SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONAIS

Prof. Eugênio Spanó Rosa
FEM-DE UNICAMP
erosa@fem.unicamp.br

Coordenadas Ortogonais

A equação de Navier-Stokes escrita na forma de operadores vetoriais e tensoriais,

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g} \tag{1}$$

aplica-se a qualquer sistema de coordenadas. Para que se possa expandir os termos da Eq. (1) em um sistema de coordenadas particular é necessário que se expresse os operadores: divergente, rotacional e gradiente para o sistema específico. O objetivo deste tópico é desenvolver as fórmulas necessárias para as transformações de coordenadas entre sistemas ortogonais.

Fatores de Escala

Dado um sistema de coordenadas ortogonal, (ξ_1, ξ_2, ξ_3), sua representação genérica é mostrada na Fig. 1

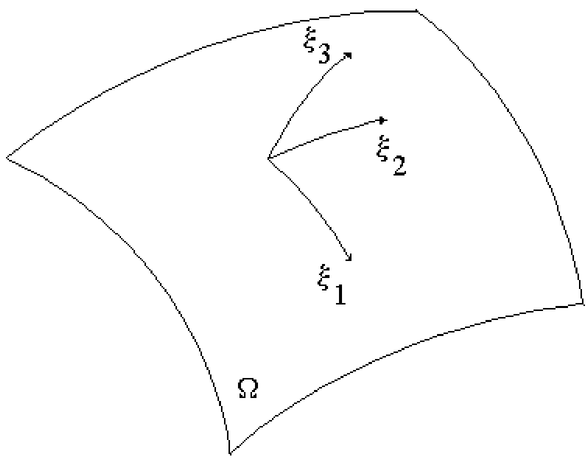

Fig. 1 - Sistemas de coordenas ortogonais.

O comprimento de um elemento de arco, $(ds)^2$, é invariante ao sistema de coordenadas utilizado. Para o sistema genérico,

$$(ds)^2 = h_1^2 (d\xi_1)^2 + h_2^2 (d\xi_2)^2 + h_3^2 (d\xi_3)^2 \tag{2}$$

ou em notação indicial,

$$(ds)^2 = h_i^2 (d\xi_i)^2$$

onde h_1, h_2 e h_3 são os fatores de escala que dependem das três coordenadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Se as coordendas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) são funções conhecidas de um sistema cartesiano (x,y,z) então os fatores de escala h_1, h_2 e h_3 são determinados por:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{h_1}\right)^2 &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\right)^2 \\
\left(\frac{1}{h_2}\right)^2 &= \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial z}\right)^2 \\
\left(\frac{1}{h_3}\right)^2 &= \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial z}\right)^2
\end{aligned} \qquad (3)$$

De modo inverso, se (x,y,z) são funções conhecidas de (ξ_1, ξ_2, ξ_3), então:

$$\begin{aligned}
(h_1)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\right)^2 \\
(h_2)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_2}\right)^2 \\
(h_3)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_3}\right)^2
\end{aligned} \qquad (4)$$

Jacobianos da Transformação

Nota-se pelas Eqs. (3) e (4) que os fatores de escala são determinados a partir do conhecimento da relação funcional entre o sistema (ξ_1, ξ_2, ξ_3) e o sistema cartesiano (x,y,z) e de suas derivadas. De maneira genérica pode-se representar as relações funcionais que associam pontos do espaço (ξ_1, ξ_2, ξ_3) para o espaço (x,y,z) como sendo:

$$\begin{aligned} x &= f(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ y &= g(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ z &= h(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \end{aligned} \tag{5}$$

desta maneira os planos definidos por ξ_1 = constante, ξ_2 = constante e ξ_3 = constante no espaço (x,y,z) determinam um sistema de coordenadas curvilíneas. De maneira análoga à Eq. (5), pode-se também definir as relações funcionais que associam pontos do espaço (x,y,z) para o espaço (ξ_1, ξ_2, ξ_3) :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \Gamma(x,y,x) \\ \xi_2 &= \Omega(x,y,z) \\ \xi_3 &= \Phi(x,y,z) \end{aligned} \tag{6}$$

Uma vez conhecendo-se as relações funcionais definidas pela Eq. (5) ou Eq. (6) pode-se determinar suas derivadas e os fatores de escala. O procedimento de obtenção das derivadas pode ser trivial dependendo da forma das Eqs. (5) ou (6) entretando, pode haver casos onde o trabalho algébrico torna-se custoso e/ou a obtenção das relações que levam de um plano a outro é mais fácil de se obter em um sentido, isto é, (x,y,z) $\rightarrow$ (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ou vice versa. Nestes casos torna-se justificável a aplicação de um método específico para este procedimento de obtenção das derivadas.

Pode-se representar de modo genérico a relação funcional entre os sistemas de coordenadas através das funções:

$$\begin{aligned} F(\xi_1,\xi_2,\xi_3,x,y,z) &= 0 \\ G(\xi_1,\xi_2,\xi_3,x,y,z) &= 0 \\ H(\xi_1,\xi_2,\xi_3,x,y,z) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

sendo que as funções F, G e H podem ser definidas a partir da Eq. (5),

$$\begin{aligned} F(\xi_1,\xi_2,\xi_3,x,y,z) &= 0 = f(\xi_1,\xi_2,\xi_3) - x \\ G(\xi_1,\xi_2,\xi_3,x,y,z) &= 0 = g(\xi_1,\xi_2,\xi_3) - y \\ H(\xi_1,\xi_2,\xi_3,x,y,z) &= 0 = h(\xi_1,\xi_2,\xi_3) - z \end{aligned} \tag{8}$$

ou a partir da Eq. (6),

$$\begin{aligned} &F(\xi_1,\xi_2,\xi_3,x,y,z)=0=\Gamma(x,y,x)-\xi_1\\ &G(\xi_1,\xi_2,\xi_3,x,y,z)=0=\Omega(x,y,z)-\xi_2\\ &H(\xi_1,\xi_2,\xi_3,x,y,z)=0=\Phi(x,y,z)-\xi_3 \end{aligned} \tag{9}$$

A escolha entre as definições estabelecidas pelas Eqs. (8) e (9) depende da facilidade com que se obtêm as relações definidas pelas Eqs. (5) ou (6).

Tomando-se o diferencial das funções F, G e H tem-se que:

$$\begin{aligned} &dF=F_{\xi1}d\xi_1+F_{\xi2}d\xi_2+F_{\xi3}d\xi_3+F_x dx+F_y dy+F_z dz=0\\ &dG=G_{\xi1}d\xi_1+G_{\xi2}d\xi_2+G_{\xi3}d\xi_3+G_x dx+G_y dy+G_z dz=0\\ &dH=H_{\xi1}d\xi_1+H_{\xi2}d\xi_2+H_{\xi3}d\xi_3+H_x dx+H_y dy+H_z dz=0 \end{aligned} \tag{10}$$

onde por questões de conveniência as derivadas parciais estão representadas por:

$$F_{\xi1}=\frac{\partial F}{\partial \xi_1},\ \text{etc}$$

A equação (10) define um sistema linear de equações em termos dos diferenciais (dx, dy, dz) e ($d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$). Tomando-se como variáveis independentes (ξ_1, ξ_2, ξ_3), a Eq. (10) na forma matricial fica sendo:

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix} dx\\ dy\\ dz \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} F_{\xi1}d\xi_1+F_{\xi2}d\xi_2+F_{\xi3}d\xi_3\\ G_{\xi1}d\xi_1+G_{\xi2}d\xi_2+G_{\xi3}d\xi_3\\ H_{\xi1}d\xi_1+H_{\xi2}d\xi_2+H_{\xi3}d\xi_3 \end{vmatrix} \tag{11a}$$

De modo análogo, caso as variáveis (x, y, z) sejam independentes,

$$\begin{vmatrix} F_{\xi1} & F_{\xi2} & F_{\xi3}\\ G_{\xi1} & G_{\xi2} & G_{\xi3}\\ H_{\xi1} & H_{\xi1} & H_{\xi1} \end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix} d\xi_1\\ d\xi_2\\ d\xi_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} F_x dx+F_y dy+F_z dz\\ G_x dx+G_y dy+G_z dz\\ H_x dx+H_y dy+H_z dz \end{vmatrix} \tag{11b}$$

A solução dos sistemas (11a) ou (11b) pode ser obtida através da regra de Cramer. Esta solução pode ser expressa em uma notação compacta definindo-se os determinantes jacobianos. A notação assemelha-se a um operador diferencial mas está associada ao cálculo do determinante formado pelas derivadas parciais das funções. Segue abaixo três exemplos do uso da notação e seus determinantes associados:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)} = \begin{vmatrix} F_{\xi_1} & F_{\xi_2} & F_{\xi_3} \\ G_{\xi_1} & G_{\xi_2} & G_{\xi_3} \\ H_{\xi_1} & H_{\xi_2} & H_{\xi_3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,y,z)} = \begin{vmatrix} F_{\xi_1} & F_y & F_z \\ G_{\xi_1} & G_y & G_z \\ H_{\xi_1} & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

Em particular deve-se destacar os jacobianos $\partial(F,G,H)/\partial(x,y,z)$ e $\partial(F,G,H)/\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ que estão associados, respectivamente, às transformações $(x,y,z) \to (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ e $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (x,y,z)$. A transformação existe desde que $\partial(F,G,H)/\partial(x,y,z) \neq 0$ e $\partial(F,G,H)/\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq 0$.

Tomando o sistema (11a), que leva a transformação do espaço $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (x,y,z)$, tem-se que as derivadas associadas, expressas em termos dos jacobianos, são:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,y,z)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}} \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_2,y,z)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}} \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_3} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_3,y,z)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_1} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,\xi_1,z)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}} \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,\xi_2,z)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}} \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_3} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,\xi_3,z)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_1} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,\xi_1)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}} \quad \frac{\partial z}{\partial \xi_2} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,\xi_2)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}} \quad \frac{\partial z}{\partial \xi_3} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,\xi_3)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

De maneira similar, tomando o sistema (11b), que leva a transformação do espaço $(x,y,z) \to (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, tem-se que as derivadas associadas, expressas em termos dos jacobianos, são:

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,\xi_2,\xi_3)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}}\quad \frac{\partial\xi_1}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,\xi_2,\xi_3)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}}\quad \frac{\partial\xi_1}{\partial z}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(z,\xi_2,\xi_3)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}}$$

$$\frac{\partial\xi_2}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,x,\xi_3)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}}\quad \frac{\partial\xi_2}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,y,\xi_3)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}}\quad \frac{\partial\xi_2}{\partial z}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,z,\xi_3)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}}$$

$$\frac{\partial\xi_3}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,x)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}}\quad \frac{\partial\xi_3}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,y)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}}\quad \frac{\partial\xi_3}{\partial z}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,z)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}}$$

Operadores Vetoriais e Tensoriais

A presente seção propõe-se apenas a mostrar algumas das formas dos operadores vetoriais e tensoriais mais comuns na área de mecânica dos fluidos. O desenvolvimento das fórmulas aqui apresentadas baseiam-se no cálculo tensorial e podem ser encontrado nas referências listadas no final do capítulo.

• **Gradiente de uma grandeza escalar** ψ - o resultado da operação é um vetor:

$$\nabla\psi = \vec{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} + \vec{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} + \vec{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_3} \tag{12}$$

onde e1, e2, e3 são vetores unitários nas direções (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Em notação indicial, Eq. (12) fica sendo:

$$(\nabla\psi)_i = \vec{e}_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i} \tag{12a}$$

• **Divergente de uma grandeza vetorial V** - o resultado da operação é um escalar:

$$\nabla\cdot\vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 V_1)}{\partial\xi_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 V_2)}{\partial\xi_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_3)}{\partial\xi_3}\right] \tag{13}$$

Em notação indicial a Eq. (13) fica sendo:

$$\nabla\cdot\vec{V} = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}V_i/h_i\right)}{\partial\xi_i}, \text{onde } \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \tag{13a}$$

• **Rotacional de uma grandeza vetorial V** - o resultado da operação é um vetor:

$$\nabla x V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e_1} & h_2 \vec{e_2} & h_3 \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} \tag{14}$$

Em notação indicial a Eq. (15) fica sendo:

$$\left(\nabla x \vec{V} \right)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{h_i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \left(h_k V_k \right)}{\partial \xi_j} \tag{14a}$$

onde g é definido como na Eq. (13a) e ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita definido por:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ se (ijk) for uma permutação (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)} \\ -1 \text{ se (ijk) for uma permutação (3,2,1), (2,1,3), (1,3,2)} \\ 0 \text{ quando dois ou três índices se repetem} \end{cases}$$

• **Laplaciano de uma grandeza escalar** ψ - o resultado da operação é um escalar:

$$\nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3} \right) \right] \tag{15}$$

Em notação indicial a Eq. (16) fica sendo:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \right) \tag{15a}$$

• **Gradiente de uma grandeza vetorial V** - o resultado da operação é um tensor:

$$\nabla \vec{V} = \begin{cases} V_{ii} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial V_i}{\partial \xi_i} + \sum_{k \neq i} \frac{1}{h_k} \frac{V_k}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial \xi_k} \\ V_{ij} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial V_j}{\partial \xi_i} - \frac{1}{h_i} \frac{V_j}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial \xi_i} \quad \text{para } i \neq j \end{cases} \tag{16}$$

• **Divergente de uma grandeza tensorial τ_{ij}** - o resultado da operação é um vetor:

$$\left(\nabla\cdot\tau\right)_i = \frac{h_i}{\sqrt{g}}\sum_j \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\tau_{ij}\sqrt{g}}{h_i h_j}\right) + \sum_j \frac{1}{h_j}\left(\frac{\tau_{ij}+\tau_{ji}}{h_i}\right)\frac{\partial h_i}{\partial\xi_j} - \sum_j \frac{1}{h_i}\left(\frac{\tau_{jj}}{h_j}\right)\frac{\partial h_j}{\partial\xi_i} \quad (17)$$

• **Laplaciano de uma grandeza vetorial V** - o resultado da operação é um vetor:

O laplaciano de uma grandeza vetorial pode ser calculado através da identidade mostrada na Eq. (18). As operações que definem os termos (I) e (II) estão definidos pelas Eqs. (13), (14) e (15).

$$\nabla^2\vec{V} \equiv \underbrace{\nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)}_{I} - \underbrace{\nabla x\left(\nabla x\,\vec{V}\right)}_{II} \quad (18)$$

Passa-se agora a mostrar a forma dos termos (I) e (II). O termo (I) da Eq. (18) é:

$$\begin{aligned}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) = &\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\sqrt{g}V_1}{h_1}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\sqrt{g}V_2}{h_2}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\sqrt{g}V_3}{h_3}\right)\right]\vec{e}_1 \quad (18\text{-I})\\ &+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\sqrt{g}V_1}{h_1}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\sqrt{g}V_2}{h_2}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\sqrt{g}V_3}{h_3}\right)\right]\vec{e}_2\\ &+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\sqrt{g}V_1}{h_1}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\sqrt{g}V_2}{h_2}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\sqrt{g}V_3}{h_3}\right)\right]\vec{e}_3\end{aligned}$$

I

Em notação indicial a Eq. (18-I) fica sendo:

$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left[\sum_j \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\sqrt{g}V_j}{h_j}\right)\right] \quad (18a\text{-I})$$

O termo (II) da Eq. (18) é:

$$\underset{\mathrm{II}}{\nabla x\left(\nabla x \vec{V}\right)} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e_1} & h_2 \vec{e_2} & h_3 \vec{e_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} \\ \dfrac{h_1}{\sqrt{g}}\left[\dfrac{\partial}{\partial \xi_2}(h_3 V_3) - \dfrac{\partial}{\partial \xi_3}(h_2 V_2)\right] & \dfrac{h_2}{\sqrt{g}}\left[\dfrac{\partial}{\partial \xi_3}(h_1 V_1) - \dfrac{\partial}{\partial \xi_1}(h_3 V_3)\right] & \dfrac{h_3}{\sqrt{g}}\left[\dfrac{\partial}{\partial \xi_1}(h_2 V_2) - \dfrac{\partial}{\partial \xi_2}(h_1 V_1)\right] \end{vmatrix}$$

(18-II)

a componente na direção e_1 da Eq. (18-II) fica sendo:

$$\frac{h_1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{h_3}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}(h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial \xi_2}(h_1 V_1)\right]\right) - \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{h_2}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_3}(h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial \xi_1}(h_3 V_3)\right]\right)\right\}\vec{e_1}$$

Em notação indicial a Eq. (18-I) toma a forma:

$$\left(\nabla x \nabla x \vec{V}\right)_p = \frac{h_p}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[\frac{\varepsilon_{ijk} h_k}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi_p}\left(h_j V_j\right) - \frac{\varepsilon_{ijk} h_k}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(h_p V_p\right)\right] \qquad \text{(18a-II)}$$

• **Produto escalar entre um vetor e um tensor** - o resultado da operação é um vetor:

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} =$$

$$[V_1, V_2, V_3] \bullet \begin{vmatrix} \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial V_1}{\partial \xi_1} + \dfrac{V_2}{h_2 h_1}\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi_2} + \dfrac{V_3}{h_3 h_1}\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi_3} & \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial V_2}{\partial \xi_1} - \dfrac{V_1}{h_2 h_1}\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial V_3}{\partial \xi_1} - \dfrac{V_1}{h_3 h_1}\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi_3} \\ \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial V_1}{\partial \xi_2} - \dfrac{V_2}{h_1 h_2}\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial V_2}{\partial \xi_2} + \dfrac{V_1}{h_1 h_2}\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi_1} + \dfrac{V_3}{h_3 h_2}\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi_3} & \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial V_3}{\partial \xi_2} - \dfrac{V_2}{h_3 h_2}\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi_3} \\ \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial V_1}{\partial \xi_3} - \dfrac{V_3}{h_1 h_3}\dfrac{\partial h_3}{\partial \xi_1} & \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial V_2}{\partial \xi_3} - \dfrac{V_3}{h_2 h_3}\dfrac{\partial h_3}{\partial \xi_2} & \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial V_3}{\partial \xi_3} + \dfrac{V_1}{h_1 h_3}\dfrac{\partial h_3}{\partial \xi_1} + \dfrac{V_2}{h_2 h_3}\dfrac{\partial h_3}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} \qquad (19)$$

a componente na direção e1 da Eq. (19) é obtida fazendo-se o produto linha coluna entre o vetor V e o tensor ∇V,

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)_1 = \left[\underbrace{\frac{V_1}{h_1}\frac{\partial V_1}{\partial \xi_1}+\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial V_1}{\partial \xi_2}+\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial V_1}{\partial \xi_3}}_{V\bullet\vec{\nabla}V_1}+\frac{V_1V_2}{h_2h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2}+\frac{V_1V_3}{h_3h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}-\frac{V_3V_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1}-\frac{V_2V_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}\right]\vec{e}_1 \qquad (20)$$

Exemplo

A transformação $x = r.\cos(\theta)$, $y = r.\sin(\theta)$, $z = z^*$ permite passar de coordenadas retangulares a coordenadas cilindricas polares. Nesta transformação calcule: a) os fatores de escala; b) o gradiente de um escalar ψ; c) o divergente de um vetor V com componentes nas direções r,θ,z^* definidas por V_r, V_θ e V_{z*}; d) o rotacional de um vetor V; e) o gradiente de um vetor V; e g) o divergente de um tensor τ.

a) para calcular os fatores de escala é necessário definir as relações funcionais entre os sistemas de coordenadas conforme sugerido pela Eq. (8)

$$F\left(r,\theta,z^*,x,y,z\right) - r\cdot\cos\left(\theta\right) + x = 0$$
$$G\left(r,\theta,z^*,x,y,z\right) - r\cdot\sin\left(\theta\right) + y = 0$$
$$H\left(r,\theta,z^*,x,y,z\right) - z^* + z = 0$$

as derivadas das funções F, G, H são:

$$\begin{array}{lll} F_r = \cos(\theta) & G_r = \sin(\theta) & H_r = 0 \\ F_\theta = -r\cdot\sin(\theta) & G_\theta = r\cdot\cos(\theta) & H_\theta = 0 \\ F_{z^*} = 0 & G_{z^*} = 0 & H_{z^*} = 1 \\ F_x = -1 & G_x = 0 & H_x = 0 \\ F_y = 0 & G_y = -1 & H_y = 0 \\ F_z = 0 & G_z = 0 & H_z = -1 \end{array}$$

O jacobiano da transformação $(r,\theta,z^*) \rightarrow (x,y,z)$,

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv -1$$

a derivada parcial de x com relação a r, mantendo θ e z* constantes, pode ser obtida diretamente das definiçoes dos determinantes jacobianos,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(r,y,z)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}} \equiv -\frac{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{(-1)} \equiv \cos(\theta)$$

as demais derivadas são calculadas usando-se o mesmo procedimento. Para referência elas estão mostradas a seguir:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \cdot \sin(\theta) \quad \frac{\partial x}{\partial z^*} = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cdot \cos(\theta) \quad \frac{\partial y}{\partial z^*} = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial z^*} = 1$$

A partir das derivadas pode-se determinar os fatores de escala através da Eq. (4),

$$(h_r)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1$$

$$(h_\theta)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = r^2$$

$$(h_{z^*})^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z^*}\right)^2 = 1$$

b) o gradiente de um escalar ψ é obtido usando-se a Eq. (12)

$$\nabla\psi = \vec{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \vec{e}_{z^*} \frac{\partial \psi}{\partial z^*}$$

c) o divergente de um vetor V é dado pela Eq. (13)

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(rV_{z^*})}{\partial z^*}\right]$$

$$= \frac{\partial(V_r)}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(V_{z^*})}{\partial z^*}$$

d) o rotacional de um vetor V vêm da Eq. (14),

$$\nabla x \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_{z^*}}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z^*} \right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z^*} - \frac{\partial V_{z^*}}{\partial r} \right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)\vec{e}_{z^*}$$

e) o gradiente de um vetor V é obtido da Eq. (16),

$$\nabla \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r} & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

g) finalmente, o divergente de um tensor τ vêm da Eq. (17),

$$\nabla \cdot \tau = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_{z^*} \end{bmatrix}$$

Equações de N-S em um Sistema Ortogonal de Coordenadas

As equações de Navier-Stokes para um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal ser escritas com o auxílio dos operadores vetoriais e tensoriais definidos nas seções anteriores. Para referência, a equação de N-S na forma não-conservativa utilizando a representação dos operadores é:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\bullet \mathrm{Grad}\vec{V}\right]=\mathrm{Div}T_{i,j}$$

onde o tensor das tensões $T_{i,j}$ é dado por:

$$T_{i,j}=-P\cdot\delta_{i,j}+\lambda\left(\mathrm{Div}\vec{V}\right)\delta_{i,j}+2\mu D_{i,j}$$

λ e μ são os coeficientes de viscosidade sendo λ = -2/3 μ; e o tensor das deformações, D_{ij}, por:

$$D_{i,j}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}\vec{V}+\left(\mathrm{Grad}\vec{V}\right)^{T}\right]$$

Com o auxílio dos operadores definidos pelas Eqs. (12) a (21) pode-se, após algum trabalho, chegar a forma das componentes de velocidade da equação de Navier Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{V_1}{h_1}\frac{\partial V_1}{\partial \xi_1}+\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial V_1}{\partial \xi_2}+\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial V_1}{\partial \xi_3}+\frac{V_1}{h_1}\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2}-\frac{V_2}{h_1}\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}+\frac{V_1}{h_1}\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3}-\frac{V_3}{h_1}\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1}\right)$$
$$=\frac{1}{h_1^2h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(h_1h_2h_3T_{\xi1\xi1}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(h_1h_1h_3T_{\xi1\xi2}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(h_1h_1h_2T_{\xi1\xi3}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{h_1h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_1}T_{\xi1\xi1}-\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}T_{\xi2\xi2}-\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1}T_{\xi3\xi3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_2}{\partial t}+\frac{V_1}{h_1}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_1}+\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_2}+\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial V_2}{\partial \xi_3}+\frac{V_1}{h_1}\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_1}-\frac{V_1}{h_1}\frac{V_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2}+\frac{V_2}{h_2}\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3}-\frac{V_3}{h_2}\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_2}\right)$$
$$=\frac{1}{h_1h_2^2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(h_2h_2h_3T_{\xi1\xi2}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(h_1h_2h_3T_{\xi2\xi2}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(h_1h_2h_2T_{\xi2\xi3}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_2}T_{\xi1\xi1}-\frac{1}{h_2h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_2}T_{\xi2\xi2}-\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_2}T_{\xi3\xi3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_3}{\partial t}+\frac{V_1}{h_1}\frac{\partial V_3}{\partial \xi_1}+\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial V_3}{\partial \xi_2}+\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial V_3}{\partial \xi_3}+\frac{V_1}{h_1}\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_1}-\frac{V_1}{h_1}\frac{V_1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}+\frac{V_2}{h_2}\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_2}-\frac{V_2}{h_2}\frac{V_2}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3}\right)$$
$$=\frac{1}{h_1h_2h_3^2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(h_2h_3h_3T_{\xi1\xi3}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(h_1h_3h_3T_{\xi2\xi3}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(h_1h_2h_3T_{\xi3\xi3}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \xi_3}T_{\xi1\xi1}-\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_3}T_{\xi2\xi2}-\frac{1}{h_3h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi_3}T_{\xi3\xi3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\rho h_2h_3V_1\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\rho h_1h_3V_2\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\rho h_1h_2V_3\right)\right]=0$$

As componentes do tensor das tensões são:

$$T_{\xi1\xi1} = -P + 2\mu\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial V_1}{\partial\xi_1} + \frac{V_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_2} + \frac{V_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_3}\right) + \lambda\left(\mathrm{Div}\vec{V}\right)$$

$$T_{\xi2\xi2} = -P + 2\mu\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial V_2}{\partial\xi_2} + \frac{V_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\xi_1} + \frac{V_3}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi_3}\right) + \lambda\left(\mathrm{Div}\vec{V}\right)$$

$$T_{\xi3\xi3} = -P + 2\mu\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial V_3}{\partial\xi_3} + \frac{V_1}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi_1} + \frac{V_2}{h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi_2}\right) + \lambda\left(\mathrm{Div}\vec{V}\right)$$

$$T_{\xi1\xi2} = \mu\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u_2}{\partial\xi_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_1}{\partial\xi_2} - \frac{u_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\xi_1} - \frac{u_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_2}\right)$$

$$T_{\xi1\xi3} = \mu\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u_3}{\partial\xi_1} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial u_1}{\partial\xi_3} - \frac{u_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi_1} - \frac{u_1}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_3}\right)$$

$$T_{\xi2\xi3} = \mu\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial u_3}{\partial\xi_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial u_2}{\partial\xi_3} - \frac{u_3}{h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi_2} - \frac{u_2}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi_3}\right)$$

Aplicação - Coordenadas Ajustadas ao Corpo

Coordenadas ajustadas ao corpo referem-se a um sistema de coordenadas ortogonais cujas direções principais são paralela e normal à superfície do corpo. Estes sistemas são largamente aplicados no estudo de escoamentos típicos de camada limite envolvendo superfícies com curvaturas pois permitem que as equações que descrevem o movimento sejam simplificadas. Dado que as linhas de corrente, na vizinhança da superfície, apresentam aproximadamente a mesma curvatura da superfície faz com que os sistemas de coordenadas ajustadas ao corpo sejam candidatos naturais pois estes descrevem um sistema ortogonal de curvas que são paralelas e normais a superfície do corpo.

A Fig. 2 descreve, de maneira esquematizada, um sistema de coordenadas ajustadas a superfície do aerófio. A coordenada ξ é medida a partir da origem ao longo do corpo do aerofólio enquanto que a coordenada ζ é normal à superfície do corpo. Usualmente define-se $\zeta = 0$ para a superfície coincidente com a superfície do aerofólio. A representação de um ponto P_o no plano corresponde às coordenadas (ξ_o,ζ_o) sendo que ξ_o refere-se a distância medida ao longo da superfície do aerofólio até encontrar o ponto onde a normal, passando por P_o, intercepta a superfície, já ζ_o é a distância normal da superfície do aerofólio até ao ponto P_o.

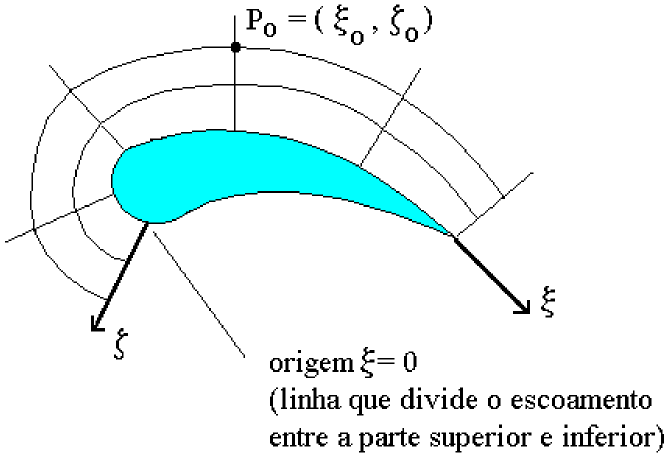

Fig. 2 - Sistema de coordenadas ajustados ao corpo de um aerofólio

A fim que se possa determinar os fatores de escala para sistemas de coordenadas ajustadas ao corpo é necessário que se conheça as propriedades das superfícies, mais especificamente, sua curvatura. Para tanto, na próxima seção apresenta-se uma breve revisão destes conceitos geométricos.

Propriedades de uma Curva no Plano 2-D

Uma curva no plano pode ser representada pela seu raio de curvatura, ρ, ou pelo seu recíproco, a curvatura, $k = 1/\rho$. Na Fig. 3 é representada uma curva S no plano (x,y). O raio de curvatura é definido como sendo o limite quando $P \rightarrow P'$ da razão entre o comprimento de arco ΔS e o ângulo $\Delta\alpha$, definido pelo ponto O onde as normais a S, passando por P e P', se interceptam

$$\rho = \mathrm{Lim}_{\Delta\alpha\rightarrow 0}\frac{\Delta S}{\Delta\alpha} = \frac{dS}{d\alpha} \tag{21}$$

Analogamente, a curvatura é definida por:

$$k = \mathrm{Lim}_{\Delta S\rightarrow 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \frac{d\alpha}{dS} \tag{22}$$

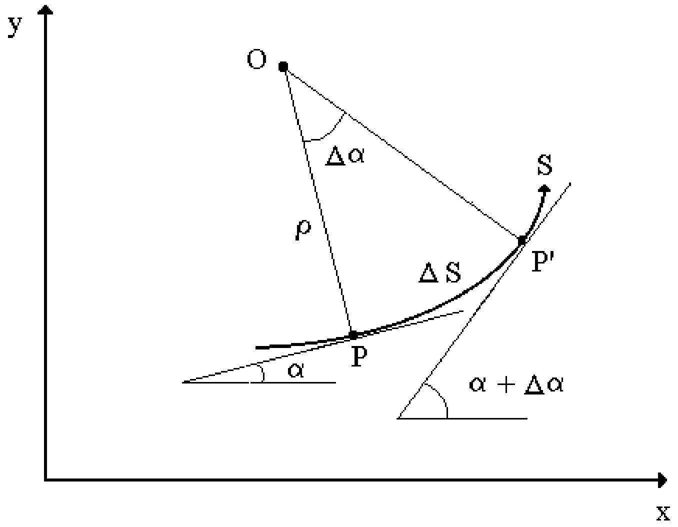

Fig. 3 - Representação de uma curva no plano (x,y) e de seu raio de curvatura, ρ.

Considerando que a curva S é contínua, ela pode ser parametrizada em função de x, como sugere a equação abaixo:

$$y = \eta(x) \tag{23}$$

Uma vez que a curva S é parametrizada por x, seu comprimento de arco e o ângulo podem também ser expressos pela parametrização em x; assim, Eqs. (21) e (22) podem ser expressas por x como:

$$\rho = \frac{\left(dS/dx \right)}{\left(d\alpha/dx \right)} \tag{24}$$

e

$$k = \frac{\left(d\alpha/dx \right)}{\left(dS/dx \right)} \tag{25}$$

As derivadas dS/dx e $d\alpha/dx$ podem ser calculadas através da função $\eta(x)$. Assim, notando-se que:

$$\alpha = \tan^{-1}(\eta'); \quad \text{onde } \eta' = \frac{d\eta}{dx}$$

então:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(\eta')\right] = \frac{\eta''}{\left[1+(\eta')^2\right]} \tag{26}$$

Por sua vez, o comprimento de arco S pode ser expresso através dos diferenciais na direção x e y,

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \equiv dx^2\left[1+(dy/dx)^2\right]$$

substituindo dy/dx pela definição da Eq. (23), tem-se que:

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1+(\eta')^2} \tag{27}$$

Substituindo-se Eqs. (26) e (27) nas Eqs. (24) e (25) encontra-se as definições de ρ e k em função do parâmetro x:

$$\rho = \frac{\left[1+(\eta')^2\right]^{3/2}}{\eta''} \tag{28}$$

e

$$k = \frac{\eta''}{\left[1+(\eta')^2\right]^{3/2}} \tag{29}$$

As equações (28) e (29) mostram que para retas, ou seja, curvas com segunda derivadas nulas, apresentam raio de curvatura infinito e curvatura nula. Já o sinal do raio de curvatura ou da curvatura da curva é dado pelo sinal da segunda derivada da curva. Para referência, a Fig. 4 mostra duas curvas $y = x^3$ e y = Cos(x) e suas respectivas curvaturas.

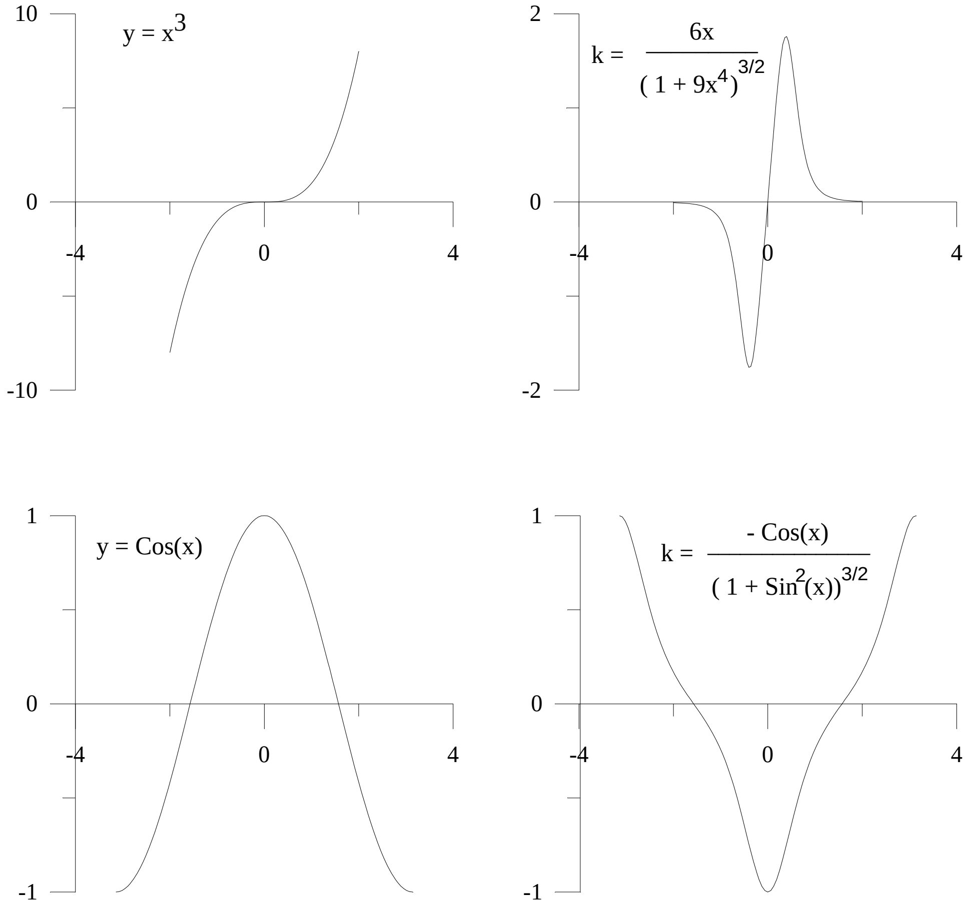

Fig. 4 - Representação das curvas: $y = x^3$ e $y = Cos(x)$ com suas respectivas curvaturas.

Fatores de Escala para Coordenadas Ajustadas a uma Curva no Plano

Considere uma curva S, conforme mostrada na Fig. 5, cujo vetor posição, r, descrevendo a posição dos pontos da curva é parametrizado em função do comprimento de arco, ξ. As coordenadas do ponto P são representadas pelo par (x_o,y_o) no sistema cartesiano e pelo par (ξ_o,ζ_o) no sistema de coordenadas ajustadas à curva. ξ_o é o comprimento de arco da origem até ao ponto P' e ζ_o é a distância PP'.

As componentes do vetor posição r nas direções x e y são dados pelas funções:

$$\vec{r}(\xi) = rx(\xi)\,\vec{i} + ry(\xi)\,\vec{j}$$

onde i e j são vetores unitários nas direções x e y, respectivamente.

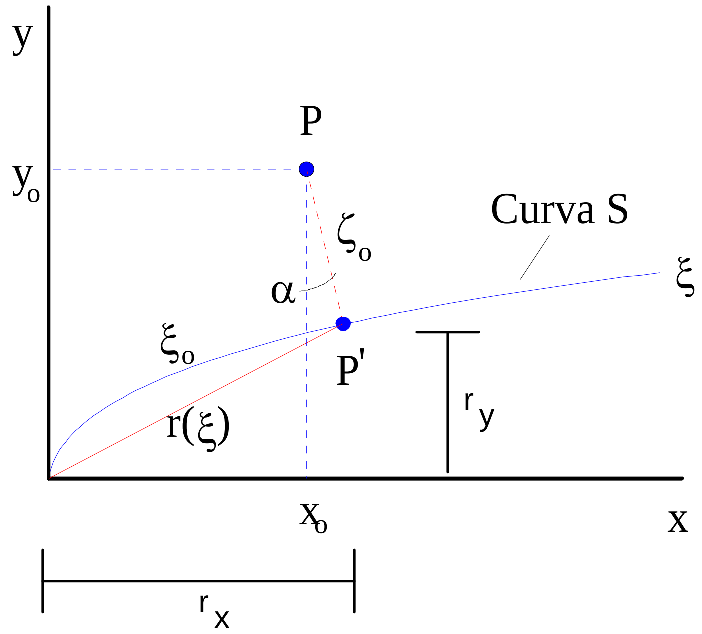

Fig. 5 - Coordenada ajustadas à uma curva no plano.

Uma relação direta entre as coordenadas (x,y) e (ξ,ζ) é obtida através das relações geométricas:

$$\begin{aligned} x &= rx(\xi) - \zeta \cdot \mathrm{Sin}(\alpha) \\ y &= ry(\xi) + \zeta \cdot \mathrm{Cos}(\alpha) \end{aligned} \tag{30}$$

onde Cos(α)= drx(ξ)/dξ.

Os fatores de escala são calculados a partir das derivadas de x e de y em relação a ξ e ζ, conforme mostrado pelas Eqs. (3) e (4). A seguir passa-se ao cálculo das derivadas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{d}{d\xi}\left[rx(\xi)\right] - \zeta \cdot \frac{d}{d\xi}\left[\sin(\alpha)\right] \\ &= \cos(\alpha) - \zeta \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{d\xi} \\ &= \cos(\alpha) \cdot (1 - \zeta \cdot k) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{d}{d\xi}\left[ry(\xi)\right] + \zeta \cdot \frac{d}{d\xi}\left[\cos(\alpha)\right]$$

$$= \sin(\alpha) - \zeta \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{d\xi}$$

$$= \sin(\alpha) \cdot (1 - \zeta \cdot k)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = -\sin(\alpha)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = +\cos(\alpha)$$

Os fatores de escala:

$$\boxed{\begin{aligned} h_{\xi\xi} &= (1 - \zeta \cdot k) \\ h_{\zeta\zeta} &= +1 \end{aligned}} \tag{31}$$

Fatores de Escala para Corpos Axi-simétricos

Considere S a superfície de um corpo sólido como mostra a Fig. 6. A posição de um ponto P no espaço é descrita através da distância ζ paralela ao vetor normal a S e do vetor posição r que indica a posição do ponto P' na superfície S.

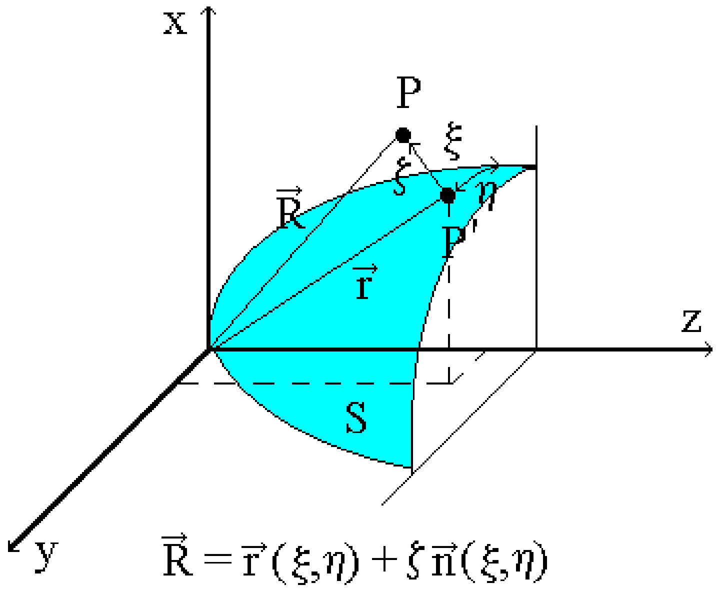

Fig. 6 - Sistema de coordenadas ξ, η e ζ ajustados ao corpo.

As coordenadas ξ, η definem a superfície S através do vetor posição r,

$$\vec{r} = r(\xi, \eta)$$

Então um ponto P pode ser definido pelo vetor posição R como:

$$\vec{R} = \vec{r}(\xi, \eta) + \zeta \vec{n}(\xi, \eta)$$

onde n é o vetor normal a S em P'. As relações geométricas entre (x,y,z) e (ξ,η,ζ) são expressas por:

$$x = r(\xi)\cdot\cos(\eta) + \zeta\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\eta)$$
$$y = r(\xi)\cdot\sin(\eta) + \zeta\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\eta)$$
$$z = f(\xi) - \zeta\cdot\sin(\alpha)$$
,

lembrando que

$$\frac{dr_o(\xi)}{d\xi} = \sin(\alpha) \quad \text{e} \quad \frac{df(\xi)}{d\xi} = \cos(\alpha) \ .$$

..

As derivadas:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos(\eta)\cdot\sin(\alpha)\cdot(1-\zeta\cdot k) \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\left[r(\xi)+\zeta\cdot\cos(\alpha)\right]\cdot\sin(\eta) \quad \frac{\partial x}{\partial \zeta} = \cos(\alpha)\cdot\cos(\eta)$$
$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin(\eta)\cdot\sin(\alpha)\cdot(1-\zeta\cdot k) \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \left[r(\xi)+\zeta\cdot\cos(\alpha)\right]\cdot\cos(\eta) \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \cos(\alpha)\cdot\sin(\eta)$$
$$\underbrace{\frac{\partial z}{\partial \xi} = \cos(\alpha)\cdot(1-\zeta\cdot k)}_{h_{\xi\xi}} \quad \underbrace{\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0}_{h_{\eta\eta}} \quad \underbrace{\frac{\partial z}{\partial \zeta} = -\sin(\alpha)}_{h_{\zeta\zeta}}$$

onde α é o ângulo que ζ faz com o eixo x.

Os fatores de escala:

$$\boxed{\begin{aligned} h_{\xi\xi} &= (1-\zeta\cdot k) \\ h_{\eta\eta} &= r_o(\xi)+\zeta\cdot\cos(\alpha) \\ h_{\zeta\zeta} &= 1 \end{aligned}} \tag{32}$$

Exemplo: Fatores de Escala para Superfície Cônica

Considere uma superfície cônica, conforme esquematizada na Fig. 7, cujo semi-ângulo é α O sistema de coordenadas ajustadas a esta superfície é definido pelas variáveis (ξ, η, ζ) que correspondem, respectivamente, a distância medida ao longo da superfície, a posição angular de um ponto na superfície e a distância de um ponto a superfície.

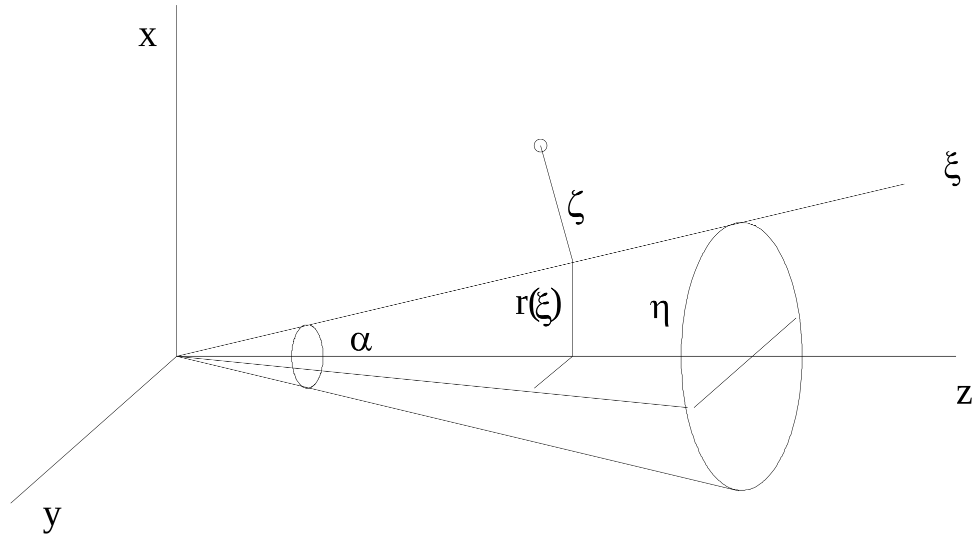

Fig. 7 - Sistema de coordenadas para uma Superfície Cônica.

Baseado na nomenclatura desenvolvida no caso anterior, pode-se definir o raio de giração, r(ξ) e a projeção no eixo z, f(ξ) em função do semi-ângulo α do cone:

$$r(\xi) = \xi \cdot \sin(\alpha)$$

$$f(\xi) = \xi \cdot \cos(\alpha)$$

Além disto, a curvatura k = dα/dξ ≡ 0. Substituindo-se estas funções nas expressões desenvolvidas para os fatores de escala, Eq. (32), encontra-se:

$$h_{\xi\xi} = (1 - \zeta \cdot k) \qquad = \quad 1$$

$$h_{\eta\eta} = r(\xi) + \zeta \cdot \cos(\alpha) \quad = \quad \xi \cdot \sin(\alpha) + \zeta \cdot \cos(\alpha)$$

$$h_{\zeta\zeta} = 1 \qquad = \quad 1$$

Referências

[1] Golsdstein, S.; **"Modern Developments in Fluid Dynamics"**, Dover (1965)

[2] Moore, F.K.; **"Theory of Laminar Flows"**, Princeton Un. Press (1964)

[3] Rosenhead, L.; **"Laminar Boundary Layers"**, Oxford (1963)

[4] Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C.W.; **"Numerical Grid Generation"**, Elsiever Science Publishers (1985)

[5] Wylie, C.R.; **"Advanced Engineering Mathematics"**, McGraw Hill (1961)

[6] Butkov, E.; **"Física Matemática"**, Guanabara Dois (1978)

[7] Morse, P.M. and Feshbach, H.; **"Methods of Theoretical Physics"**, McGraw-Hill (1953)

[8] Warsi, Z.U.A., **"Fluid Dynamics: Theoretical and Computational Approaches"**, CRC (1993)

[9] Hsu, H.P.; **"Análise Vetorial"**, Livros Técnicos e Científicos Ltda. (1972)

[10] Kaplan, W.; **"Cálculo Avançado"**, Edgard Blucher (1972)

Referências [1] a [3] referem-se a forma e aplicação em mecânica dos fluidos dos operadores vetoriais e tensoriais em coordenadas curvilíneas ortogonais. Referências [4] a [8] tratam do cálculo tensorial e do desenvolvimento dos operadores em coordenadas curvilíneas. Referência [9] e [10] abordam, respectivamente, propriedades de curvas no espaço e determinantes jacobianos.