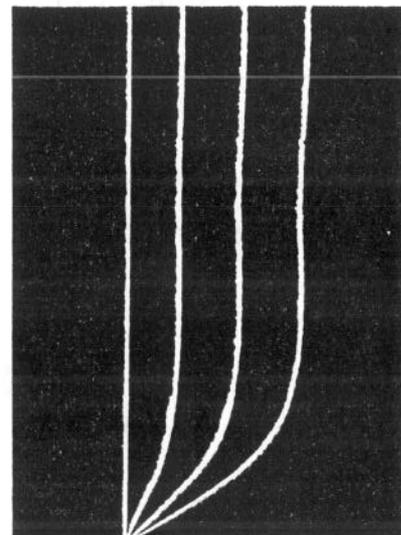
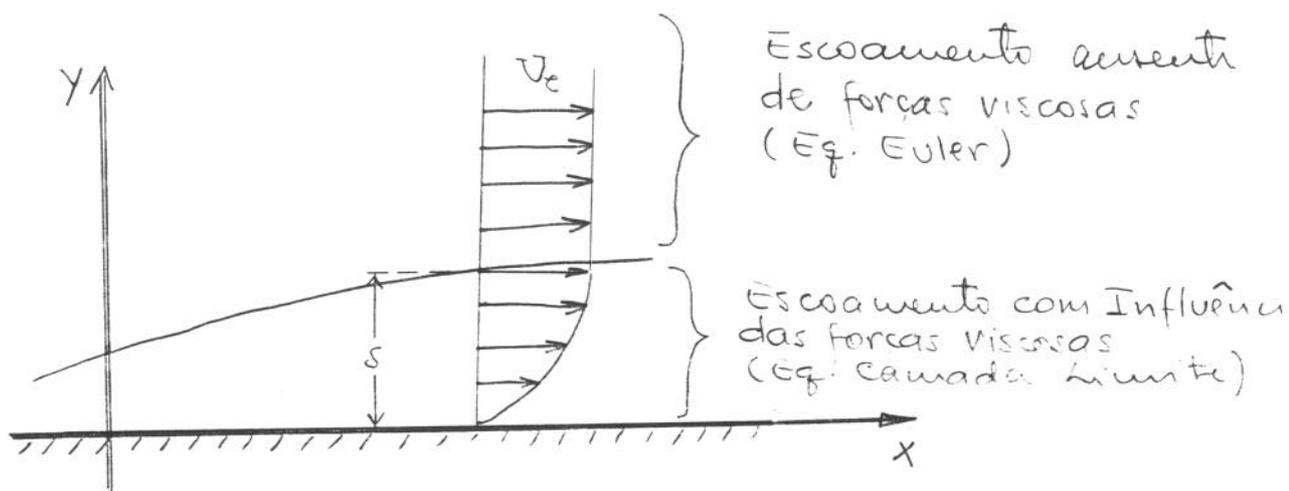


Fig. 21. Velocity profile in the laminar boundary layer (0.01% salt water, free stream velocity 0.6 cm/s, distance from the leading edge 200 mm, $Re = 1.2 \times 10^4$, hydrogen bubble method).



A fotografia superior mostra o perfil de velocidades para o escoamento em uma placa plana e o desenho acima ilustra as dimensões na direção y (δ), x (L) e a velocidade externa V_0 . É sabido que para $Re_L \rightarrow \infty$, a região onde os efeitos viscosos existe, δ , tende a zero. Assim parte-se do pressuposto que:

$$\delta/L \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad Re_L \rightarrow \infty$$

Tomando-se por dimensões características: δ , L e V_0 como sendo representativas para as direções y , x e velocidade na direção (x), as ordens de magnitude das variáveis do problema ficam então definidas por:

$$\begin{aligned} x &\simeq O(L) \\ y &\simeq O(\delta) \\ u &\simeq O(V_0) \\ P &\simeq O(\rho V_0^2) \text{ [escala inercial]} \end{aligned}$$

Da equação da continuidade obtêm-se a escala para a velocidade v ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

substituindo-se as escalas para u , x e y , obtêm-se:

$$\left(\frac{V_0}{L} \right) \simeq \left(\frac{V}{\delta} \right) \Rightarrow V \simeq V_0 \left(\frac{\delta}{L} \right)$$

portanto a ordem de magnitude da velocidade na direção y é:

$$v \simeq O(V) = O \left[V_0 \left(\frac{\delta}{L} \right) \right]$$

Com base na ordem de magnitude dos termos passa-se a analisar a equação do momento na direção (x) para avaliar a importância relativa dos termos:

TERMOS INÉRCIAIS	TERMOS PRESSÃO	TERMOS VISCOSOS
$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$	$= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$	$+ \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$
\downarrow	\downarrow	$\downarrow \quad \downarrow$
$O \left[\frac{V_0^2}{L} \right]$	$O \left[\frac{V_0^2}{L} \right]$	$O \left[\frac{V_0 \nu}{\delta^2} \left[\frac{\delta^2}{L^2} + 1 \right] \right]$

Note que nos termos viscosos, tem-se difusão de momento na direção (x) $(\delta/L)^2$ menor que a difusão na direção (y). Isto já era de se esperar por que nesta região os maiores gradientes ocorrem na direção transversal ao escoamento. Portanto, pode-se desprezar, em primeira aproximação, o termo $\partial^2 u / \partial x^2$ em relação ao termo $\partial^2 u / \partial y^2$ por que $(\delta/L) \ll 1$.

Com isto a equação do momento na direção (x) se reduz a:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Retornando a análise de ordem de magnitude dos termos, vamos agora comparar a ordem de grandeza dos termos inerciais com os termos viscosos. Isto pode ser feito dividindo-se por (V_0^2/L) em ambos os lados da equação:

TERMOS
INÉRCIAIS

TERMOS
PRESSÃO

TERMOS
VISCOSOS

$O(1)$

$O(1)$

$$O\left(\frac{\nu}{V_0 L} \left[\frac{L}{\delta}\right]^2\right)$$

isto pode ser $\rightarrow 0$ $\rightarrow \infty$ > *condição e solução divergentes*
 limite finito \rightarrow

Mas, dentro da camada limite, os termos viscosos devem possuir a mesma ordem de grandeza dos termos inerciais portanto:

$$\left(\frac{\nu}{V_0 L} \left[\frac{L}{\delta}\right]^2\right) \approx O(1), \quad \text{ou}$$

$$\left(\frac{\delta}{L}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{Re_L}} ;$$

$$Re_L = \frac{V_0 L}{\nu}$$

Equação (3) explicita a ordem de grandeza da espessura da camada limite em função do inverso da raiz quadrada do número de Reynolds

escoamento. Ela é uma das relações fundamentais no estudo de camada limite hidrodinâmica. Note que para $Re_L \rightarrow \infty$, $(\delta/L) \rightarrow 0$, como havia-se previsto anteriormente. Além disto, Eq. (3), é um teste para se saber se um dado escoamento externo aplica-se a uma análise de camada limite por que Re_L pode ser facilmente calculado a priori.

Desta análise também pode-se extrair informações sobre a ordem de magnitude da tensão de cisalhamento na parede, τ_w .

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} ; \tau_w \simeq 0 \left(\frac{\rho V_0^2}{\sqrt{Re_L}} \right)$$

Portanto o coeficiente de atrito de Fanno, $C_f = \tau_w / (0.5 \rho V_0^2)$, é da ordem de:

$$C_f \simeq \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

Passa-se agora à análise da equação do momento na direção (y). O procedimento é análogo ao descrito acima. Substituindo-se as respectivas escalas e dividindo-se todos os termos pelo termo inercial, encontra-se:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{TERMOS} & & \text{TERMOS} & & \text{TERMOS} \\
 \text{INÉRCIAIS} & & \text{PRESSÃO} & & \text{VISCOSOS} \\
 \\
 u \frac{\partial v}{\partial x} & + & v \frac{\partial v}{\partial y} & = & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} & + & \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \\
 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 o \left(\frac{\delta}{L} \right) & & o \left(\frac{L}{\delta} \right) & & o \left(\frac{\delta}{L} \right) \left[\frac{\nu}{V_o L} \frac{L^2}{\delta^2} \right]
 \end{array}$$

Mas,

$$\left(\frac{\delta}{L} \right) \ll 1 \quad \text{e} \quad \left[\frac{\nu}{V_o L} \frac{L^2}{\delta^2} \right] \approx 1$$

Nota-se então que o único termo de ordem de magnitude superior a demais termos é o gradiente de pressão na direção (y); para que todos os termos tenham a mesma ordem de grandeza, isto implica que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Equação (4) é a equação do momento na direção (y). Ela mostra que dentro da camada limite não há variação de pressão na direção (y); seja, a pressão que o escoamento externo, dado pela Eq. (2), transmite integralmente para dentro da camada limite. Denotando-se por P_e e U_e a pressão e velocidade do escoamento externo a camada limite da Eq. (2) tem-se



$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_e}{dx} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x}$$

De posse desta análise, pode-se apresentar as equações da camada limite hidrodinâmica em coordenadas cartesianas:

Eq. Massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Equação do Momento (x)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Equação do Momento (y)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Condições de Contorno:

Não Deslizamento $u(x,0,t) = 0; v(x,0,t) = 0$ ou

$\rightarrow u(x,0,t) = 0$ sem injeção ou sucção de massa, ou
 $v(x,0,t) = \pm v_w$ com injeção (+) ou sucção (-)

Condição Inicial $u(x,y,0) = f(x,y)$, f é conhecido em todo o campo

Condição de Entrada $u(x_0,y,t) = g(y,t)$, g é conhecido em x_0

Casamento com Escoamento Externo $u(x,y,t) = U(x,t)$, quando $y \rightarrow \infty$

Existem importantes detalhes a serem observados do conjunto de equações acima:

1. A Equação da Continuidade não é afetada pela análise da ordem de magnitude dos termos.
2. O gradiente de pressão na direção y é desprezível. Consequentemente a pressão é uma variável conhecida para as equações da camada limite, sendo dada pela análise do escoamento externo.
3. Todas as derivadas de segunda ordem com relação a (x) foram descartadas nas equações da camada limite. Isto trás duas consequências: *i*) as equações são agora parabólicas ao invés de elípticas, de modo que x é agora uma variável de marcha e as soluções analíticas e numéricas são relativamente mais fáceis; *ii*) algumas condições de contorno não podem ser mais satisfeitas notavelmente aquelas em v e em x . A variável v possui somente uma derivada parcial em y nas equações da camada limite, $\partial v / \partial y$, e os termos $\partial v / \partial x$ e todos os outros termos de segunda ordem em x e em y foram desprezados. Portanto v pode agora satisfazer apenas uma condição de contorno em uma posição y . A mais óbvia é a condição de não deslizamento: $v = 0$ em $y = 0$. As condições na entrada, inicialmente de casamento com o escoamento externo não são necessárias especificar.

Formulação da Equação da Camada Limite em Termos da Função Corrente

Em diversas situações é conveniente transformar a dependência de x e y , da equação da camada limite, para uma única variável ψ , a função corrente. Esta transformação aplica-se a escoamentos bi-dimensionais axi-simétricos. O interesse nesta transformação advém do fato que a equação da camada limite deixa de ser diferencial parcial para ser diferencial ordinária, entretanto passa a ser de terceira ordem em ψ enquanto que era de segunda ordem.

Considerando o caso bi-dimensional cartesiano, com variáveis (x, y) ; x ao longo do escoamento e y transversal ao escoamento, pode-

definir a função corrente como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

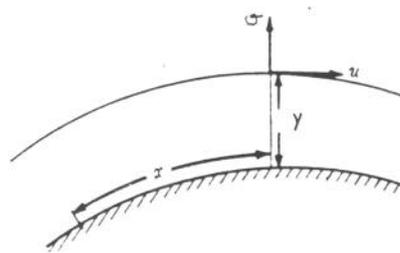
substituindo-se estas relações na equação da camada limite temos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{d U_e}{d t} + U_e \frac{d U_e}{d x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

sujeita as condições de contorno especificadas anteriormente.

Equações da Camada Limite para Escoamentos ao Longo de Superfícies Curvas

Quando a superfície na qual a camada limite se desenvolve é curva, é necessário desenvolver um sistema de coordenadas que se ajusta ao corpo, também conhecido como "body fitted coordinates". Neste sistema, a coordenada x é tomada ao longo do perímetro do corpo e a coordenada y é tomada como normal ao corpo, como ilustrado na figura abaixo



Coordinates for boundary-layer flow along
a curved surface.

As equações da conservação da massa e do momento devem ser modificadas para incluir o efeito da curvatura. Relativo a um sistema de

coordenadas ortogonais ajustado ao corpo, os fatores de escala associados são: $h_1 = (1 + Ky)$ e $h_2 = 1$ onde K é a curvatura da superfície; para uma superfície plana, $K = 0$, e para um vértice de 90 graus, $K = \infty$. As equações do movimento para um fluido viscoso neste sistema são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{1+\kappa y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\kappa}{1+\kappa y} uv \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{1+\kappa y} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{1}{(1+\kappa y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{y}{(1+\kappa y)^3} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\kappa}{1+\kappa y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\kappa^2}{(1+\kappa y)^2} u + \frac{1}{(1+\kappa y)^3} \frac{\partial \kappa}{\partial x} v + \frac{2\kappa}{(1+\kappa y)^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{1+\kappa y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\kappa}{1+\kappa y} u^2 \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{1}{(1+\kappa y)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{y}{(1+\kappa y)^3} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\kappa}{1+\kappa y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\kappa^2}{(1+\kappa y)^2} v - \frac{1}{(1+\kappa y)^3} \frac{\partial \kappa}{\partial x} u - \frac{2\kappa}{(1+\kappa y)^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [(1+\kappa y)v] = 0. \end{aligned}$$

Estas equações são exatas. Se for realizado o processo de aproximação desenvolvido anteriormente, a ordem de magnitude de h_1 é:

$$h_1 \simeq (1 + O(K\delta)),$$

mas

$$\delta \simeq L \operatorname{Re}_L^{-1/2}$$

logo,

$$h_1 \simeq (1 + O(KL \operatorname{Re}_L^{-1/2}))$$

desde que

$$K \ll \operatorname{Re}_L^{1/2} / L; \quad h_1 \simeq O(1)$$

como para escoamentos com fenômeno de camada limite, $\operatorname{Re}_L \rightarrow \infty$, é uma condição necessária, $h_1 \simeq 1$. Portanto as equações da camada limite para uma superfície curva com coordenadas ajustadas ao corpo são:

Eq. Massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Equação do Momento (x)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Equação do Momento (y)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = K \rho u^2$$

Isto mostra que a única diferença entre as equações da camada limite para superfícies planas ou curvas se encontram na equação do momento para a direção (y). $\partial P / \partial y$ é diferente de zero para balancear os efeitos centrífugos dado pela curvatura da superfície. Entretanto a variação de pressão normal a camada limite é ainda pequena,

$$\frac{\partial P}{\partial y} \approx O(K \rho U_e^2)$$

e pode ser desprezada; de maneira que,

$$- \frac{1}{\rho} \frac{d P}{d x} = \frac{d U_e}{d t} + U_e \frac{d U_e}{d x}$$

onde U_e é a velocidade do escoamento externo paralelo a superfície curva para $y = \delta$. Conclui-se então que as equações a serem resolvidas são exatamente as mesmas para uma superfície plana ou curva.

Nota Sobre a Classificação de Equações Diferenciais Parciais

Considere a equação diferencial parcial de segunda ordem:

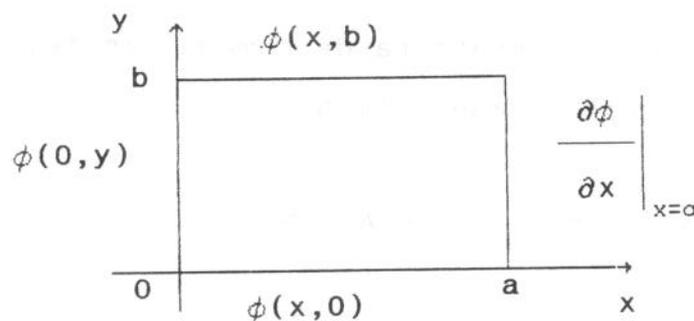
$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F\phi + G = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Se } B^2 - A.C &< 0 && \text{Equação Elíptica} \\ &= 0 && \text{Equação Parabólica} \\ &> 0 && \text{Equação Hiperbólica} \end{aligned}$$

Equações Elípticas $B^2 - A.C < 0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \lambda(x, y) = 0 \quad \text{Equação de Poisson}$$

Tipo de condição de contorno: é necessário que se especifique as condições de contorno em toda fronteira do domínio. Elas podem ser do tipo Dirichlet (ϕ na fronteira conhecido) ou do tipo Neumann ($\partial\phi/\partial n$ onde n é o vetor normal a fronteira, conhecido).



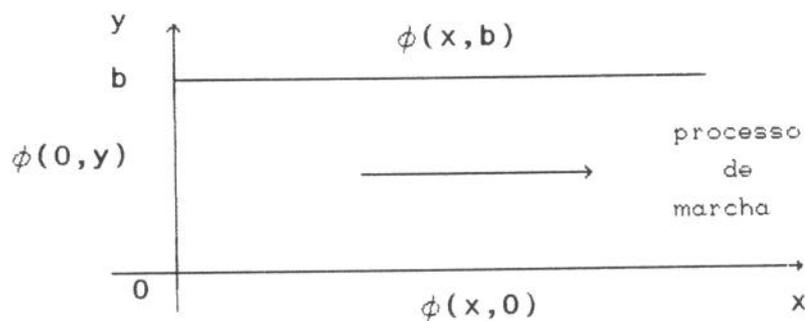
Dentro do domínio, a variável ϕ sofre a influência do valor que $\partial\phi/\partial n$ assume no contorno.

Equações Parabólicas $B^2 - A.C = 0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

Equação da condução de calor transiente, $(x \rightarrow t)$

Tipo de condição de contorno: é necessário especificar as condições de contorno em apenas três fronteiras, a quarta permanece aberta. A solução é um processo de marcha em direção a fronteira aberta. A informação provém apenas das fronteiras em $y = \text{constante}$ e da condição de contorno em $x = 0$.



Deve-se destacar as semelhanças com as condições de contorno da camada limite: $\phi(0,y)$ = condições de entrada para u ; $\phi(x,0)$ = condição de não deslizamento, $b = \delta$ espessura da camada limite, e, $\phi(x,b)$ = casamento com o campo de velocidade externo.

Equações Hiperbólicas $B^2 - A.C > 0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Equação da Onda

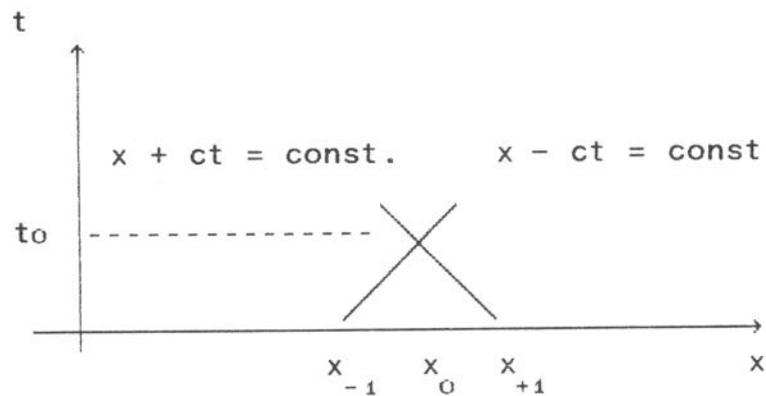
A solução geral é da forma:

$$\phi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Fazendo-se o argumento destas funções igual a uma constante, gera-se linhas características no plano (x,t) . Ao longo destas linhas, que atravessam todo domínio da solução, os valores de f e g são constantes. Portanto, para um domínio infinito, necessita-se apenas especificar as condições iniciais ao longo da linha $(x,0)$

$$\phi(x,0) = f(x) + g(x)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$



A solução em no ponto (x_0, t_0) é dada por:

$$\phi(x_0, t_0) = f(x_{-1}) + g(x_{+1})$$

Dentro do triângulo definido por x_{-1} , x_{+1} e t_0 todos os pontos sofrem influência dos valores que $f(x)$ e $g(x)$ assumem neste intervalo. Por outro lado, os valores que $f(x)$ e $g(x)$ assumem fora deste intervalo não afetam a solução dos pontos no interior do triângulo definido.

Referências:

- [1] Panton, R.L. "Incompressible Flow", John Wiley, 1984
- [2] Rosenhead, L., "Laminar Boundary Layers", Oxford, 1963
- [3] Meyer, R.E., "Introduction to Mathematical Fluid Dynamics", Dover 1982
- [4] Goldstein, S., "Modern Developments in Fluid Dynamics", Dover 1965
- [5] White, F.M., "Viscous Flow", Mc Graw Hill, 1974