

# EQUAÇÕES INTEGRAIS DA CAMADA LIMITE BI-DIMENSIONAL

## Índice

Equações Integrais da Camada Limite Bi-Dimensional .....	2
Definição de Espessura de Deslocamento e Espessura de Momento .....	2
Equação Integral da Camada Limite Bi-Dimensional .....	4
Exemplo: Escoamento em uma Placa Plana .....	8
Comentários Sobre o Método Integral da Equação do Momento.....	10
Método Integral da Equação do Momento de Kármán-Pohlhausen .....	14
Método de Solução da Equação (25) .....	24
Exemplos.....	26
Comentários Sobre o Método de Kármán-Pohlhausen.....	28
Método de Thwaites.....	29
Exemplo .....	31
Referências & Leitura Complementar .....	33

Prof. Eugênio Spanó Rosa  
FEM-DE UNICAMP  
erosa@fem.unicamp.br

## EQUAÇÕES INTEGRAIS DA CAMADA LIMITE BI-DIMENSIONAL

Durante o período compreendido entre 1920 a 1950, onde computadores digitais nem sequer existiam, o desenvolvimento de aplicações da teoria da camada limite ocorreu através do desenvolvimento e aperfeiçoamento dos métodos integrais. Soluções aproximadas utilizando-se equações integrais para a camada limite deve-se ao trabalho pioneiro de Von Kármán publicado em 1921. Uma revisão extensiva destes métodos pode ser encontrada em Rosenhead (1964). Apesar de atualmente se dispor de eficientes algoritmos computacionais, tornando quase que obsoleta a utilização destes métodos para escoamentos laminares, eles são ainda hoje frequentemente utilizados em problemas complexos tais como: turbulência, transferência de calor e combustão.

### Definição de Espessura de Deslocamento e Espessura de Momento

A espessura de deslocamento,  $\delta^*$  está relacionada ao déficit de vazão devido a desaceleração que o fluido sofre pela ação da viscosidade. Considerando-se um perfil típico de velocidades dentro da camada limite, como mostra a Fig. 1,

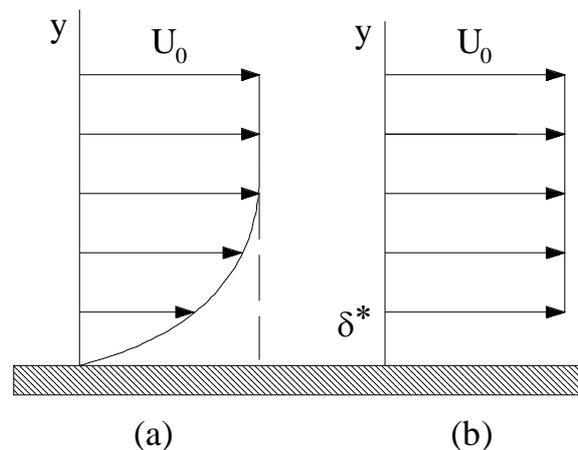


Fig. 1 - Espessura de deslocamento é a distância da parede que o escoamento externo a camada limite deveria estar afim de que as vazões produzidas pelo escoamento com presença de termos viscosos (a) seja a mesma que a produzida pelo escoamento sem a presença de termos viscosos (b).

Considere o perfil de velocidades mostrado na Fig. 1a, a vazão mássica em uma seção é dada por

$$\dot{M} = \int_0^{+\infty} \rho \cdot u \cdot dy \quad (1)$$

esta vazão mássica é equivalente a vazão produzida pelo escoamento externo, Fig. 1b, porém descontado um déficit de massa devido a desaceleração sofrida pelo fluido próximo a parede,

$$\dot{M} = \int_0^{+\infty} \rho \cdot U_0 \cdot dy - (\rho \cdot U_0 \cdot \delta^*) \quad (2)$$

Isolando-se  $\delta^*$  das equações (1) e (2), encontra-se a definição da espessura de deslocamento, Eq. (3):

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy \quad (3)$$

De maneira análoga, é definido a espessura de momento,  $\theta$ . Ela refere-se ao déficit de momento associado a desaceleração do fluido causada pela viscosidade. O fluxo de momento  $J$  em uma seção é dado por:

$$J = \int_0^{\infty} u \cdot (\rho u dy) \quad (4)$$

este fluxo de momento é igual ao fluxo de momento dado pelo escoamento externo descontando-se um déficit de momento:

$$J = \int_0^{\infty} U_0 \cdot (\rho u dy) - (\rho U_0^2 \theta) \quad (5)$$

Isolando-se  $\theta$  das equações (4) e (5) encontra-se a definição da espessura de momento:

$$\theta = \int_0^{+\infty} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy \quad (6)$$

A espessura de deslocamento e de momento,  $\delta^*$  e  $\theta$ , estão representadas pela área sob as curvas definidas por:  $(1 - u/U_0)$  e  $u/U_0(1 - u/U_0)$  na Fig. 2. Pela sua definição,  $\theta$  deve ser sempre menor que  $\delta^*$ , de maneira que a razão  $\delta^*/\theta$ , também chamada de fator de forma  $H$ , é sempre maior que a unidade.

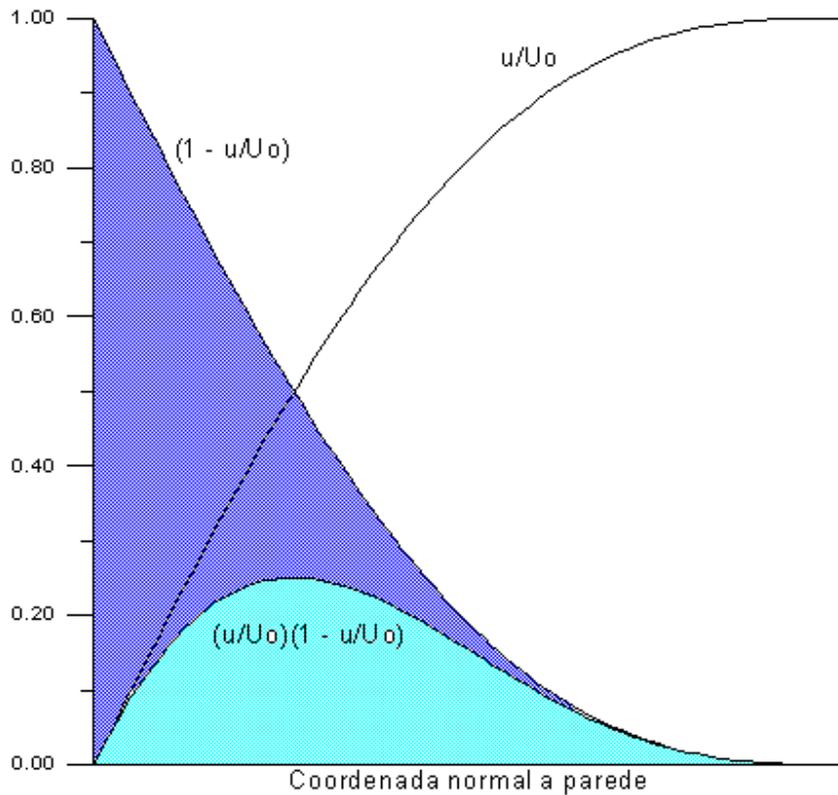


Fig. 2 - Espessura de momento e de deslocamento

### Equação Integral da Camada Limite Bi-Dimensional

A ideia básica atrás da formulação integral da camada limite é expressar os balanços de conservação de momento e massa, na direção transversal ao escoamento, integrando-se as equações entre  $y = 0$  a  $y = \infty$ . Partindo-se das equações da camada limite, em regime laminar e escoamento incompressível, tem-se para a conservação da massa e momento as equações:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$u \bullet \frac{\partial u}{\partial x} + v \bullet \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + U_0 \frac{dU_0}{dx} \quad (8)$$

Multiplicando-se a Eq. (7) por  $u$  e somando-se a Eq. (8), obtêm-se:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + U_0 \frac{dU_0}{dx} \quad (9)$$

integrando-se Eq. (9) na direção  $y$  no intervalo de 0 a  $\infty$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + \int_0^{\infty} \frac{\partial vu}{\partial y} dy = v \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + \int_0^{\infty} U_0 \frac{dU_0}{dx} dy \quad (10)$$

Observando-se que o termo  $\int \partial(vu)/\partial y \cdot dy$  é igual a  $(vu)_{\infty} - (vu)_0$  mas pela condição de não deslizamento,  $u(x,0) = 0$ , logo,  $\int \partial(vu)/\partial y \cdot dy = vU_0$ . Da Eq. (7),  $[v(x,y) - v(x,0)] = -\int \partial u/\partial x \cdot dy$ ; para o caso de fronteira impermeável  $v(0) = 0$ , então:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial(vu)}{\partial y} dy = -U_0 \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} dy + U_0 \cdot v_w \quad (11)$$

Onde  $v_w$  é a velocidade de injeção ou sucção junto à parede. Observando-se que o termo  $v \int \partial^2 u/\partial y^2 dy$  é igual a  $v(\partial u/\partial y|_{\infty} - \partial u/\partial y|_0)$ , mas, por definição, o escoamento externo a camada limite não possui vorticidade, então  $\partial u/\partial y|_{\infty} = 0$ , então:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = -v \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (12)$$

onde  $\tau_w$  é a tensão na parede. Substituindo-se equações (11) e (12) na Eq. (10) encontra-se:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u^2 dy - U_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u dy = -\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{dU_0}{dx} \int_0^{\infty} U_0 dy - U_0 \cdot v_w \quad (13)$$

na Eq. (13) a ordem de diferenciação e integração foi trocada por que os limites de integração não é função de  $x$ . Além disto, notando-se que:

$$\frac{d}{dx} \left[ U_0 \int_0^{\infty} u dy \right] = \frac{dU_0}{dx} \int_0^{\infty} u dy + U_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u dy$$

então Eq. (13) pode ser re-escrita na forma:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u^2 dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} U_0 u dy + \frac{dU_0}{dx} \int_0^{\infty} u dy = -\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{dU_0}{dx} \int_0^{\infty} U_0 dy - U_0 \cdot v_w \quad (14)$$

ou

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u(U_0 - u) dy + \frac{dU_0}{dx} \int_0^{\infty} (U_0 - u) dy - U_0 \cdot v_w = \frac{\tau_w}{\rho}$$

que em termos das definições de espessura de deslocamento e espessura de momento fica sendo:

$$\frac{d}{dx} (U_0^2 \theta) - U_0 \cdot v_w = \frac{\tau_w}{\rho} - \delta^* U_0 \frac{dU_0}{dx} \quad (15)$$

ou

$$\frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*) \frac{1}{U_0} \frac{dU_0}{dx} - \frac{v_w}{U_0} = \frac{\tau_w}{\rho \cdot U_0^2}$$

Equação (15) foi estabelecida em 1921 por Von Kármán. Ela reflete um balanço entre a variação da quantidade de movimento (lado esquerdo da Eq.(15)) com a força viscosa e gradiente de pressão (lado direito da Eq. (15)). Equação (15) é uma função implícita do perfil de velocidade  $u/U_0$ , uma vez que a espessura de deslocamento e espessura de momento dependem destas relações, Eq. (6) e (3).

A essência do método integral consiste em assumir uma expressão que convenientemente represente a distribuição de velocidade  $u(y)$  na camada limite, levando-se em conta que ela satisfaça importantes condições de contorno para  $u(y)$  e que contenha, em adição, um parâmetro livre, comumente adotado como sendo a espessura da camada limite,  $\delta$ , que é finalmente determinado pela Eq. (15).

A eficácia do método integral consiste em, a partir de estimativas sobre a forma de comportamento do perfil de velocidades, realizar estimativas razoavelmente precisas ( $\pm 15\%$ ) sobre o arrasto, espessura da camada limite, espessura de deslocamento e espessura de momento. O razoável grau de concordância das estimativas do método integral se deve ao fato que o processo de integração, envolvido nas expressões para  $\delta^*$  e  $\theta$ , tendem a suavizar os erros fazendo uma média entre os desvios positivos e negativos dos valores assumidos pelo perfil de velocidade adotado. Isto é particularmente verdadeiro para os perfis de velocidade laminar onde os perfis de velocidade são suaves e não apresentam dramáticas variações de inclinação como nos perfis de velocidade em regime turbulento.

Uma expressão simples para o perfil de velocidades deve tentar atender pelo menos as condições de contorno:

$$\begin{array}{ll} u(0) = 0 & \text{não deslizamento} \\ u(\infty) = U_0 & \text{casamento com o escoamento externo} \end{array}$$

A condição de casamento com o escoamento externo aplica-se quando  $y \rightarrow \infty$ , entretanto sabe-se que este limite assintótico pode ser aproximado quando  $y \rightarrow \delta$ , onde  $\delta$  é a espessura da camada limite. Nestas condições, as condições de contorno mínimas necessárias que um perfil genérico de velocidades deve atender deve ser:

$$u(x,0) = 0 \quad \text{não deslizamento} \quad (16a)$$

$$u(x,\delta) = U_0 \quad \text{casamento com o escoamento externo} \quad (16b)$$

Devido ao grau de liberdade na escolha do tipo de função para representar o perfil de velocidades, pode-se impor mais restrições que devem ser atendidas pela função que representa o perfil de velocidades. A inclusão de restrições, que advêm das condições de contorno, farão com que a função genérica represente melhor o perfil de velocidades. É portanto desejável que o perfil de velocidades também possa atender as condições:

$$\frac{\partial u(x,\delta)}{\partial y} = 0 \quad \text{vorticidade nula para } y \rightarrow \delta \quad (16c)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2} = -\frac{U_0(x)}{\nu} \frac{dU_0(x)}{dx} \quad \text{atende equação do momento quando } y \rightarrow 0 \quad (16d)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,\delta)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{garante uma transição suave ao escoamento externo} \quad (16e)$$

Cabe uma observação com relação às condições aplicáveis a  $y \rightarrow \delta$ . Como os efeitos viscosos estão confinados na região  $0 \leq y \leq \delta$ , para  $y = \delta$ ,  $\partial u / \partial y$  e todas as suas derivadas de ordem superior, isto é  $\partial^n u / \partial y^n$ , devem ser nulas obrigando desta maneira que o perfil de velocidades da camada limite aproxime-se, de forma suave, da velocidade imposta pelo escoamento externo.

Procura-se agora funções genéricas capazes de atender estas condições de contorno. Da análise de similaridade pode-se pressupor que tais funções são do tipo:

$$\frac{u(x,y)}{U_0(x)} = F\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$$

Uma forma funcional simples seria uma função polinomial do tipo:

$$\frac{u(x,y)}{U_0(x)} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4; \quad \text{onde } \eta(x,y) = \frac{y}{\delta(x)}$$

os coeficientes a, b, c, d, e são, em geral, funções de x, de maneira que soluções que não são similares podem ser obtidas. Estas constantes são obtidas através das condições de contorno impostas ao perfil de velocidades, e, conseqüentemente, o grau do polinômio determina o número de condições de contorno que podem ser satisfeitas. A seguir é dado um exemplo sobre a aplicação do método.

### Exemplo: Escoamento em uma Placa Plana

Como exemplo de partida, será considerado o problema de Blasius. Para o caso em consideração é proposto um perfil de velocidades do tipo:

$$\frac{u}{U_0} = a + b\eta + c\eta^2; \quad \text{onde} \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

como o perfil é um polinômio de segundo grau, pode-se atender apenas 3 condições de contorno. As condições de contorno escolhidas são:  $u(x,0) = 0$ ,  $u(x,\delta) = U_0$  e  $\partial u/\partial y(x,\delta) = 0$ . Impondo-se estas restrições ao perfil de velocidades, encontra-se que os valores das constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são, respectivamente: 0, 2, -1. Substituindo-se estes valores no polinômio que representa o perfil de velocidades obtêm-se:

$$\frac{u}{U_0} = 2\eta - \eta^2; \quad \text{onde} \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Para o problema de Blasius a equação integral do momento se reduz a:

$$\frac{d}{dx} (U_0^2 \theta) = \frac{\tau_w}{\rho}$$

A espessura de momento,  $\theta$ , é então avaliada através do perfil de velocidades adotado, e de acordo com Eq. (6),  $\theta$  assume a forma:

$$\theta = \delta \int_0^1 (2\eta - \eta^2)(1 - 2\eta + \eta^2) d\eta = \frac{2}{15} \delta$$

enquanto que a tensão na parede:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{U_0}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (2\eta - \eta^2) \Big|_{\eta=0} = 2\mu \frac{U_0}{\delta}$$

substituindo-se estas estimativas na equação integral do momento,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{2}{15} \delta U_0^2 \right) = \frac{2\nu U_0}{\delta}$$

ou

$$\delta d\delta = 15 \frac{\nu}{U_0} dx$$

Impondo-se que para  $x = 0$ ,  $\delta = 0$ , a integral da equação do momento resulta numa estimativa da espessura da camada limite:

$$\delta = \sqrt{30} \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}$$

ou de forma adimensional:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad \text{onde } \text{Re}_x = \frac{U_0 x}{\nu}$$

A tensão de cisalhamento na parede pode então ser estimada,

$$\tau_w = 2\mu \frac{U_0}{\delta} = \left( \frac{1}{2} \rho U_0^2 \right) \frac{\sqrt{8/15}}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

e o fator de atrito  $C_f$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\left( \frac{1}{2} \rho U_0^2 \right)} = \frac{0.730}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

O resultado obtido para  $C_f$  possui um erro relativo de 9.9% acima do resultado analítico de Blasius. Isto mostra que a abordagem integral da equação do momento é capaz de produzir resultados consistentes mesmo quando usada com aproximações grosseiras do perfil de velocidades. No caso em consideração um polinômio de segundo grau foi utilizado. Aproximações mais grosseiras poderiam ser utilizadas, por exemplo um polinômio do primeiro grau, neste caso somente duas condições de contorno poderiam ser satisfeitas:  $u(x,0) = 0$  e  $u(x,\delta) = U_0$ . Por outro lado polinômios de grau superior poderiam igualmente serem utilizados e estes produziram resultados mais precisos. Para o perfil de segunda ordem adotado no exemplo,  $\partial u / \partial y(x,\delta) = -2U_0/\delta^2$  ao invés de zero. Utilizando-se um polinômio do terceiro grau, poderia-se impor a curvatura correta do perfil de velocidade para  $y \rightarrow \delta$ , o que produziria resultados mais precisos.

## Comentários Sobre o Método Integral da Equação do Momento

A eficácia do método integral consiste em, a partir de estimativas sobre a forma do perfil de velocidades, realizar estimativas razoavelmente precisas sobre o coeficiente de atrito, perfil de velocidade, espessura da camada limite, espessura de deslocamento e espessura de momento. O razoável grau de concordância das estimativas do método integral se deve ao fato que o processo de integração, envolvido nas expressões para  $\delta^*$  e  $\theta$ , tendem a suavizar os erros fazendo uma média entre os desvios positivos e negativos dos valores assumidos pelo perfil de velocidade adotado. Isto é particularmente verdadeiro para os perfis de velocidade laminar onde os perfis de

velocidade são suaves e não apresentam dramáticas variações de inclinação como nos perfis de velocidade em regime turbulento.

Uma questão permanece em aberto: é possível se prever o grau de incerteza nas estimativas fornecida pelo método integral? Em princípio não, entretanto, como via de regra, eles apresentam resultados satisfatórios numa faixa de  $\pm 15\%$ . A justificativa desta resposta reside na forma escolhida da função para representar o perfil de velocidades. Para melhor discutir esta questão, a tabela 1 apresenta diversos cálculos com perfis de velocidades distintos aplicados a uma placa plana (problema de Blasius).

	Distribuição de Velocidade $u/U_0 = F(\eta)$	Espessura de Momento $(\delta^*/x)\sqrt{Re_x}$	Coefficiente de Atrito $C_f \sqrt{Re_x}$	Erro Relativo de $C_f$ (%)	Fator de Forma $\delta^*/\theta$
1	$F(\eta) = \eta$	1.731	0.577	- 13.1	3.00
2	$F(\eta) = 2\eta - \eta^2$	1.825	0.730	+ 9.9	2.50
3	$F(\eta) = \frac{2}{3}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	1.738	0.646	- 2.7	2.69
4	$F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	1.752	0.685	+ 3.2	2.55
5	$F(\eta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	1.742	0.655	- 1.4	2.66
6	Blasius (exata)	1.733	0.664	0.0	2.61

Tabela 1 - Resultados dos cálculos da camada limite baseado no método integral.

Na tabela 1, o perfil de velocidade linear (1) atende às condições de contorno descrita na Eq. (16a) e (16b); o perfil de velocidade quadrático (2) atende às condições de contorno descrita pela Eqs. (16a), (16b) e (16c); o perfil de velocidades cúbico (3) atende às condições de contorno descrita pelas Eqs. (16a), (16b), (16c) e (16e); o perfil de

velocidades proporcional a potência quarta (4) atende às condições de contorno descrita pelas Eqs. (16a), (16b), (16c), (16d) e (16e); e finalmente, o perfil de velocidade senoidal (5) atende às condições de contorno descritas pelas Eqs. (16a) e (16b). Para fins de comparação, o perfil de velocidades (6) é o perfil da solução exata de Blasius. Para referência, estes perfis de velocidade estão mostrados na Fig. 2. Da Fig. 2 nota-se que, para perfis de velocidades polinomiais, há um aumento na suavidade para a transição ao escoamento externo a medida que se aumenta o grau do polinômio. Os perfis linear e quadrático apresentam uma derivada descontínua quando  $y \rightarrow \delta$ .

Nota-se que, em se tratando de aproximações polinomiais, o erro para o coeficiente de atrito local tende a diminuir a medida em que se aumenta o grau do polinômio. Um ganho substancial na precisão da resposta ocorre na utilização de um polinômio de terceiro grau; isto era de se esperar, por que um polinômio de terceiro grau pode atender mais condições de contorno do problema. Entretanto, o mesmo não ocorre para um polinômio de quarto grau, apesar de atender uma condição de contorno a mais que o de terceiro grau. A situação se agrava quando é testado um perfil de velocidades com variação senoidal. Este perfil, que atende apenas duas condições de contorno, apresenta o menor erro! As conclusões que se tira são: i) Em se tratando de perfis polinomiais, aumentando-se o grau do polinômio em geral representa um ganho na precisão da resposta devido a um melhor ajuste das curvaturas do perfil de velocidades impostos pelas condições de contorno; e ii) O perfil senoidal apresenta os menores erros por pura coincidência; neste caso particular, a função senoidal é a que mais se aproxima do perfil de velocidades de Blasius.

Como, evidentemente, não são conhecidas a priori soluções exatas para se chegar a uma função que melhor descreva o perfil de velocidades e, nem tão pouco, para checar a precisão do método, espera-se em geral uma incerteza em torno de  $\pm 15\%$  para o método integral.

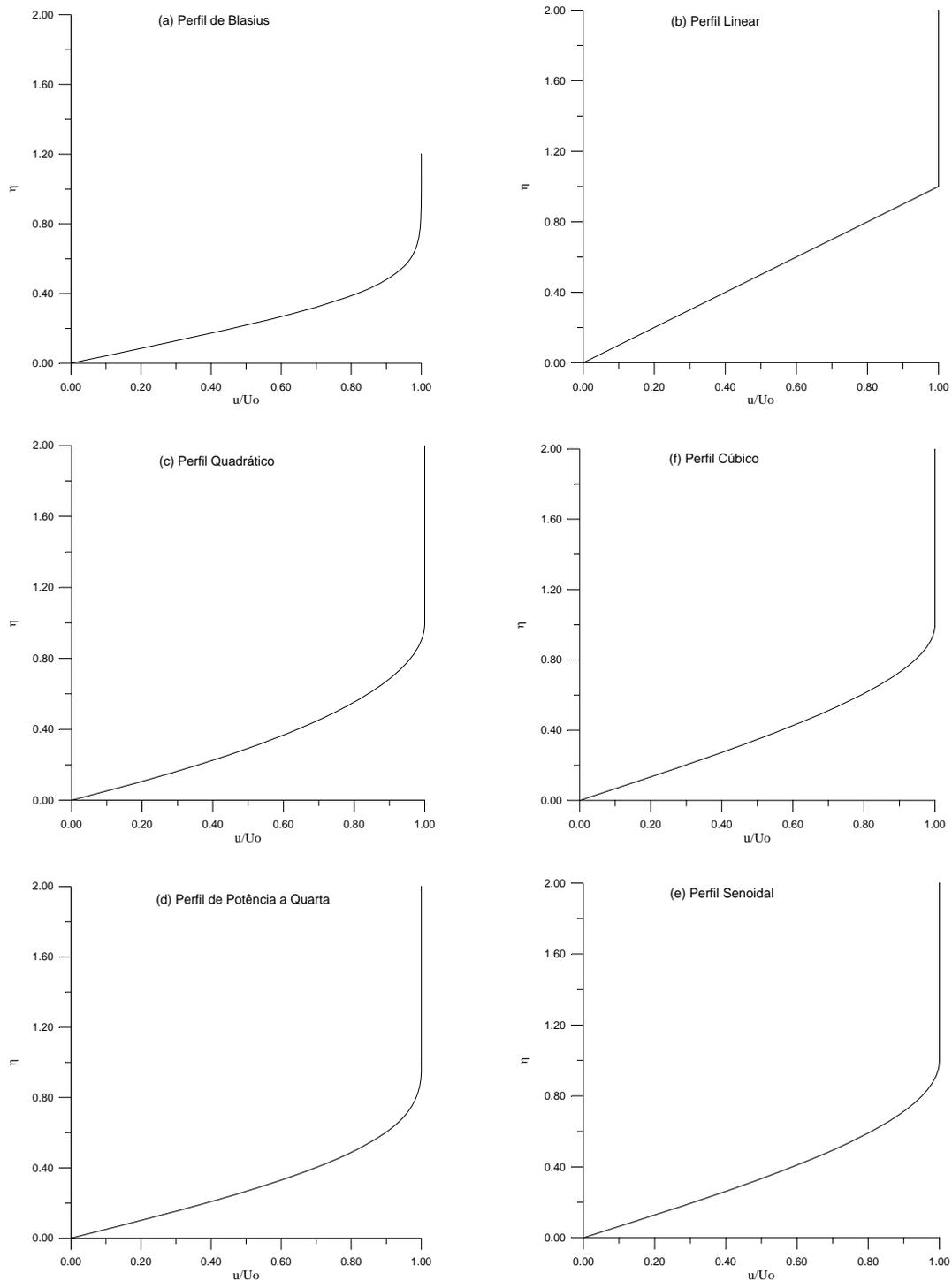


Fig. 3 - Perfis de velocidade para uma placa plana

## Método Integral da Equação do Momento de Kármán-Pohlhausen

O exemplo numérico do escoamento sobre uma placa plana mostra que, para escoamentos sem gradiente de pressão, a equação integral do momento restringe-se a taxa de variação da espessura do momento igual a tensão de cisalhamento na parede, isto é:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_0^2}$$

Entretanto para escoamentos com gradiente de pressão, todos os termos da Eq. (15) devem ser mantidos. Nestas condições, os coeficientes do polinômio que representa o perfil de velocidades não serão necessariamente constantes, mas apresentarão uma dependência funcional em  $x$  que é a variável que mede a distância ao longo do corpo. Aliás, esta é uma das características do método que permite que ele trate de escoamentos não similares. Caso haja similaridade, os coeficientes serão constantes.

A introdução do gradiente de pressão adiciona um parâmetro a mais na formulação, em termos do perfil de velocidades ele pode ser representado por:

$$\frac{u(x,y)}{U_0} = F\left(\frac{y}{\delta(x)}, \Lambda(x)\right)$$

onde  $\Lambda(x)$  é um parâmetro relacionado com o gradiente de pressão. Esta dependência no perfil de velocidades no parâmetro  $\Lambda(x)$  estende-se a espessura de momento e deslocamento e também a tensão de cisalhamento:

$$\theta = F_1[\delta(x), \Lambda(x)]$$

$$\delta^* = F_2[\delta(x), \Lambda(x)]$$

$$\tau_w = F_3[\delta(x), \Lambda(x)]$$

substituindo-se na equação integral do momento, Eq. (15), resultará em uma equação diferencial de primeira ordem para  $\delta(x)$  ou  $\theta(x)$ , envolvendo a velocidade externa  $U_0(x)$  (conhecida através de solução do escoamento potencial externo ao corpo ou através de medidas experimentais) e do parâmetro  $\Lambda(x)$ . Esta idéia, desenvolvida por Pohlhausen em 1921, será apresentada a seguir.

Para representação do perfil de velocidades, Pohlhausen escolheu um polinômio de quarto grau conforme Eq. (17)

$$\frac{u(x,y)}{U_0(x)} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4; \quad \text{onde } \eta(x,y) = \frac{y}{\delta(x)} \quad (17)$$

sujeito as condições de contorno:

$$y = 0: \quad \rightarrow \quad u = 0; \quad v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U_0 \frac{dU_0}{dx}$$

$$y = \delta: \quad \rightarrow \quad u = U_0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

impondo-se estas condições de contorno no perfil definido pela Eq. (17), encontra-se que os coeficientes do polinômio devem satisfazer:

$$0 = a$$

$$-\frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_0}{dx} = 2c = -\Lambda(x)$$

$$1 = a + b + c + d + e$$

$$0 = b + 2c + 3d + 4e$$

$$0 = 2c + 6d + 12e$$

os valores dos coeficientes do polinômio que satisfazem estas equações são:

$$a = 0; \quad b = 2 + \frac{\Lambda}{6}; \quad c = -\frac{\Lambda}{2}; \quad d = -2 + \frac{\Lambda}{2}; \quad e = 1 - \frac{\Lambda}{2}$$

substituindo-se estes valores no perfil de velocidades, encontra-se:

$$\frac{u}{U_0} = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \frac{\Lambda}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4)$$

ou de modo compacto,

$$\frac{u}{U_0} = F(\eta) + \Lambda G(\eta) \quad (18)$$

onde:

$$\begin{aligned} F(\eta) &= 1 - (1 + \eta)(1 - \eta^3) \\ G(\eta) &= (1/6)\eta(1 - \eta)^3 \end{aligned} \quad (19)$$

As função  $F(\eta)$  representa a parcela dos termos relativos a um escoamento com gradiente de pressão nulo, eles, quando substituídos na equação do momento estimam um arrasto dentro de 3% da solução de Blasius, veja Tab. 1 perfil 4. Já a função  $G(\eta)$  é uma correção de primeira ordem para escoamentos com gradiente de pressão. Os valores das funções  $F(\eta)$  e  $G(\eta)$  estão representados na Fig.4 em função de  $\eta$ . Destaca-se o caráter monotônico de  $F(\eta)$  que varia de zero para  $\eta = 0$  a unidade para  $\eta = 1$ , enquanto que a função  $G(\eta)$ , representada numa ampliação de cinquenta vezes na escala de  $F(\eta)$ , cresce de zero para  $\eta = 0$  até um máximo de 0.0166 em  $\eta = 0.25$  para depois cair para zero em  $\eta = 1$ .

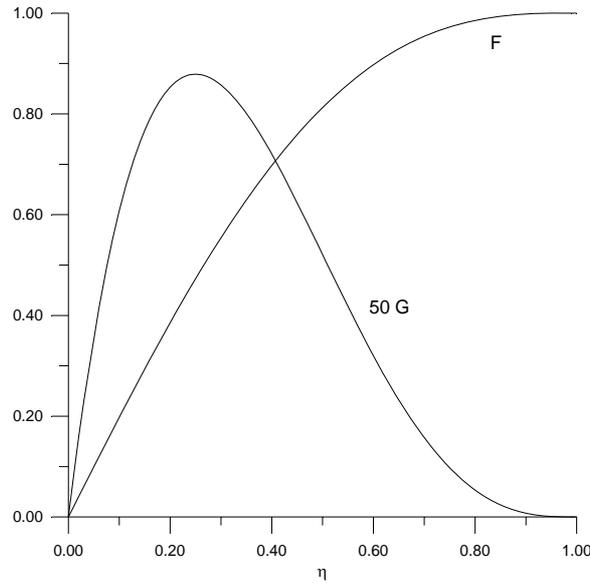


Fig. 4 - Funções  $F(\eta)$  e  $G(\eta)$  que definem o perfil de velocidades, Eqs. (18) e (19).

O perfil de velocidades expresso na Eq. (18) constitui uma família de curvas definidas pelo parâmetro  $\Lambda$ . O adimensional  $\Lambda$  pode ser escrito na forma:

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_0}{dx} = - \frac{dp}{dx} \frac{\delta}{\mu U_0 / \delta} \quad (20)$$

que pode então ser interpretado fisicamente como a razão entre a força de pressão e a força viscosa. Os perfis de velocidades para diferentes valores de  $\Lambda$  estão mostrados na Fig. 5. O perfil que corresponde a  $\Lambda = 0$  é obtido quando  $dU_0/dx = 0$ , isto é, para camada limite sem gradiente de pressão (escoamento de Blasius) ou para um ponto onde a velocidade do campo externo a camada limite passa através de um máximo ou um mínimo. Neste caso o perfil de velocidades é idêntico ao perfil polinomial de quarta ordem dado na Tabela 1. O perfil na separação, que ocorre quando  $(\partial u / \partial y)_0 = 0$ , implica que a constante  $\mathbf{b}$  do polinômio seja nula, ou seja:  $\Lambda = -12$ . Para valores de  $\Lambda > +12$ , observa-se da Fig. 5 que ocorrem valores de  $u/U_0 > 1$  dentro da camada limite, como isto não representa fisicamente nenhum tipo de escoamento, valores de  $\Lambda$  acima de  $+12$  devem ser excluídos. Desta maneira, a faixa de valores do parâmetro  $\Lambda$  onde existe um significado físico a ele fica restrita a:  $-12 \leq \Lambda \leq +12$ .

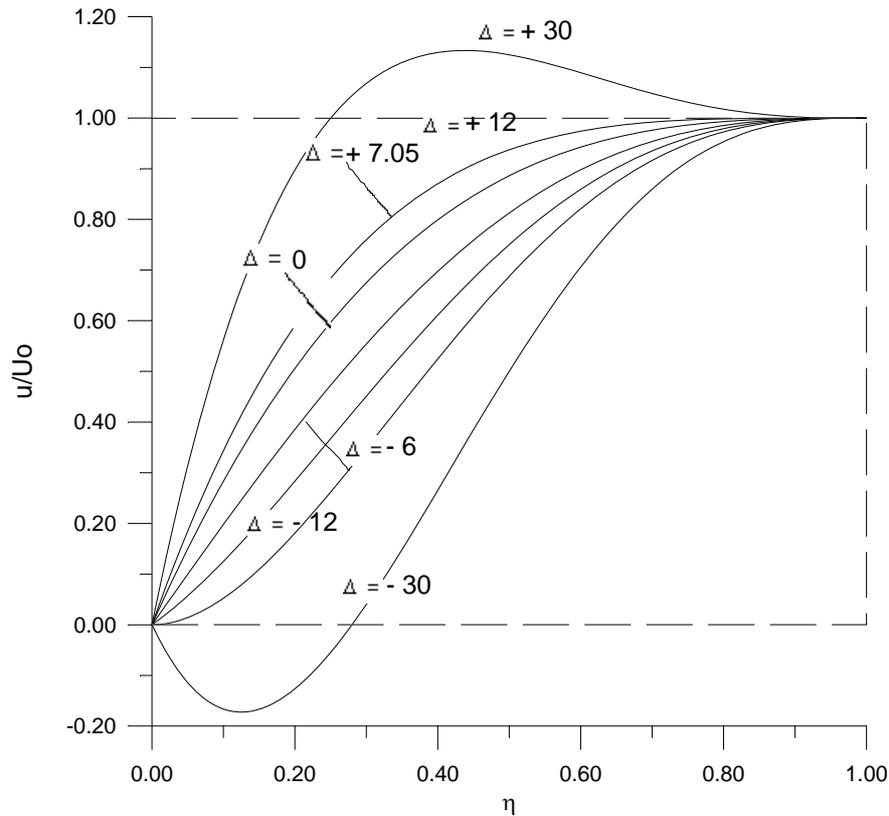


Fig. 5 - Perfis de velocidade dados pela Eq. (18) em função do parâmetro  $\Lambda$ .

Dado o perfil de velocidades definido pela Eq. (18), o próximo passo é avaliar as espessuras de deslocamento e de momento de acordo com as definições dadas pelas Eqs. (3) e (6):

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_{\eta=0}^{\eta=1} [1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_{\eta=0}^{\eta=1} [F(\eta) + \Lambda G(\eta)][1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta$$

calculando-se as integrais definidas com ajuda das definições das funções  $F(\eta)$  e  $G(\eta)$ , definidas na Eq. (19), encontra-se:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{1}{120} \Lambda$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{1}{945} \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2$$

A tensão de cisalhamento pode ser avaliada de forma similar:

$$\begin{aligned}\tau_W &= \mu \frac{U_0}{\delta} \frac{\partial(u/U_0)}{\partial\eta} \Big|_{\eta=0} = \mu \frac{U_0}{\delta} \frac{\partial}{\partial\eta} [F(\eta) + \Lambda G] \Big|_{\eta=0} \\ \therefore \frac{\tau_W \delta}{\mu U_0} &= 2 + \frac{1}{6} \Lambda\end{aligned}$$

A fim de que se possa determinar o parâmetro  $\Lambda(x)$  é necessário que se recorra a equação integral do momento, Eq. (15). Multiplicando-se ambos os lados da Eq. (15) pelo fator  $\theta/\nu U_0$ , encontra-se:

$$\frac{U_0 \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*) \frac{\theta}{\nu} \frac{dU_0}{dx} = \frac{\tau_W \theta}{\mu U_0}$$

ou

$$\frac{U_0}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\theta^2}{\nu} \right) + \left[ \left( 2 + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \frac{dU_0}{dx} \right] \left( \frac{\theta^2}{\nu} \right) = \frac{\tau_W \theta}{\mu U_0} \quad (21)$$

Na Eq. (21) a espessura da camada limite,  $\delta$ , não aparece explicitamente por que ela é cancelada em todos os termos. A partir da Eq. (21) pode-se avaliar a espessura do momento definindo as variáveis:

$$Z = \frac{\theta^2}{\nu} \quad \text{e} \quad K = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_0}{dx} \equiv Z \frac{dU_0}{dx} \quad (22)$$

Da equação acima pode-se constatar que a variável  $K$ , utilizando-se a condição de contorno que define  $\Lambda^1$ , pode ser escrita na forma:

$$K = \left( \frac{37}{315} - \frac{1}{945} \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2 \right)^2 \Lambda \quad (23)$$

---

<sup>1</sup> Uma relação explícita da forma  $\Lambda = \Lambda(K)$  não é conhecida e portanto deve-se recorrer a métodos numéricos para determinação de  $\Lambda$  dado  $K$ . Um método proposto para realizar esta tarefa é o método de Newton-Raphson. Dado um valor para  $K$  ele buscará os valores de  $\Lambda$  que satisfazem Eq. (21). Uma rotina de busca da raiz pode ser escrita na forma:

$$\Lambda_{i+1} = \Lambda_i - \left[ \frac{-2057529600K + 28387584\Lambda_i - 511488\Lambda_i^2 - 50976\Lambda_i^3 + 480\Lambda_i^4 + 25\Lambda_i^5}{28387584 - 1022976\Lambda_i - 152928\Lambda_i^2 + 1920\Lambda_i^3 + 125\Lambda_i^4} \right]$$

sua relação com o parâmetro  $\Lambda$  é mostrada na Fig. 6.

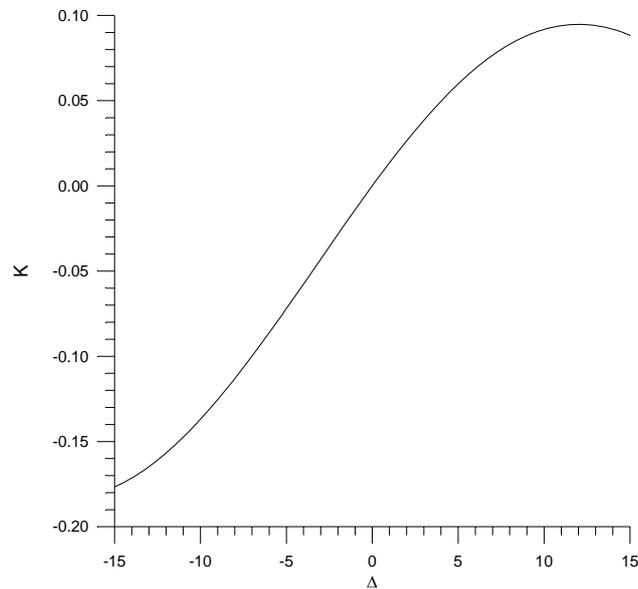


Fig. 6 - Relação funcional entre  $K$  e  $\Lambda$

Por sua vez, o fator de forma  $\delta^*/\theta$  e a tensão de cisalhamento  $\tau_w$ , podem ser escritos em função da variável  $K$  na forma:

$$\frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{1}{120}\Lambda\right)}{\left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945}\Lambda - \frac{1}{9072}\Lambda^2\right)} = F_1(K)$$

$$\frac{\tau_w \theta}{\mu U_0} = \left(2 + \frac{1}{6}\Lambda\right) \left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945}\Lambda - \frac{1}{9072}\Lambda^2\right) = F_2(K)$$

A Fig. 7 mostra a relação funcional entre  $F_1$  e  $F_2$  e  $K$ .

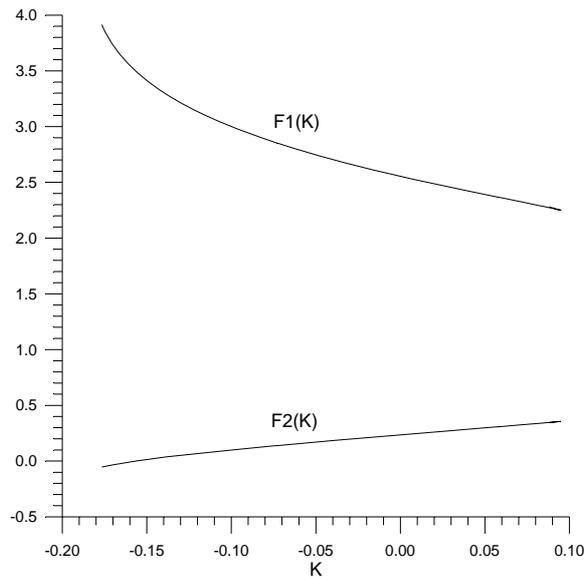


Fig. 7 - Relação funcional entre F1(K), F2(K) e K

Substituindo-se K, Z, F1(K) e F2(K) na Eq. (21) encontra-se:

$$\frac{U_0}{2} \frac{dZ}{dx} + [2 + F_1(K)]K = F_2(K) \quad (24)$$

fazendo:

$$F(K) = 2F_2(K) - 4K - 2KF_1(K)$$

$$= 2 \left( \frac{37}{315} - \frac{1}{945} \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2 \right) \left[ 2 - \frac{116}{315} \Lambda + \left( \frac{2}{945} + \frac{1}{120} \right) \Lambda^2 + \frac{2}{9072} \Lambda^3 \right]$$

onde a relação entre K e  $\Lambda$  é definida pela Eq. (23). Para referência, a função F(K) é mostrada na Fig. 8. O fato da função F(K) ser complexa é uma das dificuldades do método, entretanto pode-se citar duas características que amenizam o problema: i) A função F(K) é universal, isto é, ela independe da forma do corpo e por conseguinte seus valores podem ser tabelados e, ii) Dentro da faixa  $0 \leq K \leq 0.0783$  ela pode ser representada de maneira satisfatória através do polinômio de primeiro grau:  $F(K) \approx 0.47 - 6K$ , indicado pela linha pontilhada na Fig. 8.

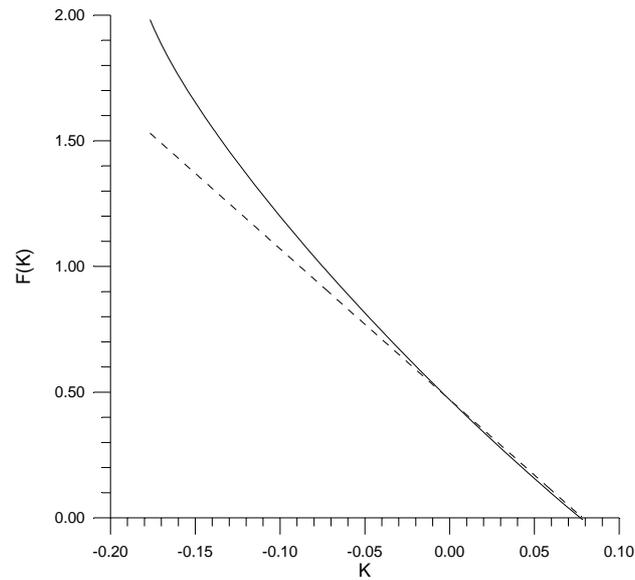


Fig. 8 - Função  $F(K)$  para cálculo da camada limite pelo método integral de Kármán-Pohlhausen (linha contínua). Linha pontilhada refere-se a uma aproximação:  $F(K) \approx 0.47 - 6K$ .

Fazendo-se estas substituições na equação do momento, Eq. (21), ela assume a sua forma mais compacta:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(K)}{U_0}; \quad K = Z \frac{dU_0}{dx} \quad (25)$$

Equação (25) é uma equação diferencial ordinária não-linear de primeira ordem para  $Z = \theta^2/\nu$  como uma função da coordenada  $x$  que descreve comprimento do corpo. Os valores numéricos que as funções  $K(\Lambda)$ ,  $F_1(K)$ ,  $F_2(K)$ , e  $F(K)$  assumem estão mostrados na Tabela 2.

$\Lambda$	K	F(K)	F1(K)	F2(K)
+12.0000	+0.0948	-0.0948	+2.2500	+0.3556
+11.5000	+0.0946	-0.0939	+2.2507	+0.3553
+11.0000	+0.0941	-0.0912	+2.2527	+0.3545
+10.5000	+0.0932	-0.0865	+2.2559	+0.3532
+10.0000	+0.0919	-0.0800	+2.2603	+0.3515
+9.5000	+0.0902	-0.0714	+2.2659	+0.3492
+9.0000	+0.0882	-0.0608	+2.2725	+0.3465
+8.5000	+0.0859	-0.0482	+2.2802	+0.3434
+8.0000	+0.0831	-0.0335	+2.2889	+0.3398
+7.5000	+0.0801	-0.0168	+2.2986	+0.3358
+7.0520	+0.0770	-0.0000	+2.3800	+0.3320
+7.0000	+0.0767	+0.0021	+2.3092	+0.3314
+6.5000	+0.0729	+0.0230	+2.3208	+0.3266
+6.0000	+0.0689	+0.0459	+2.3333	+0.3214
+5.5000	+0.0645	+0.0709	+2.3468	+0.3159
+5.0000	+0.0599	+0.0979	+2.3611	+0.3100
+4.5000	+0.0549	+0.1269	+2.3763	+0.3038
+4.0000	+0.0497	+0.1579	+2.3924	+0.2972
+3.5000	+0.0442	+0.1908	+2.4094	+0.2904
+3.0000	+0.0385	+0.2255	+2.4273	+0.2832
+2.5000	+0.0326	+0.2621	+2.4461	+0.2758
+2.0000	+0.0264	+0.3004	+2.4658	+0.2681
+1.5000	+0.0201	+0.3404	+2.4865	+0.2602
+1.0000	+0.0135	+0.3820	+2.5081	+0.2520
+0.5000	+0.0068	+0.4252	+2.5306	+0.2435
+0.0000	+0.0000	+0.4698	+2.5541	+0.2349
-0.5000	-0.0070	+0.5159	+2.5785	+0.2261
-1.0000	-0.0140	+0.5633	+2.6040	+0.2171
-1.5000	-0.0212	+0.6119	+2.6305	+0.2079
-2.0000	-0.0284	+0.6616	+2.6580	+0.1986
-2.5000	-0.0357	+0.7123	+2.6867	+0.1891
-3.0000	-0.0429	+0.7640	+2.7164	+0.1795
-3.5000	-0.0502	+0.8165	+2.7473	+0.1697
-4.0000	-0.0575	+0.8698	+2.7794	+0.1599
-4.5000	-0.0648	+0.9236	+2.8127	+0.1500
-5.0000	-0.0720	+0.9780	+2.8473	+0.1400
-5.5000	-0.0791	+1.0327	+2.8832	+0.1299
-6.0000	-0.0862	+1.0877	+2.9205	+0.1198
-6.5000	-0.0931	+1.1429	+2.9592	+0.1097
-7.0000	-0.0999	+1.1981	+2.9994	+0.0996
-7.5000	-0.1066	+1.2532	+3.0412	+0.0894
-8.0000	-0.1130	+1.3080	+3.0846	+0.0792
-8.5000	-0.1193	+1.3626	+3.1296	+0.0691
-9.0000	-0.1254	+1.4167	+3.1765	+0.0590
-9.5000	-0.1313	+1.4701	+3.2252	+0.0490
-10.0000	-0.1369	+1.5229	+3.2758	+0.0390
-10.5000	-0.1423	+1.5748	+3.3285	+0.0291
-11.0000	-0.1474	+1.6257	+3.3834	+0.0193
-11.5000	-0.1522	+1.6755	+3.4405	+0.0096
-12.0000	-0.1567	+1.7241	+3.5000	+0.0000

Tabela 2 - Valores numéricos das funções K( $\Lambda$ ), F1(K), F2(K), e F(K)

### Método de Solução da Equação (25)

Antes de proceder para a integração da Eq. (25) é necessário observar que é necessário ter-se um valor inicial para  $Z$  e  $K$  em  $x = 0$ . Os valores de  $Z$  e  $K$  podem ser obtidos a partir das condições do escoamento no bordo de ataque do corpo que podem ser, de modo genérico, i) Corpo com borda de ataque com ângulo zero (por exemplo uma placa plana) e ii) Corpos com ponto de estagnação no bordo de ataque (cilindros e aerofólios).

Relativo a condição de um bordo de ataque com ângulo zero, as condições iniciais são definidas pelas condições da placa plana:  $Z = K = 0$ . Entretanto, relativo a condição inicial ser um ponto de estagnação,  $U_0 = 0$  em  $x = 0$ , surge uma indeterminação no denominador da Eq. (25) do tipo  $F(K)/0$  produzindo uma inclinação infinita para a curva  $dZ/dx$ . Como isto não ocorre fisicamente, esta singularidade pode ser removida somente se  $F(K) = 0$  em  $x = 0$ . Retornando a expressão que determina  $F(K)$  em função de  $\Lambda$  observa-se que  $F(K) = 0$  somente se  $\Lambda = 7.052$  que corresponde a  $K = 0.0770$ . Portanto,  $\Lambda = 7.052$ , é o valor que o parâmetro  $\Lambda$  assume no ponto de estagnação. Nestas condições, Eq. (23) toma forma  $0/0$  em  $x = 0$ . Todavia, em  $x = 0$ , apesar da velocidade ser nula, sua derivada primeira não é,  $dU_0/dx|_{x=0} \neq 0$ , e aplicando-se a regra de L'Hopital para o limite quando  $x \rightarrow 0$  encontra-se que o valor de  $dZ/dx|_{x=0}$  é dado por:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{dZ}{dx} \Big|_{x=0} \right] = \frac{dF(K)/dx}{dU_0/dx} \equiv \frac{[dF(K)/dK][dK/dx]}{dU_0/dx}$$

mas

$$K = Z \frac{dU_0}{dx} \rightarrow Z(0) = \frac{0.0770}{dU_0/dx}$$

$$\frac{dK}{dx} = \frac{dU_0}{dx} \frac{dZ}{dx} + Z(0) \frac{d^2U_0}{dx^2}$$

$$\frac{dF}{dK} \Big|_{K=0.0770} = -6$$

substituindo-se estes valores na expressão que avalia  $dZ/dx$ , encontra-se que para  $x \rightarrow 0$

$$Z(0) = \frac{0.0770}{dU_0/dx};$$

e

$$\frac{dZ}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{Z(0)[dF/dK][d^2U_0/dx^2]}{(1 - dF/dK)[dU_0/dx]} = -0.0660 \frac{[d^2U_0/dx^2]}{[dU_0/dx]^2} \quad (26)$$

Com estes valores numéricos a Eq. (25) pode ser convenientemente integrada utilizando-se técnicas numéricas de integração, por exemplo regra de Simpson. Os cálculos começam com valores de:  $\Lambda(0) = 7.052$  e  $K(0) = 0.0770$  para o ponto de estagnação em  $x = 0$ , e são terminados quando alcançam o ponto de separação com  $\Lambda(x_{sep.}) = -12$  e  $K(x_{sep.}) = -0.1567$ . A velocidade externa  $U_0(x)$ , junto com sua primeira derivada,  $dU_0(x)/dx$  são dadas pela solução do campo externo de velocidades ou obtidas experimentalmente. O valor de  $d^2U_0(x)/dx^2|_{x=0}$  é necessário somente na origem,  $x = 0$ , para determinar a inclinação inicial da curva  $Z(x)$ , conforme mostrado nas condições iniciais requeridas.

O procedimento usado para cálculo pode ser resumido como segue:

1)	O campo de velocidades externo, $U_0(x)$ , e sua primeira derivada, $dU_0(x)/dx$ , são dados em termos da coordenada $x$ , medida a partir do bordo de ataque ao longo do corpo.
2)	A integração da Eq. (25) resulta em valores de $Z(x)$ e $K(x)$ de maneira que a espessura de momento, $\theta$ , pode ser calculada diretamente pela Eq. (22), e a posição do ponto de separação pode ser determinada subseqüentemente.
3)	A variação do parâmetro $\Lambda(x)$ é obtida da Eq. (23) ou através da Tabela 2.
4)	A espessura de deslocamento, $\delta^*$ , e a tensão na parede, $\tau_w$ , são determinados diretamente pelas funções $F1(K)$ e $F2(K)$ em conjunto com o valor de $\theta$ obtido no item 1.
5)	A espessura da camada limite vem diretamente da Eq. (20).
6)	Finalmente, o perfil de velocidades é obtido da Eq. (18).

O processo de integração da Eq. (25) é, de sobremaneira, simplificado sem apreciável perda de precisão no método, considerando-se a função  $F(K)$  representada pela reta:  $F(K) = 0.470 - 6K$ . Substituindo-se esta relação na Eq. (25),

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{0.47 - 6K}{U_0}$$

mas

$$K = Z \frac{dU_0}{dx}$$

que substituindo-se na expressão anterior resulta em:

$$\frac{1}{U_0^5} \frac{d}{dx} (ZU_0^6) = 0.47$$

A função  $Z(x)$  é obtida diretamente integrando-se a equação do momento:

$$Z(x) = \frac{0.47}{U_0(x)^6} \int_0^x U_0(\zeta)^5 d\zeta$$

A espessura de momento é obtida pela Eq. (22), notando-se que  $Z = \theta^2/\nu$ ,

$$\theta^2(x) = \frac{0.47\nu}{U_0(x)^6} \int_0^x U_0(\zeta)^5 d\zeta \quad (26)$$

### Exemplos

A seguir são estudados três escoamentos como casos exemplos, a saber: um escoamento sobre uma placa plana, um escoamento com um ponto de estagnação e o escoamento em um cilindro de raio R. Nestes casos é utilizado a Eq. (26) para avaliação da espessura de momento  $\theta$ , e as subseqüentes variáveis conforme a metodologia descrita anteriormente. Para referência, as principais variáveis estão listadas na Tabela 3. Em particular, para o caso do cilindro,  $\alpha$  é o ângulo medido a partir do ponto de estagnação a jusante.

	Placa Plana (Blasius)	Estagnação 2-D	Cilindro de raio R $x = \alpha R$
$U_0(x)$	$U_0$	$ax$	$-2U_0 \sin(\alpha)$
$\frac{d}{dx}[U_0(x)]$	0	$a$	$-2U_0 \cos(\alpha)$
$\theta^2(x) = \frac{0.47\nu}{U_0(x)^6} \int_0^x U_0(\zeta)^5 d\zeta$	$0.47\nu x/U_0$	$0.0783\nu/a$	$\frac{9.79167 \cdot 10^{-4} \cdot \nu \cdot R}{U_0} \cdot [19 + 18 \cos(\alpha) + 3 \cos(2\alpha)] \cdot \sec^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$K = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_0}{dx}$	0	0.0783	$+0.00195833 \cdot \cos(\alpha) \cdot [19 + 18 \cos(\alpha) + 3 \cos(2\alpha)] \cdot \sec^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$\left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945} \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2\right)^2 \Lambda - K = 0; \Lambda =$	0	7.052	uma função de (x)
$\frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{1}{120} \Lambda\right)}{\left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945} \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2\right)}$	2.554	2.308	uma função de (x)
$\frac{\tau_w \theta}{\mu U_0} = \left(2 + \frac{1}{6} \Lambda\right) \left(\frac{37}{315} - \frac{1}{945} \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2\right)$	0.235	0.332	uma função de (x)

Tabela 3 - Resultados do método de Kármán-Pohlhausen.

Os resultados para placa plana foram previamente revelados na Tabela 1. Para o escoamento em um ponto de estagnação bi-dimensional os valores obtidos para: espessura de deslocamento, espessura de momento e tensão de cisalhamento na parede, diferem da solução exata de Falkner-Skan em -1.1%; - 4.8% e - 3.6%, respectivamente. Como observação final, destaca-se o fato do parâmetro  $K$  encontrado ser igual a 0.078 e não 0.0770 como se havia determinado a priori. Esta diferença ocorre pelo fato de usar uma aproximação linear para a função  $F(K) = 0.47 - 6K$ .

Finalmente, para o cilindro as espessuras de momento e deslocamento e também a tensão de cisalhamento estão próximas da solução exata de Hiemenz (obtida a partir de uma expansão em série da função corrente, veja Schlichting). Entretanto, o ponto de separação é previsto para um ângulo de 107 graus contados a partir do ponto de estagnação frontal, enquanto que no experimento ele ocorre para 82 graus. Além disto, o ponto de pressão mínima previsto ocorrer em 90 graus ocorre no experimento por volta de 70 graus. A conclusão que se chega é que o fato do escoamento se separar ele causa uma alteração na distribuição de velocidades do escoamento externo. Medindo-se experimentalmente a distribuição de pressão e substituindo-se os pontos discretos na Eq. (26), encontra-se que o ponto de separação ocorre para um ângulo de 81.5 graus, uma excelente concordância com o dado experimental.

### Comentários Sobre o Método de Kármán-Pohlhausen

O método proposto por Pohlhausen, utilizando um polinômio de quarto grau para representar o perfil de velocidades, foi largamente utilizado até início da década de 50. Ele foi suplantado por outros métodos integrais que não apresentam certas deficiências que serão agora discutidas.

Uma das deficiências do método de Pohlhausen refere-se a escolha do perfil de velocidades utilizado, Eq. (18) e Fig. 5. Ele apresenta valores da velocidade adimensional maiores do que um para valores de  $\Lambda(x) > 12$ , o que é fisicamente incorreto para escoamentos isotérmicos em regime permanente. Conseqüentemente o método apresenta falhas para escoamentos com gradiente de pressão extremamente favoráveis, por exemplo quando comparado com soluções exatas do escoamento de Jeffrey-Hamel (White). Por outro lado, quando há escoamentos com gradientes de pressão desfavoráveis o método indica que para  $\Lambda(x) = -12$  há a separação, entretanto, a magnitude deste valor de  $\Lambda(x)$  é grande quando comparada com soluções exatas do escoamento de Jeffrey-Hamel que indicam  $\Lambda(x) = -5$ . Além disto, outra deficiência do método, concerne a necessidade do valor da segunda derivada de  $U_0(x)$  em  $x = 0$  para avaliar a inclinação inicial de  $Z(x)$ , Eq. (26). Como  $U_0(x)$  é freqüentemente disponível através de medidas experimentais fornecidas em pontos discretos, há possibilidades de geração de um grande erro envolvendo a diferenciação numérica dos pontos experimentais duas vezes.

Em vista destas deficiências outros métodos integrais, baseados na equação integral do momento, foram desenvolvidos para tentar suplantá-las. Dentre estes, o que recebe maior reconhecimento é o método de Thwaites .

### Método de Thwaites

O método de Thwaites (1949) baseia-se em relações determinadas experimentalmente para diversos escoamentos tomados como casos teste. Ele diferencia-se do método de Pohlhausen porque não se baseia no uso explícito de perfis de velocidades. Busca-se expressar a taxa de variação do quadrado da espessura do momento em função da velocidade externa e sua derivada. Esta relação é análoga a Eq. (25), e é escrita na forma:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\theta^2}{v} \right) = \frac{F(\lambda)}{U_0} \quad (27)$$

onde:

$$\lambda = \frac{\theta^2}{v} \frac{dU_0}{dx}$$

e

$$F(\lambda) = a - b \cdot \lambda$$

Ele demonstrou isto de maneira convincente analisando todas as possíveis soluções exatas e cálculos aproximados através de séries de potências para mostrar que os valores de  $F(\lambda)$ , avaliados através destas soluções, em nenhum caso difere da relação linear:

$$F(\lambda) = 0.45 - 6 \cdot \lambda$$

Deste modo, a Eq. (27) possui uma solução analítica explícita, de forma análoga a Eq. (26), que resulta em:

$$\theta^2(x) = \frac{0.45v}{U_0(x)^6} \int_0^x U_0(\zeta)^5 d\zeta \quad (28)$$

Já os valores de tensão de cisalhamento na parede e espessura de deslocamento estão relacionados por funções auxiliares  $S(\lambda)$  e  $H(\lambda)$  tais que:

$$\frac{\tau_w \theta}{\mu U_0} = S(\lambda)$$

$$\frac{\delta^*}{\theta} = H(\lambda)$$

Os valores encontrados por Thwaites para as funções  $S(\lambda)$  e  $H(\lambda)$  são apresentados na Tabela 4 e mostrados graficamente na Fig. 9. O valor de  $\lambda = -0.090$  representa o ponto de separação.

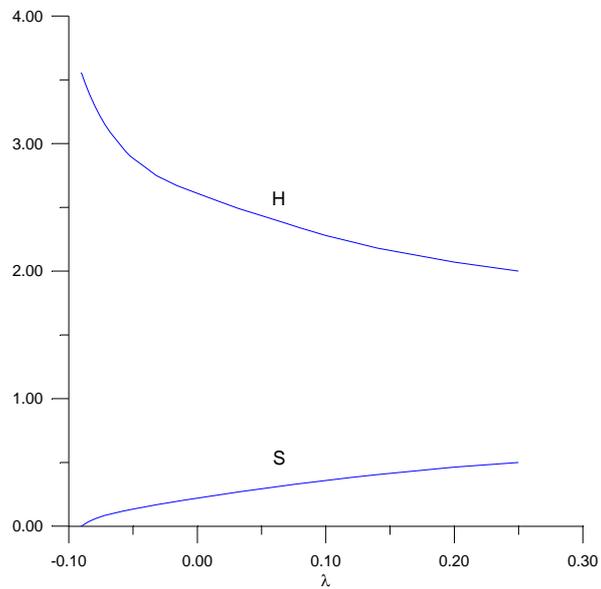


Fig. 9 - Funções da tensão de cisalhamento e fator de forma correlacionadas por Thwaites (1949)

$\lambda$	$H(\lambda)$	$S(\lambda)$
+0.250	2.00	0.500
+0.200	2.07	0.463
+0.140	2.18	0.404
+0.120	2.23	0.382
+0.100	2.28	0.359
+0.080	2.34	0.333
+0.064	2.39	0.313
+0.048	2.44	0.29
+0.032	2.49	0.268
+0.016	2.55	0.244
+0.000	2.61	0.220
-0.016	2.67	0.195
-0.032	2.75	0.168
-0.040	2.81	0.153
-0.048	2.87	0.138
-0.052	2.90	0.130
-0.056	2.94	0.122
-0.060	2.99	0.113
-0.064	3.04	0.10
-0.068	3.09	0.095
-0.072	3.15	0.085
-0.076	3.22	0.072
-0.080	3.30	0.056
-0.084	3.39	0.038
-0.086	3.44	0.027
-0.088	3.49	0.015
-0.090	3.55	0.000

Tabela 4 - Funções da tensão de cisalhamento e fator de forma correlacionadas por Thwaites (1949)

Os valores correlacionados por Thwaites são bastante confiáveis ( $\pm 5\%$ ) para escoamentos com gradiente de pressão favorável, mas as soluções exatas apresentam um espalhamento considerável para valores negativos de  $\lambda$ , e deve-se esperar erros da ordem de  $\pm 15\%$  utilizando-se estas estimativas próximo do ponto de separação. Entretanto o método de Thwaites é um dos métodos integrais mais confiáveis além de ser relativamente simples de se executá-lo numericamente.

### Exemplo

Em 1938 Howarth propôs uma distribuição de velocidade externa linearmente decrescente

$$U_0(x) = K \left( 1 - \frac{x}{L} \right)$$

como um modelo teórico para estudo de camada limite laminar. Utilize o método de Thwaites para calcular a) o ponto de separação e compare com a solução exata obtida através de um computador digital:  $x_{\text{sep}}/L = 0.119863$  calculada por Wiperman em 1969. Também calcule o valor do coeficiente de atrito local  $C_f$  para  $x/L = 0.1$ .

a) Notando-se que  $dU_0/dx = -U_0/L = \text{constante}$ : a velocidade decresce, a pressão aumenta, e o gradiente de pressão é adverso. Utilizando-se a Eq. (28),

$$\begin{aligned} \theta^2(x) &= \frac{0.45\nu}{K^6(1-x/L)^6} \int_0^x K^5(1-\zeta/L)^5 d\zeta \\ &= 0.075 \frac{\nu L}{K} \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^{-6} - 1 \right] \end{aligned}$$

Então o fator adimensional  $\lambda$  é dado por:

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_0}{dx} = -\frac{\theta^2 K}{\nu L} = -0.075 \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^{-6} - 1 \right]$$

A separação ocorre para  $\lambda = -0.090$ , então o ponto de separação:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{sep}} = -0.090 &= -0.075 \left[ \left( 1 - \frac{x_{\text{sep}}}{L} \right)^{-6} - 1 \right] \\ \therefore \frac{x_{\text{sep}}}{L} &= 1 - 2.2^{-1/6} = 0.123 \end{aligned}$$

A previsão do ponto de separação é melhor do que 3% da solução exata de Wiperman com um esforço computacional bem mais modesto.

b) Para calcular o coeficiente de atrito local em  $x/L = 0.1$  (bem próximo do ponto de separação), primeiramente deve-se calcular  $\lambda$ :

$$\lambda = -0.075 \left[ (1 - 0.1)^{-6} - 1 \right] = -0.0661$$

Consultando a Tabela 4,  $S(\lambda = -0.0661) = 0.099$ , mas  $S = (1/2)C_f Re_\theta$ , onde  $C_f$  é igual a  $2\tau_w/\rho U_0^2$  e  $Re_\theta$  é igual a  $\theta U_0/\nu$ , então:

$$C_f(x/L = 0.1) = \frac{2S}{\sqrt{-\lambda}} \frac{1}{\sqrt{Re_L}} = \frac{0.77}{\sqrt{Re_L}}$$

## **Referências & Leitura Complementar**

Rosenhead, L., "**Laminar Boundary Layers**", Oxford (1963)

Schlichting, H., "**Boundary Layer Theory**", McGraw Hill (1955)

White, F.M., "**Viscous Flow**", McGraw Hill (1974)