INTRODUÇÃO AO MÉTODO DAS PERTURBAÇÕES

Prof. Eugênio Spanó Rosa
FEM-DE UNICAMP
erosa@fem.unicamp.br

Métodos de Perturbação

A teoria de perturbação é uma coleção de métodos iterativos para a obtenção de soluções aproximadas de problemas que envolvem um pequeno parâmetro, $\varepsilon << 1$, também chamado de parâmetro de perturbação.

De modo genérico a teoria de perturbação realiza uma decomposição de um problema em um número infinito de problemas relativamente mais fáceis de se obter a solução. As potencialidades desta teoria residem no fato de que, em geral, os primeiros termos das séries de solução, são suficientes para revelar características importantes da solução de um problema.

A seguir é apresentado um exemplo elementar para introduzir as idéias da teoria de perturbação.

Exemplo 1 - Raizes de um Polinômio Cúbico

Considere o polinômio cúbico apresentado na Eq. (1), quer-se determinar suas raizes.

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0 \tag{1}$$

A Eq. (1) como se apresenta não é um problema de perturbação porque não há um parâmetro pequeno ε. A primeira tarefa é converter a Eq. (1) em uma equação onde exista um parâmetro de perturbação. Em geral esta tarefa não é fácil para determinados problemas, entretanto para o exemplo 1 ela é bastante óbvia. Ao invés de um único polinômio, considera-se uma família de polinônios introduzindo-se o parâmetro ε,

$$x^3 - (4+\varepsilon)x + 2\varepsilon = 0 \tag{2}$$

Note que a Eq. (2) reproduz Eq. (1) quando $\varepsilon = 0.001$.

Pode parecer estranho a primeira vista mas é mais fácil calcular as raizes aproximadas da família de polinômios do que resolver a Eq. (2) para $\varepsilon = 0.001$. A razão para isto é que se as raízes forem consideradas funções de ε , então pode-se assumir a solução em uma série assintótica de potências de ε , como sugere a Eq. (3)

$$x(\varepsilon) = a_0\varepsilon^0 + a_1\varepsilon^1 + a_2\varepsilon^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon^n \tag{3}$$

os coeficientes a_n são obtidos substituindo-se Eq. (3) na Eq. (2). Para efeitos de cálculos, a série assintótica será truncada nos termos de terceira ordem, assim

$$x(\varepsilon) = a_0\varepsilon^0 + a_1\varepsilon^1 + a_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \tag{4}$$

Substituindo-se Eq. (4) na Eq. (2) tem-se então

$$\left[a_0\varepsilon^0 + a_1\varepsilon^1 + a_2\varepsilon^2\right]^3 - (4+\varepsilon)\cdot\left[a_0\varepsilon^0 + a_1\varepsilon^1 + a_2\varepsilon^2\right] + 2\varepsilon = O\left(\varepsilon^3\right) \qquad (5)$$

fatorando Eq. (5) e igualando-se os termos de mesma potência de ε,

$$\left(a_0^3 - 4a_0\right)\varepsilon^0 + \left(3a_0^2a_1 - 4a_1 - a_0 + 2\right)\varepsilon^1 + \left(3a_0a_1^2 + 3a_0^2a_2 - 4a_2 - a_1\right)\varepsilon^2 = O\left(\varepsilon^3\right) \quad (6)$$

Como o parâmetro ε é arbitrário, fazendo ε → 0, a Eq. (6) → 0; consequentemente os produtos de coeficientes an de mesma potência de ε devem ser nulos, assim:

$$\text{Aprox. Ordem Zero } \left(\varepsilon^0\right): \quad a_0^3 - 4a_0 = 0$$

$$\text{Aprox. Ordem Um } \left(\varepsilon^1\right): \quad 3a_0^2a_1 - 4a_1 - a_0 + 2 = 0$$

$$\text{Aprox. Ordem Dois } \left(\varepsilon^2\right): \quad 3a_0a_1^2 + 3a_0^2a_1 - 4a_2 - a_1 = 0$$

Observe que a solução da Eq. (1) restringe-se, após a introdução do método das perturbações, a solução de três equações algébricas. Os coeficientes a_0, a_1 e a_2 são determinados como segue: a_0 é calculado da equação de ordem zero, uma vez determinado a_0 seu valor é utilizado para determinar a_1 da equação de ordem um e, os valores de a_0 e a_1 já calculados são utilizados para determinar a_2 da equação de ordem dois. Os valores que os coeficientes a_0, a_1 e a_2 são mostrados abaixo:

$$\left(\varepsilon^0\right) \Rightarrow a_0 = -2, 0, +2$$

$$\left(\varepsilon^1\right) \Rightarrow a_1 = -1/2, +1/2, 0$$

$$\left(\varepsilon^2\right) \Rightarrow a_2 = +1/8, -1/8, 0$$

A solução aproximada das raízes da Eq. (1) é formada a partir da série assintótica, Eq. (4). Um dos aspectos importantes da solução da série de perturbação é a introdução de correções na solução de ordem zero pelos termos de ordem superior. Esta correção pode ser tanto menor quanto menor for o parâmetro ε. Para referência, a série contendo as soluções aproximadas das raízes do polinômio é apresentada a seguir

$$x_1 = -2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right)$$

$$x_2 = -0 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right)$$

$$x_3 = +2 - 0\cdot\varepsilon + 0\cdot\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right)$$

Quando ε = 0.001, obtêm-se as raízes da Eq, (1)

$$x_1 = -2.000499875$$
$$x_2 = +0.000499875$$
$$x_3 = +2$$

que são exatas até uma parte em 10^9! Verifique.

Este exemplo ilustra as etapas do método de perturbação:

1. Conversão do problema original em um problema de perturbação através da introdução de um parâmetro pequeno, $\varepsilon << 1$.

2. Assumir a resposta na forma de uma série de potências em ε, $x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n(\varepsilon)$

3. Substituir a série na equação do problema e isolar os termos de mesma potência de ε

4. Determinar os coeficientes da série resolvendo as equações associadas aos termos de mesma potência de ε

5. Escrever a resposta do problema em termos da série assintótica proposta.

Na série assintótica, $x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n(\varepsilon)$, $\delta_n(\varepsilon)$ é uma função elementar de ε demoninada por função de medição ou "gauge function". Para garantir a convergência da série é necessário que cada função de medição seja menor que a sua precedente no seguinte sentido:

$$\operatorname{Lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{1} = 0$$
$$\operatorname{Lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} = 0$$
$$\operatorname{Lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_{n+1}(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)} = 0, \forall n$$

Perturbações Regulares

É desenvolvido nesta seção uma aplicação do método das perturbações a uma equação diferencial. Uma das grandes potencialidades do método consiste na sua capacidade de abordar equações diferenciais não lineares através de uma sucessão de equações, usualmente lineares , mais simples de resolver. A aplicação do método é desenvolvida com o exemplo que segue.

Exemplo 2 - Perturbação Regular em uma Equação Diferencial

Considere a equação diferencial ordinária não linear,

$$\begin{gathered} f''+\varepsilon f f'+f'^2-C=0 \\ \text{com} \quad f(0)=0 \;\; \text{e} \;\; f(1)=1 \end{gathered} \tag{7}$$

Tomando a função de medição por $\delta_n(\varepsilon)=\varepsilon^n$, a representação da solução da Eq. (7) através de uma série assintótica truncada em terceira ordem fica sendo:

$$f(x,\varepsilon)=f_0(x,\varepsilon)\varepsilon^0+f_1(x,\varepsilon)\varepsilon^1+f_2(x,\varepsilon)\varepsilon^2+O\left(\varepsilon^3\right) \tag{8}$$

Substituindo-se a Eq. (8) na Eq. (7) obtêm-se:

$$\begin{aligned} &\left[f_0''(x,\varepsilon)+f_1''(x,\varepsilon)\varepsilon^1+f_2''(x,\varepsilon)\varepsilon^2\right] \\ &+\varepsilon\left[f_0(x,\varepsilon)+f_1(x,\varepsilon)\varepsilon^1+f_2(x,\varepsilon)\varepsilon^2\right]\cdot\left[f_0'(x,\varepsilon)+f_1'(x,\varepsilon)\varepsilon^1+f_2'(x,\varepsilon)\varepsilon^2\right] \\ &+\left[f_0'(x,\varepsilon)+f_1'(x,\varepsilon)\varepsilon^1+f_2'(x,\varepsilon)\varepsilon^2\right]^2-C=0 \end{aligned} \tag{9}$$

Agrupando os termos de mesma potência de ε obtêm-se:

$$\text{Ordem Zero}\left(\varepsilon^0\right): \quad f_0''+f_0^2-C=0$$

Sujeita as condições de contorno: $f_0(0)=0$ e $f_0(1)=1$
A solução desta equação diferencial ordinária linear, sujeita as condições de contorno, determina a aproximação de ordem zero, f_0.

$$\text{Ordem Um}\left(\varepsilon^1\right): \quad f_1''+f_0 f_0'+2f_0 f_1=0$$

Sujeita as condições de contorno: $f_1(0)=0$ e $f_1(1)=0$ porque f_0 já satisfaz as condições de contorno do problema original.

A solução desta equação diferencial ordinária, sujeita as condições de contorno determina a aproximação de ordem um, f_1.

Neste exemplo, o problema é chamado de perturbação regular porque todas as condições de contorno foram satisfeitas e a série é convergente em todo domínio.

Surgimento de Termos Seculares na Expansão Assintótica

Nesta seção será discutido o surgimento de não-uniformidades devido aos termos seculares na expansão em série assintótica do parâmetro de perturbação, conforme exposto pelo procedimento da seção anterior. O surgimento de termos seculares está associado a problemas de osciladores não lineares onde é previsto uma solução periódica com donímio limitado entretanto, a série de perturbação resulta em uma expansão não limitada; isto é, quando a variável independente tende ao infinito, a variável dependente também vai para o infinito.

Exemplo 4 - Oscilador não-Linear e Termos Seculares

Considere as oscilações de uma massa conectada a uma mola não-linear descrita pela equação de Duffing

$$u''+u+\varepsilon u^3=0, \qquad u(0)=a,\ u'(0)=0 \tag{10}$$

onde ε, o parâmetro de perturbação , é um número pequeno e positivo. Este problema admite a integral:

$$u'^2+u^2+\varepsilon\frac{u^4}{2}=\left(1+\frac{\varepsilon a^2}{2}\right)a^2 \tag{11}$$

Como o lado direito da Eq. (11) é sempre positivo, isto mostra que a solução de u deve ser limitada para qualquer valor de t, lembrando sempre que $\varepsilon > 0$.

Procurando uma solução aproximada para Eq. (10) utilizando uma expansão até primeira ordem do tipo:

$$u=u_0+\varepsilon\cdot u_1+O(\varepsilon^2) \tag{12}$$

Substituindo-se Eq. (12) na Eq. (11), expandindo-se e igualando-se os coeficientes de mesma potência em ε, conduz as equações diferenciais para u_0 e u_1:

$$u_0''+u_0=0, \qquad u_0(0)=a, \quad u_0'(0)=0$$

$$u_1''+u_1=-u_0^3, \qquad u_1(0)=0, \quad u_1'(0)=0$$

A solução para u_0 que satisfaz a condição inicial é:

$$u_0=a\mathrm{Cos}(t)$$

Substituindo-se u_0 na equação para u_1 e usando a identidade trigonométrica Cos(3t)=4Cos3(t)-3Cos(t), obtêm-se:

$$u_1''+u_1 = -a^3\,\frac{Cos(3t)+3Cos(t)}{4}$$

A solução que satisfaz a equação para u_1 é:

$$u_1 = -\frac{3a^3}{8}t\cdot Sin(t)+\frac{a^3}{32}\big(Cos(3t)-Cos(t)\big)$$

Logo a solução obtida na forma de série de potências em ε pode ser escrita como:

$$u \;= aCos(t)+\varepsilon a^3\left[-\frac{3}{8}t\cdot Sin(t)+\frac{1}{32}\big(Cos(3t)-Cos(t)\big)\right]+O(\varepsilon^2) \qquad (13)$$

Nota-se da Eq. (13) que a expansão com apenas dois termos da série não pode resultar em uma solução aproximada quando $t\to\infty$ porque o termo tSin(t) faz $u_1/u_0\to\infty$ quando $t\to\infty$; o termo tSin(t) é chamado de termo secular. Ele tende ao infinito quanto $t\to\infty$, enquanto que u deveria ter uma solução aproximada limitada para qualquer t. Destaca-se também que a variável t não necessita ser infinita para que a Eq. (13) deixe de ser válida; se $t = O(\varepsilon^{-1})$, o segundo termo é da mesma ordem do primeiro, ao do contrário da hipótese que εu_1 deveria ser uma pequena correção em u_0. Quando mais termos da série são calculados, termos seculares da forma t^n(Cos(t), Sin(t)) são obtidos naturalmente. Apesar da série resultante ser convergente, ela apresenta uma convergência lenta e a solução nunca pode ser válida para qualquer tempo t usando um número finito de termos da série.

O surgimento dos termos seculares é característico de oscilações não-lineares, nestes casos a técnica padrão do método das perturbações não pode ser aplicada. É necessário nestes casos recorrer às técnicas de renormalização. Uma abordagem interessante sobre aspectos físicos de oscilações não lineares, surgimento de termos seculares e métodos de perturbação é dada em Kahn (1990)

Perturbação Singular

Do ponto de vista matemático os problemas de perturbação singular estão associados quando o parâmetro de perturbação vem multiplicando a derivada de ordem mais elevada na equação. Se o parâmetro de perturbação tende a zero implica que o termo de derivada de ordem superior fica de uma grandeza inferior aos outros termos da equação diferencial e, consequentemente, a tendência é despreza-lo. Ao fazer isto, a equação diferencial não pode mais atender todas as condições de contorno especificadas no problema original e portanto o problema não pode ser resolvido. Do ponto de vista físico do problema, o surgimento de perturbações singulares está associado a regiões onde existe uma grande mudança no valor da variável dependente, caso típico de camadas limites. Para se obter expansões uniformemente válidas, deve-se reconhecer e utilizar o fato que estas regiões, onde existe uma grande mudança no valor da variável dependente, são caracterizadas através de uma ampliação das escalas que é diferente das escalas que caracterizam o comportamento da variável dependente fora destas regiões onde existe grande variações.

O exemplo a seguir ilustra, de modo qualitativo, o fenômeno da perturbação singular. Ele foi concebido originalmente por Prandtl para ilustrar o fenômeno da camada limite em 1931. Considere o problema de um oscilador mecânico linear constituido de uma massa, mola e amortecedor conforme mostra a Fig. 1, cuja equação e condições de contorno estão descritas na Eq. (14)

$$m \cdot x'' + \beta \cdot x' + c \cdot x = 0; \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 1 \tag{14}$$

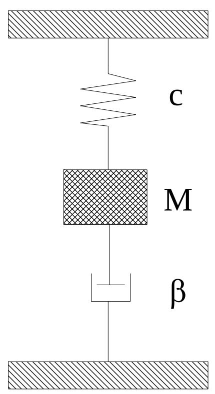


Fig. 1 - Sistema massa, mola e amortecedor

A solução geral da Eq. (14) é:

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

onde

$$\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mc}}{2m}$$

Passa-se a estudar agora o comportamento da solução em função dos valores que as constantes m, β e c podem assumir.

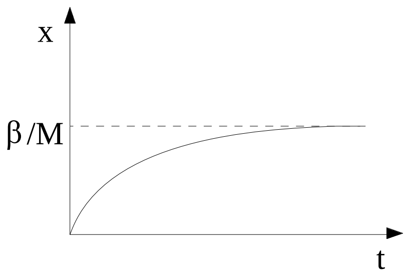
<u>Caso I : Constante da Mola, $c \to 0 \;\therefore\; \beta^2 >> 4mc$</u>

Neste caso, os valores que λ assume são:

$$\lambda = \frac{-\beta \pm \beta}{2m}; \quad \lambda_1 = -\beta / m \quad e \quad \lambda_2 = 0$$

e a solução fica sendo uma oscilação superamortecida:

$$x(t) = -\frac{m}{\beta}\left[e^{-\frac{\beta}{m}\cdot t} - 1\right]$$



note que a solução satisfaz as condições iniciais do problema.

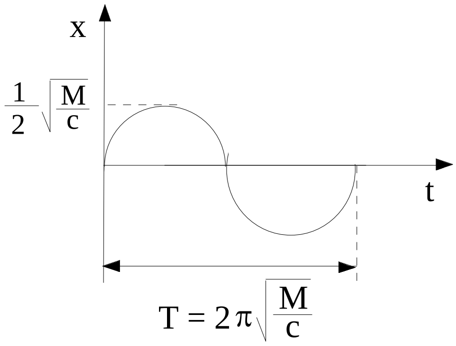
<u>Caso II : Constante do Amortecedor, $\beta \to 0 \;\therefore\; \beta^2 << 4mc$</u>

Neste caso, os valores que λ assume são:

$$\lambda = \frac{\pm\sqrt{-4mc}}{2m}; \quad \lambda_1 = i\sqrt{\frac{c}{m}} \quad e \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{c}{m}}$$

e a solução fica sendo uma solução não amortecida:

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot Sin\left[\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t\right]$$



note que a solução satisfaz as condições iniciais do problema.

<u>Caso III : A massa, $m \to 0$</u>

Neste caso a equação se reduz a uma EDO de primeira ordem:

$$\beta \cdot x' + c \cdot x = 0$$

cuja solução é:

$$x(t) = -\left(\frac{\beta}{c}\right) \cdot e^{-\frac{c}{\beta}t}$$

Note que esta solução pode satisfazer apenas uma das condições de contorno do problema original. Isto decorre do fato que a ordem da equação foi rebaixada, de ordem dois para ordem um, quando o termo de derivada de ordem superior foi eliminado porque $m \to 0$. Esta situação é típica de problemas de perturbação singular. De fato a solução é válida somente quando m = 0, mas para valores de m pequenos, a equação deve satisfazer as duas condições de contorno. Este problema pode ser resolvido revisitando a solução geral do problema e fatorando β da raiz,

$$\lambda = \frac{-\beta \pm \beta\sqrt{1-4mc/\beta^2}}{2m}$$

reconhecendo-se que:

$$m \to 0 \Rightarrow \frac{4mc}{\beta^2} << 1$$

a raiz de λ pode ser expandida em série de Taylor

$$(1-x)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2) \quad \text{desde que } x << 1$$

$$\sqrt{1-\frac{4mc}{\beta^2}} \cong 1 - \frac{2cm}{\beta^2}$$

substituindo-se esta aproximação para a raiz de λ encontra-se:

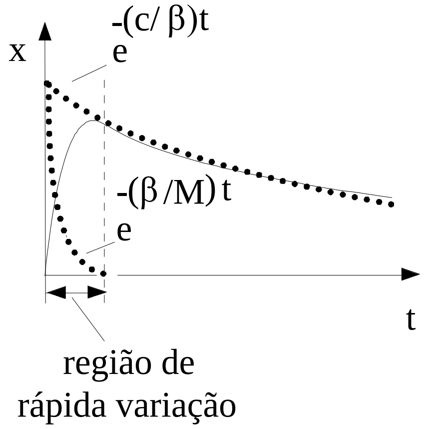
$$\lambda \cong \frac{-\beta \pm \beta\left(1-\dfrac{2cm}{\beta^2}\right)}{2m}; \qquad \lambda_1 = -\frac{c}{\beta} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{\beta}{m} + \frac{c}{\beta}$$

e a solução fica sendo:

$$x(t) \cong -\frac{m}{\beta}\left[e^{-\frac{c}{\beta}\cdot t} - e^{\left[\frac{c}{\beta}-\frac{\beta}{m}\right]\cdot t}\right]$$

mas como $m \to 0$, $c/\beta << \beta/m$, então

$$x(t) \cong -\frac{m}{\beta}\left[e^{-\frac{c}{\beta}\cdot t} - e^{-\frac{\beta}{m}\cdot t}\right]$$



Note que esta solução satisfaz as duas condições iniciais do problema. Ela apresenta uma componente de decaimento rápido proporcional a $e^{-\beta/m}$ e outra de decaimento lento proporcional a $e^{-c/\beta}$. A existência da região de decaimento rápido é necessária somente nos instantes iniciais do movimento e pela existência dela podem ser satisfeitas as duas condições iniciais do problema. Este tipo de comportamento descreve, de forma qualitativa, o comportamento de um fenômeno onde existe uma região onde há uma grande variação; esta região também é conhecida como região da camada limite.

Fora da região de rápido decaimento, a solução externa é uma boa aproximação porém, como pode-se notar na figura da solução (linha pontilhada), ela não é satisfatória na região da camada limite. Isto é decorrente que as duas condições de contorno não podem ser atendidas. Por outro lado, na região da camada limite, a solução interna de decaimento rápido (linha pontilhada) aproxima-se bem da solução exata mas diverge quando aplicada na região externa. A solução geral contêm as duas contribuições, há um casamento da solução da região interna (de rápida variação) com a região externa.

Perturbação Singular - Método Casamento Assintótico

O método de casamento assintótico para tratamento de problemas de perturbação singular é uma generalização da teoria de camada limite desenvolvida por Prandtl (1905). Originalmente era conhecido como método das expansões internas e externas ou método de expansões assintóticas duplas. Este métdo é exemplificado para um simples problema de contorno,

$$\begin{gathered} \varepsilon y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \end{gathered} \tag{15}$$

onde $\varepsilon << 1$. Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, a Eq. (15) reduz a:

$$y' + y = 0 \tag{16}$$

a qual é uma equação diferencial de primeira ordem que não pode satisfazer as duas condições de contorno impostas pela Eq. (15). Pode-se mostrar que a região da camada limite, ou de rápida variação da variável, está associada a condição de contorno $y(0)=\alpha$, veja discussão em Nayfeh; isto também pode ser verificado pela solução exata da Eq. (15). Neste caso, quando $\varepsilon \to 0$ a solução da Eq. (16) satisfazendo $y(1)=\beta$ é:

$$y^o \to \beta e^{1-x} \tag{17}$$

A solução da equação reduzida, Eq. (16) é simbolizada por y^o e denominada por expansão externa. Para pequenos valores de ε a solução da equação reduzida é próxima da solução exata da Eq. (16) exceto em um pequeno intervalo na vizinhança de x=0 onde a solução exata varia rápidamente de maneira que a condição de contorno $y(0)=\alpha$ possa ser satisfeita. Neste intervalo onde y varia muito rapidamente é chamado de camada limite em hidrodiânica.

Para determinar uma expansão válida na camada limite deve-se "ampliar" a escala utilizando uma transformação que "estica" a coordenada dentro da camada limite. Ao proceder desta forma, a transformação atua num sentido similar a uma "lente de aumento", ampliando uma região que era de ordem de grandeza muito menor do que a unidade para uma região (entenda-se domínio da função) de ordem unitária. Considere a variável de transformação,

$$\zeta = \frac{x}{\varepsilon} \tag{18}$$

Note que o parâmetro de perturbação no denominador conduz a uma ampliação de ζ porque $\varepsilon \ll 1$. Com esta transformação, a Eq. (15) fica sendo:

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \frac{d\ y}{d\zeta} + \varepsilon y = 0 \tag{19}$$

A introdução da transformação remove o parâmetro de perturbação do termo de derivada de ordem superior. Para $\varepsilon \to 0$, a Eq. (19) fica sendo:

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \frac{d\ y}{d\zeta} = 0 \tag{20}$$

cuja solução geral, em termos da variável transformada, é:

$$y^i = A + Be^{-\zeta} \tag{21}$$

onde A e B são constantes a serem determinadas e y^i denota a solução interna da expansão. Além disto, como Eq. (21) deve representar a solução na camada limite, ela deve satisfazer a condição $y(0)=\alpha$. Como $\zeta = 0$ corresponde a $x = 0$ então $B = \alpha - A$ e a Eq. (21) fica sendo:

$$y^i = A + (\alpha + A)e^{-\zeta} \tag{22}$$

Para determinar a constante A é necessário que o limite externo da solução da região da camada limite seja coincidente com o limite interno da solução externa. Isto define o processo de casamento das expansões em termos da igualdade dos limites

$$\mathrm{Lim}_{x\to 0}\, y^o(x,\varepsilon) = \mathrm{Lim}_{\zeta\to\infty}\, y^i(\zeta,\varepsilon) \tag{23}$$

Estes limites devem apresentar o mesmo valor da variável y para valores pequenos de $x = x0 \neq 0$, e é equivalente a dizer:

O limite interno da solução externa, chamado de $(y^o)^i$
deve ser igual ao limite externo da solução interna chamado de $(y^i)^o$

Baseado na Eq. (17), o limite interno da solução externa

$$\mathrm{Lim}_{x\to 0}\, y^o(x,\varepsilon) = \beta e$$

enquanto que o limite externo da solução interna, Eq. (22)

$$\mathrm{Lim}_{\zeta\to\infty}\, y^i(\zeta,\varepsilon) = A$$

Estes limites devem representar o mesmo valor de y para pequenos valores de $x = x0 \neq 0$. Igualando-se os limites encontra-se que $A = \beta e$, e a solução interna passa a ser:

$$y^i = \beta e + (\alpha + \beta e)e^{-\zeta} \tag{24}$$

Para se calcular o valor aproximado de y(x) pode-se usar as aproximações para a região interna, Eq. (24) e a externa, Eq. (17). Para referência o exemplo acima foi considerado tomando-se as constantes $(\alpha,\beta) = (1,0)$ e $\varepsilon = 0.05$. A Fig. 2 mostra uma comparação entre a solução exata de y(x) e suas aproximações. Percebe-se que yi é uma boa aproximação na região interna (camada limite $\approx O(\varepsilon)$), e que yo representa bem a solução exata para a região externa.

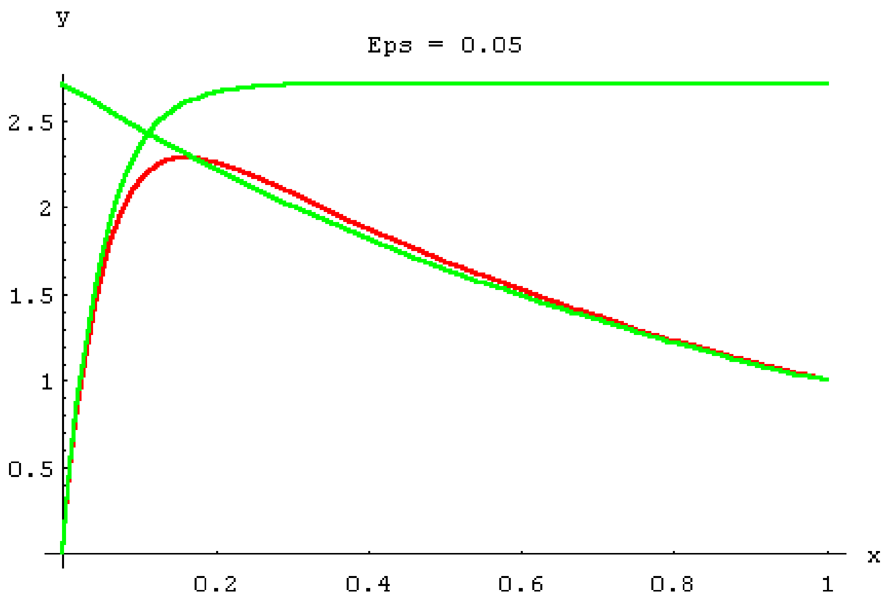


Fig. 2 - Solução exata da Eq. (15) para $(\alpha,\beta,\varepsilon) = (1,0,0.05)$ e suas aproximações para as regiões interna e externa.

Para se calcular y em todo o intervalo é necessário mudar de uma solução para outra. Estas mudanças não convenientes para os cálculos, o valor de y pode ser calculado através de uma única e uniforme solução denominada de solução composta. A solução composta, y^c, é dada por:

$$y^c = y^i + y^o - \mathrm{Lim}_{x\to\infty} y^i = y^i + y^o - \mathrm{Lim}_{x\to 0} y^o \tag{25}$$

A Eq. (25) é uma boa aproximação tanto na região externa quanto na interna. O sucesso desta solução composta reside no fato da existência de uma região de sobreposição entre as soluções externa e interna onde ambas são válidas, veja Fig. 2. Aplicando-se Eq. (25) para o presente exemplo encontra-se que a solução composta é formada por:

$$y^c = \left[\beta e^{1-x}\right] + \left[\beta e + (\alpha + \beta e) e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right] - \beta e \tag{26}$$

Uma comparação entre a solução exata da Eq. (15) e a solução composta, Eq. (26), é mostrada na Fig. 3. Os valores de $(\alpha,\beta) = (1,0)$, enquanto que ε assume os valores 0.01, 0.05 e 0.1. Nota-se que as aproximações melhoram a medida que ε tende a zero.

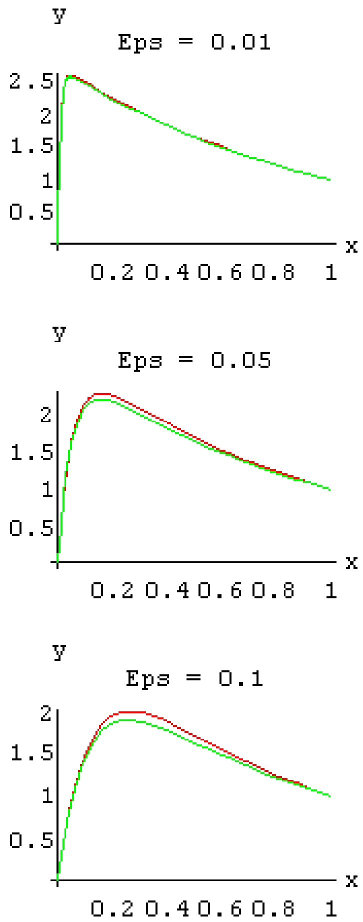


Fig. 3 - Solução exata da Eq. (15) para $(\alpha,\beta) = (1,0)$ e suas aproximações para as regiões interna e externa quando ε assume valores 0.01, 0.05 e 0.1.

Referências

[1] Van Dyke.; **"Perturbation Methods in Fluid Mechanics"**, Parabolic Press (1975)

[2] Nayfeh, A.H..; **"Perturbation Methods"**, John Willey (1973)

[3] Kevorkian, J. and Cole, J.D.; **"Perturbation Methods in Applied Mathematics"**, Springer Verlag (1981)

[4] Kahn, P.B.; **"Mathematical Methods for Scientists and Engineers: Linear and Non-Linear Systems"**, John Wiley (1990)