

Soluções por Similaridade

Soluções por Similaridade	2
A Transformação de Blasius	5
Escoamento em uma Placa Plana Semi-Infinita.....	5
Soluções de Falkner-Skan	13
Escoamentos em Cunhas	13
Jato Bi-Dimensional Laminar	24
Referências & Leitura Complementar	31

Prof. Eugênio Spanó Rosa
FEM-DE UNICAMP
erosa@fem.unicamp.br

Soluções por Similaridade

As equações da Camada Limite Hidrodinâmica para um escoamento laminar em regime permanente e bi-dimensional são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = U_0 \frac{dU_0}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

onde u e v são, respectivamente, as velocidades paralelas e normais ao escoamento externo; $U_0(x)$ a velocidade do escoamento externo a camada limite e ν a viscosidade cinemática do fluido. O sistema de equações acima é sujeito às condições de contorno:

- $u(x,0) = 0$ - condição de não deslizamento na parede
- $u(x,\infty) = U_0$ - a velocidade dentro da C.L. tende assintoticamente ao escoamento externo quando $y \rightarrow \infty$.
- $u(x_0,y) = g(y)$ - o perfil de velocidades em um ponto $x = x_0$, $x_0 > 0$, deve ser conhecido
- $v(x,0) = 0$ - sem injeção ou sucção de massa na parede.

Existem vários métodos de solução da equação parabólica acima, pode-se citar: métodos de diferenças finitas implementados em computadores e métodos integrais onde um perfil de velocidades é assumido. Entretanto, este capítulo será dedicado a uma outra técnica de solução: a transformação de similaridade.

A solução por similaridade existe se a equação de transporte e suas condições de contorno permitirem uma transformação homogênea. Isto implica em encontrar uma relação entre as variáveis independentes das Eqs.(1) e (2), no caso y e x , para apenas uma variável, η , que seria uma combinação entre y e x e uma função $h(x)$ a ser determinada.

O primeiro passo na busca de uma transformação de similaridade é expressar a variável dependente na forma de um produto de funções, sendo que uma delas envolve o parâmetro de similaridade. A forma escolhida é:

$$u(x,y) = U_0(x) \cdot F'(\eta) \quad \eta = \eta[y, h(x)] \quad (3)$$

Se for possível tal transformação, então o perfil de velocidades tem a propriedade de ser proporcional aos perfis em diferentes posições x através de uma transformação de variáveis entre $h(x)$ e y que define η ($h(x)$ fator de proporcionalidade para a coordenada y), e a velocidade externa, $U_0(x)$, (fator de proporcionalidade para a velocidade u). A escolha da função $U_0(x)$ na Eq. (3) é uma tentativa de se estabelecer um valor constante para uma das condições de

contorno de $F'(\eta)$. Ao se expressar $u(x,y)$ na forma da Eq. (3), tem-se como condições de contorno em y :

$$\left(\frac{u}{U_0}\right)_{y=0} = [F'(\eta)]_{y=0} = 0 \quad - \text{condição de não deslizamento na parede}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{u}{U_0}\right) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta) = 1 \quad - \text{a velocidade dentro da C.L. tende assintoticamente ao escoamento externo quando } y \rightarrow \infty.$$

Além disto, o fato de se buscar uma solução onde os perfis de velocidade são similares, isto é, $u/U_0 = F'(\eta)$, automaticamente satisfaz a condição de contorno de entrada, $u(x_0,y) = g(y)$. Finalmente, a condição de contorno em v é um pouco mais elaborada de se obter, entretanto pode-se antecipar que $v(x,0) = 0$ é satisfeito impondo-se $F(0) = 0$, veja Eq. (4).

O próximo passo é substituir Eq.(3) nas Eqs. (1) e (2). Para começar este processo é necessário eliminar v da equação do momento. Utilizando-se a condição de não deslizamento e a Eq. (1) tem-se que para um valor de x constante:

$$v = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u \bullet dy + v_w(x) \quad (4)$$

Substituindo-se na Eq. (4) em (2), o problema se reduz a uma única equação integral-diferencial em u ,

$$u \bullet \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy + v_w(x) \right) = U_0 \frac{dU_0}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5)$$

Os termos da Eq. (5) são calculados a partir da Eq (3)

$$u = U_0(x) \bullet F'(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_0'(x) \bullet F'(\eta) + U_0(x) \bullet F''(\eta) \bullet \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_0(x) \bullet F''(\eta) \bullet \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_0(x) \bullet \left[F'''(\eta) \bullet \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + F''(\eta) \bullet \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u \bullet dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\eta \frac{U_0 F'}{(\partial \eta / \partial y)} \bullet d\eta = \frac{U_0 F'(\partial \eta / \partial x)}{(\partial \eta / \partial y)} + \frac{U_0' F}{(\partial \eta / \partial y)} - \frac{U_0 F(\partial^2 \eta / \partial x \partial y)}{(\partial \eta / \partial y)^2}$$

Substituindo-se as expressões correspondentes para cada termo da equação do momento e isolando-se o termo de maior ordem obtêm-se:

$$F''' + F'' \left[\frac{\partial^2 \eta / \partial y^2}{(\partial \eta / \partial y)^2} + \frac{v_w}{v(\partial \eta / \partial y)} \right] = FF'' \frac{U_0 (\partial^2 \eta / \partial y \partial x)}{v(\partial \eta / \partial y)^3} + (F'^2 - FF'' - 1) \frac{dU_0 / dx}{v(\partial \eta / \partial y)^2} \quad (6)$$

Equação (6) é equivalente as Eqs. (1) e (2) entretanto até este estágio aparentemente ela se apresenta em uma forma mais complexa que o sistema de equações original. Agrupando-se os termos que dependem exclusivamente de (x, y) na forma:

$$\frac{\partial^2 \eta / \partial y^2}{(\partial \eta / \partial y)^2} = g_1(x, y) \quad \frac{U_0 (\partial^2 \eta / \partial y \partial x)}{v(\partial \eta / \partial y)^3} = g_2(x, y) \quad \frac{dU_0 / dx}{v(\partial \eta / \partial y)^2} = g_3(x, y)$$

equação (6) fica:

$$F''' + F'' \bullet g_1(x, y) = FF'' \bullet g_2(x, y) + (F'^2 - FF'' - 1) \bullet g_3(x, y) \quad (7)$$

O sucesso da transformação dada pela Eq. (3) em obter similaridade consiste em tornar a Eq. (7) somente função de η ; para tanto é necessário que as funções $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$, $g_3(x, y)$, sejam **constantes** ou funções de η apenas. A busca das possíveis funções $U_0(x)$ e $\eta(y, h(x))$ que satisfazem a condição de similaridade requer uso de análise funcional. Algumas técnicas para se fazer esta busca são: método do parâmetro livre, método de separação de variáveis e método de teoria de grupos. Estes métodos se aplicam a um grande escopo de equações diferenciais aplicadas a diversos campos da física; em particular, aplicações destes métodos na área de mecânica dos fluidos e transferência de calor estão apresentados em Hansen (1964).

A apresentação destes métodos está fora do escopo do curso, mas pode-se mostrar que uma das formas funcionais que η pode assumir é

$$\eta = y \bullet h(x) \quad (8)$$

onde $h(x)$ é uma função arbitrária a ser determinada para cada caso específico.

Nas secções seguintes serão estudados alguns casos clássicos de soluções por similaridade. Pode-se antecipar que, devido a forma das funções $g(x, y)$ envolver a distribuição da velocidade externa, $U_0(x)$, e sua derivada, o sucesso de obtenção de uma transformação por similaridade fica restrito a alguns tipos de distribuições $U_0(x)$.

A Transformação de Blasius

Escoamento em uma Placa Plana Semi-Infinita

Este problema é também conhecido como o problema fundamental por que, historicamente, ele foi o primeiro problema a ser resolvido com a aplicações da teoria da

camada limite desenvolvida por Prandtl. Este tema foi abordado por Blasius, aluno de Prandtl, em sua tese de doutorado em Goettingen em 1908. Considere o bordo de ataque da placa plana em $x = 0$, a placa sendo paralela ao eixo x , e infinitamente longa a jusante do bordo de ataque. O escoamento externo é uniforme com velocidade U_0 , que é também paralela ao eixo x , veja Fig.1

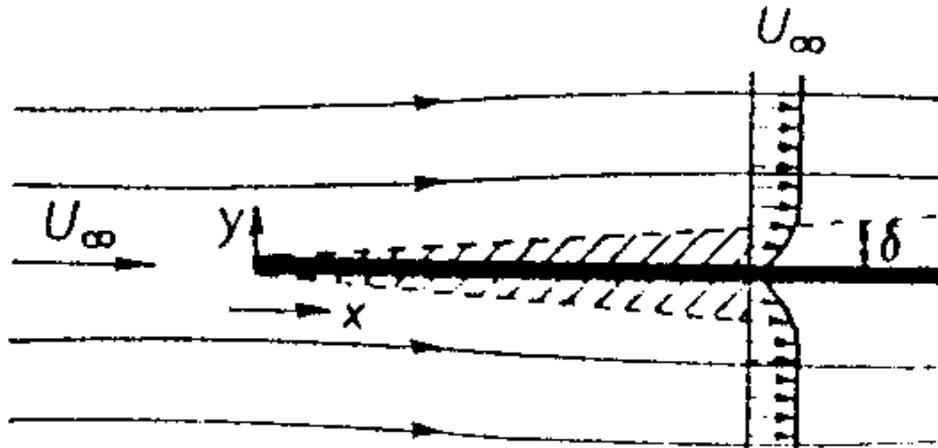


Fig. 1 - Escoamento de Blasius: placa plana em um escoamento uniforme.

Para uma placa plana semi-infinita paralela à corrente livre, U_0 é constante e $dU_0/dx = 0$. Conseqüentemente a função $g_3 = 0$. Além disto, $\eta = y \cdot h(x)$, então a função g_1 também é nula. A única função não nula é g_2 . Ela pode ser satisfeita fazendo $g_2 = -1$. Encontra-se então $h(x)$,

$$\frac{U_0 (\partial^2 \eta / \partial x \partial y)}{v (\partial \eta / \partial y)^3} = \frac{U_0 h'}{v h^3} = -1 \quad \therefore \quad h(x) = \sqrt{\frac{U_0}{2 \nu x}}$$

A equação (7) fica então:

$$F''' + FF'' = 0 \quad (9)$$

sujeito as condições de contorno:

$$F(0) = 0; \quad F'(0) = 0 \quad \text{e} \quad F'(\infty) = 1 \quad (10)$$

onde as relações entre a função F e suas derivadas com o campo de velocidades e a função corrente estão explicitadas na Tabela 1. As relações para η , v e ψ mostram uma dependência direta com o número de Reynolds local. Tendo em mente que para fenômenos de camada limite é necessário que $Re_x \gg 1$, dois destaques merecem ser feitos a este respeito: um em relação a variável η e outro em relação a variável v . Para η , o fator $\sqrt{(1/2)Re_x}$ que vem multiplicando y faz com que o produto $y\sqrt{(1/2)Re_x}$ seja da mesma ordem de grandeza de x ; para

a velocidade v , nota-se que a transformação de Blasius indica que a velocidade v é $\sqrt{(2)\text{Re}_x}$ vezes menor que U_0 , resultado esperado da análise da ordem de magnitude dos termos da equação da conservação da massa.

$$\begin{aligned} \text{Re}_x &= \frac{U_0 x}{v} \\ \eta &= y \sqrt{\frac{U_0}{2vx}} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{1}{2}\text{Re}_x} \\ \frac{u(x,y)}{U_0} &= F'(\eta) \\ \frac{v(x,y)}{U_0} &= \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}_x}} (\eta F' - F) \\ \psi(x,y) &= v \sqrt{2\text{Re}_x} F(\eta) \end{aligned}$$

Tabela 1 - Relações entre a função F e suas derivadas com o campo de velocidades e função corrente para a transformação de similaridade de Blasius.

Apesar de simples, a Eq. (9) não apresenta uma solução analítica. Um método bastante eficaz de resolve-la é por integração numérica através de uma rotina Runge-Kutta de 4ª ordem. (veja apêndice). Fazendo $Y(1) = F''$, $Y(2) = F'$ e $Y(3) = F$, Eq. (9) pode ser re-escrita como um sistema de equações ordinárias:

$$\begin{aligned} F(1) &= -Y(1)*Y(3) \\ F(2) &= Y(1) \\ F(3) &= Y(2) \end{aligned}$$

A rotina Runge-Kutta é um processo de marcha que resolve este problema de contorno integrando a equação a partir de uma extremidade do domínio, onde as condições de contorno são todas conhecidas, até a outra extremidade. Isto causa uma dificuldade na solução do problema de Blasius por que não se tem o valor de $F''(0) = ?$ e sim de $F'(\infty) = 1$ para se dar início a rotina de integração. Esta dificuldade é superada assumindo-se um valor para $F''(0)$ e ao final do processo verificando-se se este valor adotado produz $F'(\infty) = 1$, se isto não for verdade, deve-se adotar um outro valor para $F''(0)$ até que a condição de contorno em $F'(\infty)$ seja satisfeita. Este método de procura é demoninado de método de chute, "shooting method". Existem várias rotinas para acelerar a busca do valor convergido, entre elas: Newton-Raphson, Método das Secantes, Regula-Falsi etc. Detalhes sobre estes procedimentos estão contidos no apêndice onde o método de Runge-Kutta é descrito.

A solução numérica da Eq. (9) é apresentada na Fig. 2. Os valores iniciais para o início do processo de integração são: $\eta = 0$; $F(0) = 0$; $F'(0) = 0$ e $F''(0) = 0.46960$. Destaca-se que $F \approx \psi$, $F' \approx u$ e $F'' \approx \tau$ onde τ é a tensão de cisalhamento.

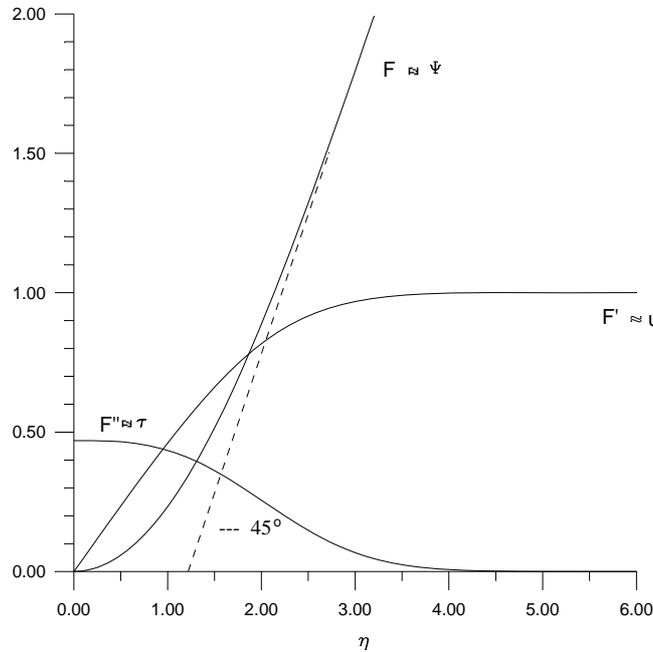


Fig. 2 - Solução numérica do problema de Blasius, $\eta = y/x\sqrt{Re_x}$ e $\psi = v\sqrt{2Re_x}F(\eta)$

O coeficiente de atrito local pode ser calculado através de:

$$C_f(x) = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = \frac{\mu \frac{\partial u}{\partial y}_{y=0}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = \frac{\mu U_0 F''(0) \sqrt{\frac{Re_x}{2}}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

e o coeficiente de arrasto para uma placa de comprimento L :

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}}$$

deve-se observar que a dependência do coeficiente de atrito com o inverso da raiz quadrada do número de Reynolds já era esperada de acordo com a análise da ordem de magnitude dos termos.

A seguir serão feitos alguns comentários a cerca desta solução:

1) A espessura da camada limite é, por definição, a região onde os termos viscosos são da mesma ordem de magnitude dos termos convectivos. A espessura δ é a distância vertical da parede a fronteira da camada limite com o escoamento externo onde influência da viscosidade cessa de agir. δ pode então ser definido como a distância onde a velocidade u atinge o valor da velocidade externa isto por que o escoamento externo é ausente de efeitos viscosos. Devido ao caracter assintótico da solução é difícil precisar o valor de η que define esta região por que $F' \rightarrow 1$ somente quando $\eta \rightarrow \infty$, veja Fig. 3.

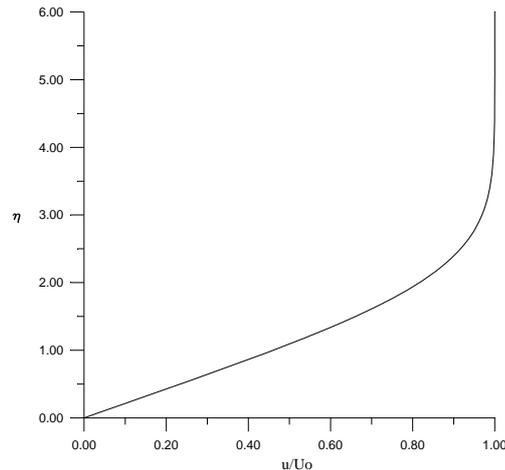


Fig. 3 - Perfil de velocidade de Blasius

Diversos autores resolveram este problema arbitrando um valor de η tal que a velocidade u seja 99% da velocidade da corrente livre U_0 . Assim,

$$\frac{u}{U_0} = 0.99 = F'(\eta) \Rightarrow \eta = 3.5$$

$$\eta = \frac{\delta}{x / \sqrt{\frac{1}{2} \text{Re}_x}} = 3.5 \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{3.5}{\sqrt{\frac{1}{2} \text{Re}_x}}$$

É importante notar que δ varia com o inverso da raiz quadrada do número de Reynolds local. Este resultado, que é uma marca registrada do comportamento da camada limite laminar, já foi previsto anteriormente na análise da ordem de magnitude dos termos da equação do momento. Para um exemplo numérico, considere dois fluidos, um água ($\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$) e outro ar ($\nu = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$) escoando sobre uma placa plana a uma velocidade $U_0 = 1 \text{ m/s}$. A espessura da camada limite para estes dois fluidos a uma distância $x = 1 \text{ m}$ do bordo de ataque será:

Fluido	Re_x	$\delta_{99\%}$ (mm)
Água	10^6	5
Ar	6.7×10^4	19

2) A variável de similaridade η é diretamente proporcional a espessura da camada limite,

$$\eta = \frac{y}{x / \sqrt{\frac{1}{2} Re_x}} \Rightarrow \eta \approx \frac{y}{\delta(x)}$$

δ é o fator de escala para a coordenada y . Ele introduz uma ampliação na escala y tornando os termos viscosos da mesma ordem de grandeza dos termos inerciais dentro da região da camada limite. Deve-se destacar neste ponto que as equações da camada limite são aproximações de primeira ordem de um problema de perturbação singular, sendo δ o fator de amplificação.

3) O perfil da velocidade transversal v é mostrado na Fig. 4. Nota-se que ele tende a um valor assintótico, $V^* \approx 1.2$, onde $V^* = (v/U_0)2\sqrt{Re_x}$ na fronteira da camada limite, veja Fig. 4. Este valor limite de v mostra indica que o escoamento, sendo desacelerado pela ação da viscosidade, é deslocado lateralmente devido ao espessamento da camada limite. Em decorrência, a função corrente ψ aproxima-se, assintoticamente, de uma reta, veja Fig. 2. Deve-se destacar também, sob o ponto de vista matemático, que a velocidade v satisfaz apenas uma condição de contorno, especificamente a de não deslizamento em $y = 0$. Por que a equação do momento em y foi descartada na formulação das equações da camada limite por ser de ordem de magnitude inferior a eq. do momento em x . Consequentemente, em $y \rightarrow \infty$ não se pode impor restrição ao valor de v . Entretanto, a solução de Blasius aproxima-se deste valor, sempre satisfazendo a equação da continuidade.

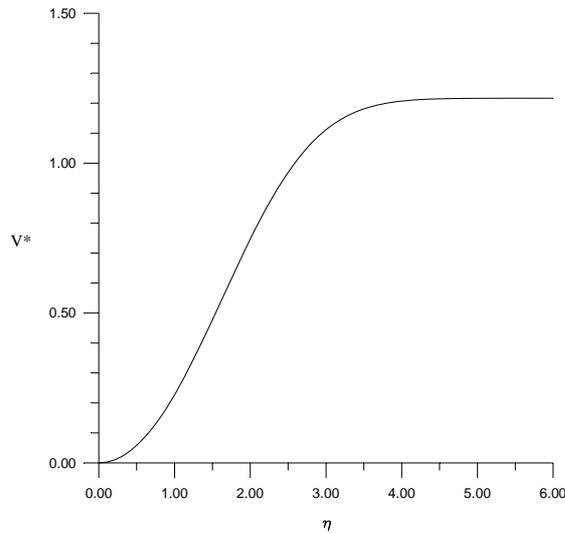


Fig. 4 - Perfil de velocidades transversal, $V^* = \sqrt{2\text{Re}_x}(v/U_0)$ e $\eta = y/x\sqrt{\text{Re}_x}$

4) Retornando por um momento para as Eq. (1) e (2), nota-se que a condição de contorno: $u(x_0, y) = g(y)$ não foi utilizada por que encontrou-se uma solução por similaridade. O fato dos perfis de velocidade serem similares, veja Fig. 3, reduz o número de condições de contorno de quatro para três e faz com que esta condição de contorno seja automaticamente satisfeita.

5) Note que próximo ao bordo de ataque da placa plana, isto é, $x \rightarrow 0$, a razão $(\delta/x) \gg 1$. Claramente isto viola as premissas para existência das equações da camada limite. Nesta região o termo $\partial^2 u / \partial x^2$ é da mesma ordem de grandeza do termo $\partial^2 u / \partial y^2$; similarmente, a equação do momento na direção y não pode ser desprezada, isto significa que a aproximação das equações da camada limite não são válidas.

6) Outra maneira de se avaliar a espessura da camada limite, δ , é através da distribuição de vorticidade do fluido dentro da camada limite. O crescimento de δ está diretamente ligado a forma através da qual a vorticidade é gerada e transportada dentro da camada limite. A vorticidade média do fluido dentro da camada limite pode ser avaliada através do teorema de Stokes,

$$\iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \int_L \vec{V} \cdot d\vec{L} = \Gamma = \bar{\omega} A$$

onde A é a área definida pelo circuito L , Γ é a circulação e ω é a vorticidade. Tomando-se um circuito L tal que suas faces tenham comprimento l e que uma das faces horizontais é coincidente com a parede sólida e a outra está no escoamento externo, conforme mostra a Fig. 5,

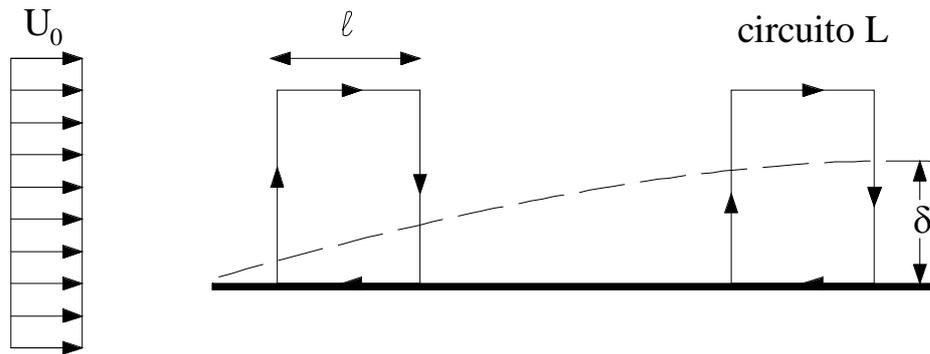


Fig. 5 - Circuito L onde é avaliada a circulação Γ

constata-se que a circulação avaliada para qualquer posição $x > 0$ é sempre uma constante e igual a: $\Gamma = U_0 \ell$. Isto significa então que a vorticidade média por unidade de área do escoamento é constante e, sendo a vorticidade do escoamento a montante da placa zero, conclui-se que:

- a) Toda vorticidade é introduzida no escoamento pelo bordo de ataque da placa plana
- b) Esta vorticidade, concentrada no bordo de ataque, começa a se difundir proporcionalmente a v a medida que é transportada na direção x .
- c) A espessura da camada limite pode ser vista como uma medida da distância que a vorticidade consegue difundir-se da placa, a escala característica de crescimento por difusão é

$$\delta \approx \sqrt{\nu t}$$

mas a medida que um lapso de tempo t ocorre, a vorticidade é transportada por convecção na direção x numa distância L a velocidade U_0 , então

$$t \approx \frac{L}{U_0}$$

substituindo-se a escala em tempo na δ , encontra-se que a ordem de magnitude da razão $\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$

como era de se esperar da análise das ordens de grandeza dos termos. Fisicamente, este processo está esquematizado na Fig. 6.

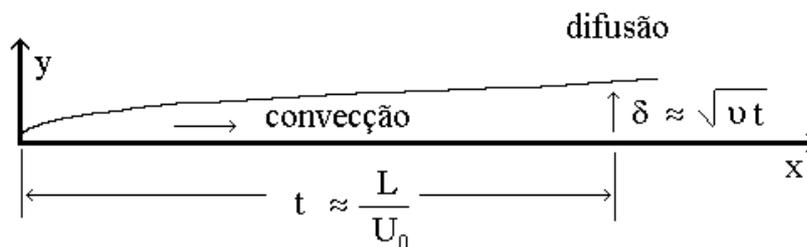


Fig. 6 - Mecanismos de difusão e convecção que controlam o crescimento da camada limite

Toda vorticidade do escoamento é introduzida no bordo de ataque. Através da difusão ela se propaga na direção transversal ao escoamento e pela convecção ela é transportada na direção x . A placa plana não introduz vorticidade no escoamento a exceção do bordo de ataque. Pelo fato do escoamento ser bi-dimensional, pode-se fazer uma analogia direta entre transporte de vorticidade e energia:

$$u \bullet \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \bullet \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

$$u \bullet \frac{\partial T}{\partial x} + v \bullet \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

O problema térmico equivalente seria uma fonte de calor colocada no bordo de ataque de uma placa plana isolada térmicamente. O calor dissipado por esta fonte é difundido na direção y e transportado por convecção na direção x. Pelo fato da placa estar isolada térmicamente, o campo de temperaturas é análogo ao campo de vorticidade.

7) Se a vorticidade é introduzida no bordo de ataque, qual é o mecanismo responsável pela produção da vorticidade? No bordo de ataque, por mais delgado que seja, sempre haverá um gradiente de pressão na direção x por que em $x = 0$, o fluido possui velocidade zero na parede. A produção de vorticidade e o gradiente de pressão no bordo de ataque estão relacionados por:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{y=0}$$

a quantidade de vorticidade que o bordo de ataque adiciona ao fluido é:

$$\omega = -\frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial p}{\partial x_{y=0}} \right) dy = \frac{\Gamma}{A}$$

Para regiões afastadas do bordo de ataque, $(\delta/x) \gg 1$, as equações da camada limite são válidas e o termo de produção de vorticidade é nulo

$$\frac{\partial \omega}{\partial y_{y=0}} = \mu x F'''(0) \sqrt{\frac{\text{Re}_x}{2}} = 0; \quad F'''(0) \equiv 0$$

Soluções de Falkner-Skan

Escoamentos em Cunhas

Provavelmente a solução por similaridade mais famosa das equações da camada limite, Eq. (1) e (2), foi descoberta por V.M. Falker e S.W. Skan em 1931. A importância desta transformação de similaridade consiste em revelar efeitos causados por um gradiente de pressão externo no escoamento dentro da camada limite. Apesar do escopo de aplicações destas soluções ser limitado a escoamentos em objetos em forma de cunhas, ela expõe características

fundamentais do comportamento da camada limite aplicáveis em situações onde existe um gradiente de pressão externo ao escoamento da camada limite.

Esta solução procura quais distribuições de velocidade externa, $U_0(x)$ que satisfaz a Eq. (7). Substituindo-se a variável de similaridade η , definida na Eq. (8), na Eq. (7), encontra-se que: $g_1(x,y) = 0$,

$$g_2 = \frac{U_0 h'(x)}{v h^3(x)} \quad \text{e} \quad g_3 = \frac{U_0'}{v h^2(x)}$$

As funções $g_2(x,y)$ e $g_3(x,y)$ serão independentes de x somente se $g_2 = \alpha$ e $g_3 = \beta$ onde α e β são constantes. Observando-se que:

$$\frac{d(U_0 h^{-2})}{dx} = (\beta - 2\alpha)v$$

vem que

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{h^2} &= K = \text{const.} & \text{se} & \quad \beta = 2\alpha \\ \frac{U_0'}{h^2} &= (\beta - 2\alpha)v & \text{se} & \quad \beta \neq 2\alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Para se determinar as funções $h(x)$ e $U_0(x)$ resta definir ainda uma equação. Ela pode ser obtida isolando-se o valor de U_0 na constante α e substituindo-se por β o valor de sua derivada, como mostra a sequência abaixo:

$$U_0 = \frac{\alpha v h^3}{h'} = \frac{\alpha}{\beta} (\beta v h^2) \frac{h}{h'}$$

então:

$$\frac{U_0'}{U_0} = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \frac{h'}{h}$$

que integrando-se em x obtêm-se:

$$U_0 = C_1 h^{\frac{\beta}{\alpha}}; \quad C_1 = \text{const.} \quad (12)$$

A solução simultânea das Eqs. (11) e (12) definem as funções $h(x)$ e $U_0(x)$ que permitem uma transformação de similaridade.

Analisando-se o caso em que $\beta = 2\alpha$, constata-se que ao substituir o valor de U_0 encontrado na expressão acima na constante α , encontra-se:

$$\alpha = \frac{K h^2 h'}{v h^3} \quad \therefore \quad h(x) = e^{\frac{\alpha v x}{K}} \quad \text{e} \quad U_0(x) = K e^{\frac{2\alpha v x}{K}}$$

neste caso encontra-se uma transformação similar que requer uma variação exponencial da velocidade externa. Como fisicamente é muito pouco provável encontrar-se situações onde a velocidade externa varia exponencialmente, a análise para $\beta = 2\alpha$ será interrompida aqui. Partiremos agora para analisar o caso em que $\beta \neq 2\alpha$. Substituindo-se Eq.(12) em (11) e encontra-se

$$h(x) = \left(\frac{(\beta - 2\alpha)v}{C_1} \right)^{\frac{\alpha}{\beta - 2\alpha}} x^{\frac{\alpha}{\beta - 2\alpha}} \quad e \quad U_0(x) = C_1 \left(\frac{(\beta - 2\alpha)v}{C_1} \right)^{\frac{\alpha}{\beta - 2\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)} x^{\frac{\alpha}{\beta - 2\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)}$$

A fim de simplificar as expressões para $h(x)$ e $U_0(x)$, define-se três novas constantes: C , K e m tais que

$$C = \left[\frac{(\beta - 2\alpha)v}{C_1} \right]^{\frac{\alpha}{\beta - 2\alpha}} ; \quad K = C_1 \left[\frac{(\beta - 2\alpha)v}{C_1} \right]^{\frac{\beta}{\beta - 2\alpha}} \quad e \quad m = \frac{\beta}{\beta - 2\alpha}$$

então uma transformação de similaridade existe se:

$$h(x) = Cx^{\frac{m-1}{2}} \quad e \quad U_0(x) = Kx^m$$

Distribuições de velocidades proporcionais a uma potência de x representam, fisicamente, escoamentos potenciais cujas fronteiras é a intersecção de dois planos. Eles são gerados do potencial complexo, $f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) = Az^{m+1}$ (veja White, F.M. - Fluid Mechanics) que representa o escoamento formado pela intersecção de dois planos que formam um ângulo $\theta = 2\pi/(m+1)$ se $m \geq 0$ ou $\theta = -\pi m/(m+1)$ se $m \leq 0$. A Fig. 7 ilustra alguns escoamentos potenciais formados através desta função potencial. Eles caracterizam-se pela forma de cunha que a intersecção dos dois planos geram, e foi este formato que originou o nome em inglês "wedge flows" que se tornou sinônimo para a transformação de Falkner-Skan.

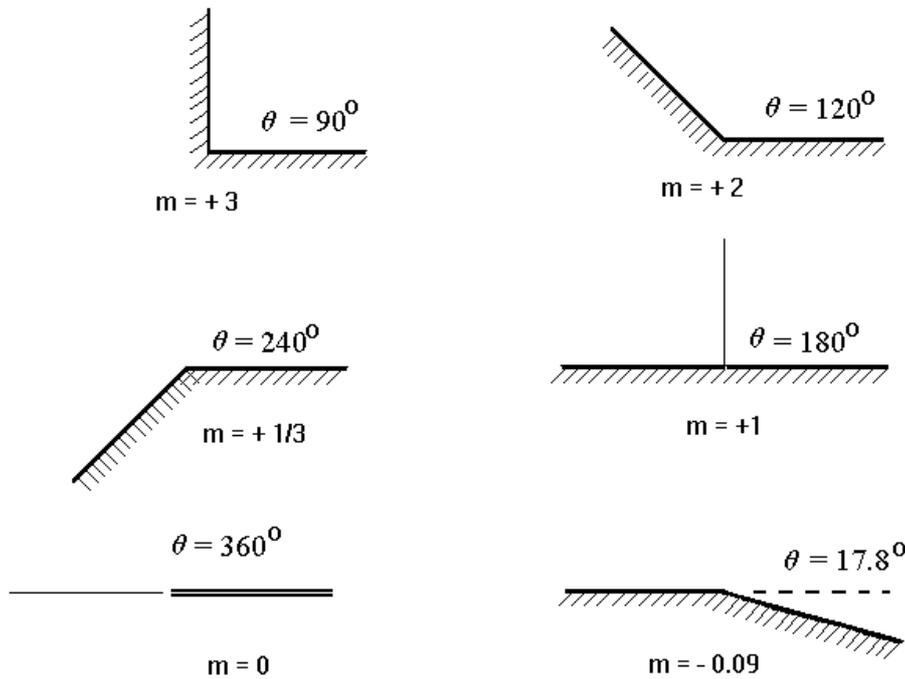


Fig. 7 - Alguns exemplos do escoamento potencial gerado por $f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) = Az^{m+1}$ onde $U_0 \propto x^m$.

Há um grau de arbitrariedade na escolha do valor da constante C, entretanto, pode-se escolher o valor de C tal que quando $m = 0$, a equação resultante degenera para a equação de Blasius, Eq. (9). Isto é obtido fazendo-se $g_3(x,y) - g_2(x,y)$ igual a unidade. A constante C que faz com que isto ocorra é então:

$$C = \sqrt{\frac{K(m+1)}{2\nu}}$$

consequentemente η ,

$$\eta = \sqrt{\frac{K(m+1)}{2\nu}} \cdot y \cdot x^{\frac{m-1}{2}} = y \cdot \sqrt{\frac{(m+1) U_0(x)}{2\nu x}}$$

ou

$$\eta = \sqrt{(m+1)} \left[\frac{y}{x} \sqrt{\frac{1}{2} \text{Re}_x} \right]$$

Substituindo-se o valor de C nas funções $g_2(x,y)$ e $g_3(x,y)$ e o seu resultado na Eq. (7), encontra-se a forma mais conhecida da equação de Falkner-Skan para escoamentos similares:

$$F''' + FF'' + \beta(1 - F^2) = 0 \quad \text{onde } \beta = 2m/(m+1) \quad (11)$$

As condições de contorno são as mesmas usadas no problema de Blasius,

$$F(0) = 0; \quad F'(0) = 0 \quad \text{e} \quad F'(\infty) = 1 \quad (12)$$

As relações entre a função F e suas derivadas com o campo de velocidades e função corrente estão explícitas na Tab. 2. Quer se destacar a semelhança entre as relações de Falkner-Skan e as obtidas pela transformação de Blasius, Tabela 1. Na verdade, isto era de se esperar por que quando $m = 0$ a equação e as variáveis de similaridade de Falkner-Skan degeneram-se para a solução de Blasius. Nota-se uma vez mais a dependência das relações com o número de Reynolds local.

$$\begin{aligned}
 U_0(x) &= Kx^m \\
 Re_x &= \frac{U_0(x)x}{\nu} = \frac{Kx^{m+1}}{\nu} \\
 \eta &= y\sqrt{(m+1)\frac{U_0(x)}{2\nu x}} = \sqrt{(m+1)}\left[\frac{y}{x}\sqrt{\frac{1}{2}Re_x}\right] \\
 \frac{u(x,y)}{U_0} &= F'(\eta) \\
 \frac{v(x,y)}{U_0} &= -\frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{2Re_x}}\left(F + \frac{m-1}{m+1}\eta F'\right) \\
 \psi(x,y) &= \nu\sqrt{\frac{2Re_x}{m+1}}F(\eta)
 \end{aligned}$$

Tabela 2 - Relações entre F e suas derivadas com o campo de velocidade e função corrente para a transformação de similaridade de Falkner-Skan.

A solução da Eq. (11) é obtida através de um processo de integração numérica implementado em um algoritmo Runge-Kutta de 4ª ordem. De modo similar ao problema de Blasius, define-se as variáveis: $Y(1) = F''$, $Y(2) = F'$ e $Y(3) = F$ tal que Eq. (11) pode ser reescrita como um sistema de equações ordinárias:

$$\begin{aligned}
 F(1) &= -Y(1)*Y(3) - BETA*(1. - Y(2)*Y(2)) \\
 F(2) &= Y(1) \\
 F(3) &= Y(2)
 \end{aligned}$$

Referindo-se a Fig. (7) pode-se associar os seguintes tipos de escoamentos passíveis de solução através da transformação de similaridade de Falkner-Skan:

β	m	Tipo de Escoamento
0	0	Placa Plana (Solução de Blasius)
1	1	Ponto de Estagnação 2-D (Hiemenz 1911)
1/2	1/3	Ponto de Estagnação 3-D (Transf. de Mangler)
$0 \leq \beta \leq 1$	$0 \leq m \leq 1$	Escoamento em uma cunha de ângulo β π (fluxo acelerado, $dP/dx < 0$)
$-2 \leq \beta \leq 0$	$-1/2 \leq m \leq 0$	Escoamento em uma cunha de ângulo β π (fluxo desacelerado, $dP/dx > 0$)

Tabela 3 - Relação entre o parâmetro β da transformação de Falkner-Skan e o escoamento externo a camada limite, $U_0 = Kx^m$.

A Fig. 8 mostra os perfis de velocidade, u/U_0 em função da variável de similaridade η e do parâmetro m que assume os valores: -0.090403 ($\beta = -0.1984$); -0.02439 ($\beta = -0.05$); 0 ($\beta = 0$); $+0.17647$ ($\beta = 0.3$); $+0.333$ ($\beta = 0.5$) e 1.0 ($\beta = 1$). É importante observar que para valores de $m > 0$ o escoamento é acelerado e o gradiente de pressão $dP/dx < 0$. Para o intervalo $0 \leq m \leq 1$, a medida que m cresce, os perfis, na origem, se tornam cada vez menos inclinados. Por outro lado, para valores de $m < 0$ o escoamento é desacelerado e o gradiente de pressão $dP/dx > 0$. Para o intervalo $-0.090 \leq m \leq 0$, a medida que m diminui, os perfis, na origem, se tornam cada vez mais inclinados. Uma das características principais dos perfis de velocidade quando $dP/dx > 0$ é o aparecimento de um ponto de inflexão. Para o valor de $m = -0.090403$ o ponto de inflexão está localizado na origem, $\eta = 0$. Em particular, este valor do parâmetro m indica um ponto de descolamento. Valores de m menores que -0.090403 conduzem a escoamentos com fluxo reverso o que torna inválida as aproximações da camada limite.

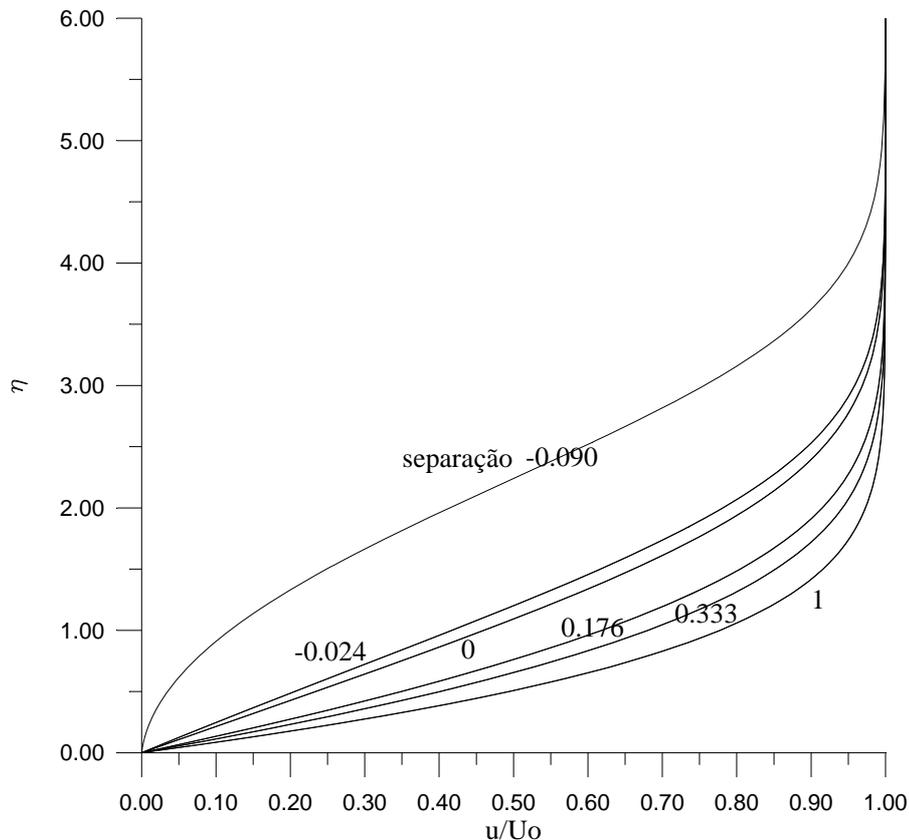


Fig. 8 - Perfis de velocidade de Falkner Skan. As curvas são parametrizadas pelo fator m que indica a variação de velocidade externa a camada limite de acordo com $U_0 = Kx^m$. Note que para $m > 0$ o escoamento é acelerado, para $m < 0$ desacelerado.

A Fig. 9 mostra os valores de F'' (que são diretamente proporcionais a tensão de cisalhamento $\tau = \mu \partial u / \partial y$) em função da variável de similaridade η e do parâmetro m que assume os valores: -0.090403 ($\beta = -0.1984$); -0.02439 ($\beta = -0.05$); 0 ($\beta = 0$); $+0.17647$ ($\beta = 0.3$); $+0.333$ ($\beta = 0.5$) e 1.0 ($\beta = 1$). É importante observar que para o intervalo $0 \leq m \leq 1$, a medida que m cresce os valores que F'' (τ) assume, na origem, se tornam cada vez maiores. Por outro lado, para valores de $m < 0$ o escoamento é desacelerado e o gradiente de pressão $dP/dx > 0$. Para o intervalo $-0.090 \leq m \leq 0$, a medida que m diminui, os valores que F'' (τ) assume, na origem, se tornam cada vez menores. Para o valor de $m = -0.090403$ o ponto de inflexão está localizado na origem, $\eta = 0$. Em particular, este valor do parâmetro m indica um ponto de descolamento. Valores de m menores que -0.090403 conduzem a escoamentos com fluxo reverso o que torna inválidas as aproximações da camada limite. Isto mostra que a camada limite laminar é capaz de suportar apenas pequenas desacelerações sem ocorrência de separação.

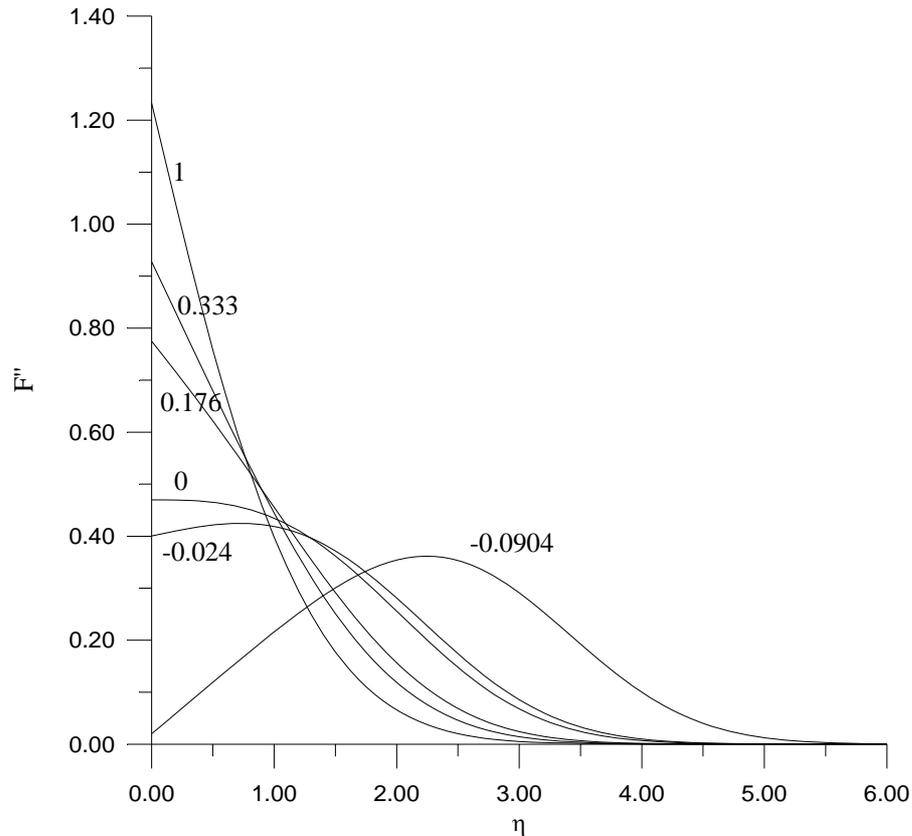


Fig. 9 - Perfis de tensão de cisalhamento de Falkner Skan. As curvas são parametrizadas pelo fator m que indica a variação de velocidade externa a camada limite de acordo com $U_0 = Kx^m$. Note que para $m > 0$ equivale a escoamentos com aceleração e $dP/dx < 0$; por outro lado, para $m < 0$ equivale a escoamentos com desaceleração e $dP/dx > 0$.

É interessante analisar a influência do gradiente de pressão na espessura da camada limite, δ

$$\frac{\delta}{x} = \frac{\eta_\infty}{\sqrt{\frac{(m+1)}{2} Re_x}} \quad (13)$$

onde η_∞ é tal que $u(\eta_\infty)/U_0 = 0.99$. Os valores de η_∞ que satisfazem a condição de 99% da velocidade externa para diferentes valores que o parâmetro m pode assumir estão plotados na Fig. 10. Destaca-se o comportamento decrescente de $\eta_\infty/\sqrt{(m+1)}$ a medida que m cresce indicando uma espessura da camada limite (δ/x) menor sempre que o gradiente de pressão se torna mais negativo. Tomando-se como referência $dP/dx = 0$ ($m=0$ placa plana), nota-se que para $m < 0$ (escoamentos desacelerados & $dP/dx > 0$) a espessura da camada limite sempre aumenta, enquanto que para $m > 0$ (escoamentos acelerados & $dP/dx < 0$), a espessura da camada

limite sempre diminui. Sumarizando, pode-se dizer que para escoamentos retardados onde $dP/dx > 0$ o efeito de difusão de momento aumenta em relação a convecção produzindo camadas limites mais espessas e podendo gerar um descolamento. Por outro lado, para escoamentos acelerados, onde $dP/dx < 0$, o efeito de difusão diminui em relação a convecção de momento produzindo camadas limites menos espessas. Em escoamentos com gradientes de pressão favoráveis, $dP/dx < 0$, não há condições de surgimento de pontos de separação.

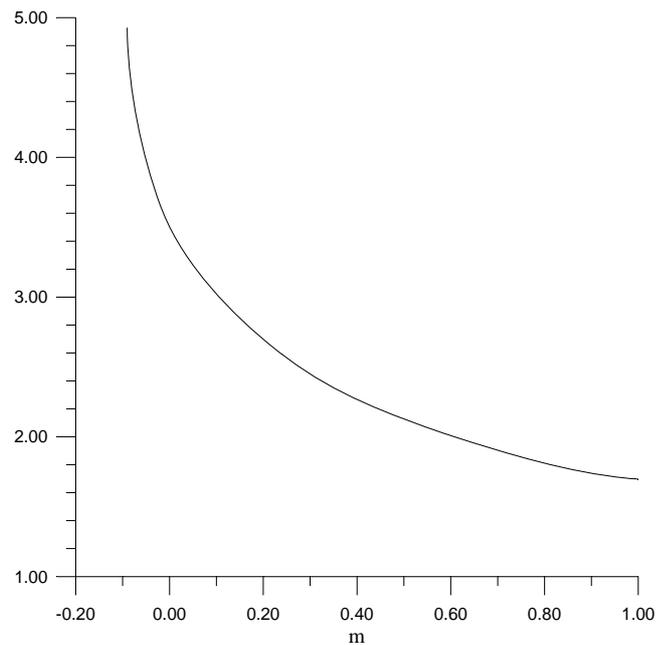


Fig. 10 - Variação da espessura da camada limite (δ/x) em função do parâmetro m , Re_x constante. Abcissa parâmetro m , ordenada $\eta_\infty/\sqrt{(m+1)}$.

Retornando à Eq. (13), o caso onde $m = 1$ merece um destaque especial. Ele representa o escoamento em um ponto de estagnação, conforme representado na Fig. 11. A condição $u(\eta_\infty)/U_0 = 0.99$ ocorre quando $\eta_\infty = 2.4$, e para $U_0 = Kx$, a espessura da camada limite, δ , é constante e igual a:

$$\delta = 2.4 \sqrt{\frac{\nu}{K}}$$

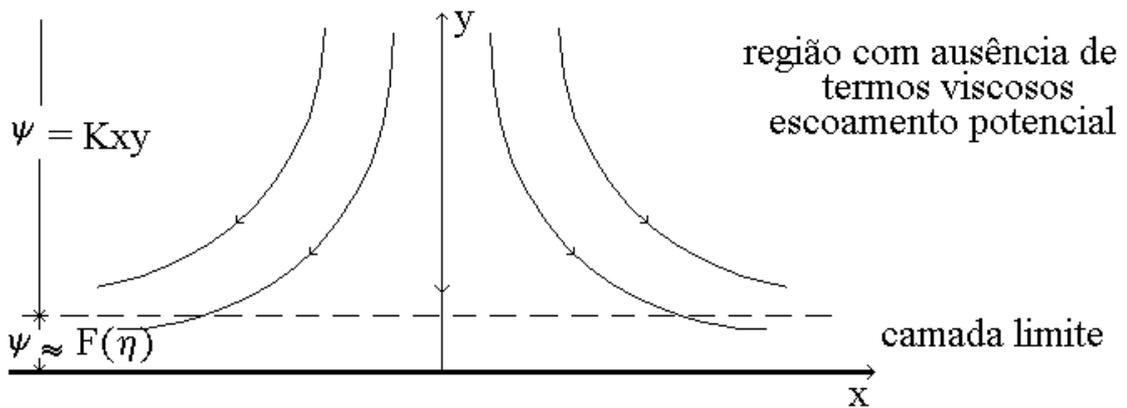


Fig. 11 - Representação esquemática das linhas de corrente para um escoamento próximo a um ponto de estagnação 2-D, também conhecido como escoamento de Hiemenz (1911).

Neste caso quando $m=1$, a exceção dos outros casos (quando $m \neq 1$), o valor da espessura da camada limite não varia com x . Isto mostra que nestas condições há um equilíbrio entre a difusão e convecção de momento. Isto é, a taxa de difusão de momento, que tende a espessar a camada limite, é igual a taxa de convecção, que tende a afinar, e portanto, existe uma região de altura constante δ onde os efeitos da viscosidade ficam confinados. Além disto, esta solução satisfaz a equação de Navier-Stokes apesar de ser derivada a partir das equações da camada limite. Ela é válida a partir da origem, $x = 0$, por que para $m=1$, a variável η não se torna descontínua.

Jato Bi-Dimensional Laminar

A aplicação das equações da camada limite não é restrita a regiões próximas de paredes sólidas. Elas podem também ser aplicadas no interior de fluidos onde existem regiões dominadas por atrito, como o que ocorre quando duas correntes de fluido se encontram, por exemplo formando uma esteira atrás de um corpo ou quando fluido é descarregado através de um orifício. Nesta seção será analisado o caso de um fluido descarregado através de uma abertura bi-dimensional em um meio infinito produzindo um jato bi-dimensional. Este problema foi estudado por Schlichting (1933), as linhas de corrente e perfis de velocidade estão mostrados, esquematicamente, na Fig. 12.

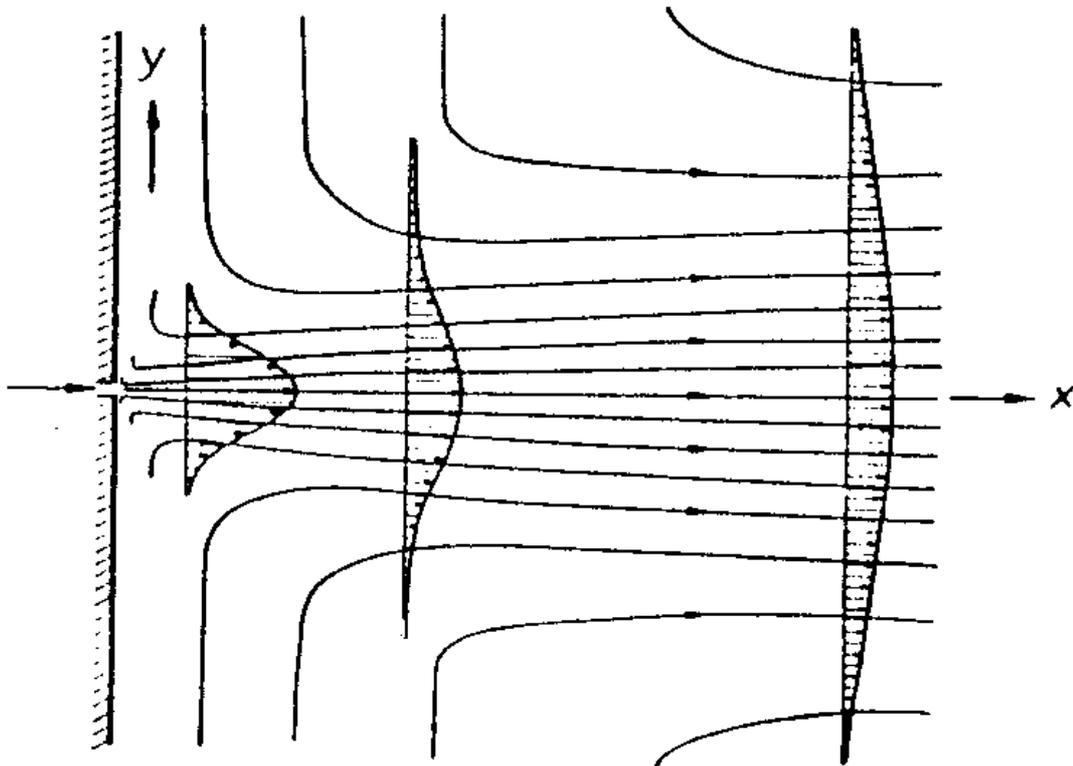


Fig. 12 - Jato bi-dimensional laminar em um meio infinito

Observa-se da Fig. 12 que o jato se espalha na direção y a medida que se afasta do bocal de injeção devido ao atrito viscoso, enquanto que a velocidade da linha de centro decai na mesma direção. O atrito viscoso, responsável pelo fenômeno de espalhamento, causa uma indução de fluido externo ao jato.

Como o fluido está essencialmente a pressão constante e não há a presença de paredes sólidas, é de se esperar que os gradientes de velocidade na direção y sejam de ordem de grandeza superior aos gradientes de velocidade na direção x , podendo-se assim formular o problema em termos das equações da camada limite:

$$u \bullet \frac{\partial u}{\partial x} + v \bullet \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (14)$$

Além disto, o escoamento também deve possuir um fluxo de momento, M , constante através de qualquer seção transversal ao escoamento pelo fato de não haver paredes sólidas nem tão pouco gradiente de pressão, então:

$$M = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = \text{const.} \quad (14a)$$

Ressalta-se que a equação que governa este problema é idêntica a placa plana porém, as condições de contorno são distintas e não há, de forma explícita, uma velocidade característica do escoamento externo, U_0 . Entretanto, esta velocidade de referência pode ser definida como a velocidade máxima que ocorre no centro do jato, U_M . Apesar do valor de U_M não ser conhecido a priori, pode-se definir um perfil de velocidades adimensional como:

$$\frac{u}{U_M} = F'(\eta)$$

onde $\eta = yh(x)$. Substituindo-se os valores de u e η na Eq. (14), encontra-se, de forma similar a Eq. (7),

$$F''' - FF''(\alpha - \beta) - F'^2\beta = 0 \quad (15)$$

onde, para haver solução por similaridade, α e β devem ser constantes definidas por:

$$\alpha = \frac{U_M h'}{\nu h^3} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{U_M'}{\nu h^2} \quad (16)$$

Além disto, pelo fato do fluxo de momento ser constante, a Eq. (14a) deve ser independente de y e η , isto é:

$$M = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_M^2 F'^2(\eta)}{h} d\eta = \text{const.}$$

ou seja o quociente:

$$\frac{U_M^2(x)}{h(x)} = \gamma = \text{const.} \quad (17)$$

deve ser uma constante. Substituindo-se Eq. (17) na Eq. (16), pode-se escrever as constantes α e β em função de γ :

$$\alpha = 2 \frac{\gamma^2 U_M'}{\nu U_M^4} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\gamma^2 U_M'}{\nu U_M^4} \quad (18)$$

Pela Eq. (18) constata-se que $\alpha = 2\beta$. Substituindo-se este resultado na Eq. (15), encontra-se que:

$$F''' - FF'' - F'^2\beta = 0 \quad (19)$$

Como $\beta \neq 2\alpha$, sabe-se da solução de Falkner-Skan, que uma solução de similaridade existe desde que a Eq. (17) seja satisfeita e que:

$$h(x) = Cx^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{e} \quad U_M = Kx^m$$

onde C , K e m são constantes arbitrárias. A restrição imposta pela Eq. (17) implica que o expoente m seja igual a: $m = -1/3$. Então a variável de similaridade η e a velocidade de referência U_M são expressas por:

$$\eta = C \frac{y}{x^{2/3}} \quad \text{e} \quad U_M = K \frac{1}{x^{1/3}} \quad (20)$$

Apesar da Eq. (20) conter as constantes arbitrárias C e K , ela já mostra que o decaimento da velocidade máxima do jato é proporcional ao inverso da distância a potência (1/3). A próxima etapa do problema é a determinação destas constantes e a solução da Eq. (19). Substituindo-se Eq. (20) nas equações (16) e (17), encontra-se:

$$\alpha = -\frac{2}{3} \frac{K}{\nu C^2}; \quad \beta = -\frac{1}{3} \frac{K}{\nu C^2} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{K}{C^2}$$

sem perda de generalidade, pode-se tomar $\beta = -1$, isto é:

$$\frac{1}{3} \frac{K}{\nu C^2} = 1 \quad (21)$$

que substituído na Eq. (19), encontra-se a equação proposta por Schlichting (1933):

$$F''' + FF'' + F'^2 = 0 \quad (22)$$

sujeita às condições de contorno:

$$\eta = 0 \rightarrow F = 0 \text{ e } F'' = 0$$

o que equivale a dizer que a velocidade vertical e a vorticidade (tensão de cisalhamento) na linha de centro do jato são nulas. Além disto,

$$\eta = \infty \rightarrow F' = 0$$

que corresponde que a velocidade na direção x deve aproximar, assintoticamente, da velocidade do meio externo, no caso, nula. Examinando-se a Eq. (22) com as condições de contorno, no caso todas nulas, o problema aparenta ter solução trivial, $F \equiv 0$, pela ausência de um agente externo que causaria o movimento. Entretanto este não é o caso. O agente externo que causa o movimento é o fluxo de momento M dado pelo jato.

A equação (22) é de natureza não linear e, a princípio, poderia-se tentar uma solução numérica. Entretanto, Schlichting mostrou que ela apresenta uma solução analítica. Notando-se que Eq. (22) pode ser escrita na forma de:

$$\frac{d}{d\eta}(F'' + FF') = 0$$

então os termos:

$$F'' + FF' = \text{constante}$$

o valor desta constante pode ser determinado a partir das condições de contorno. Como para $\eta = \infty \rightarrow F' = F'' = 0$, isto é, a velocidade e suas derivadas superiores, vorticidade, são nulas; então a constante deve ser também nula, por que a equação diferencial deve ser satisfeita em todo o domínio. Logo a Eq. (22) pode ser integrada uma vez resultando em:

$$F'' + FF' = 0$$

Multiplicando-se ambos os lados por 2, a equação acima pode ser reescrita na forma:

$$2F'' + \frac{dF^2}{d\eta} = 0$$

integrando-se a equação acima em η , com η variando de 0 a η , encontra-se:

$$2[F'(\eta) - F'(0)] + [F^2(\eta) - F^2(0)] = 0$$

mas, $F(0) = 0$ e $F'(0) = 1$, por que para $\eta = 0$, $u = U_M$. Então, a equação acima fica:

$$2F' + F^2 = 2$$

A equação diferencial ordinária pode ser integrada diretamente, isolando-se F e η . Sua solução é:

$$F = \sqrt{2} \operatorname{Tanh}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \quad (23)$$

logo,

$$\frac{u}{U_M} = F' = \text{Sech}^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \quad (24)$$

Até o momento, tem-se o perfil de velocidades adimensional entretanto, as constantes C e K que definem respectivamente, a variável η e U_M , não foram ainda determinadas. A partir da conservação do fluxo de momento, Eq. (14), tem-se que:

$$M = \rho \frac{K^2}{C} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sech}^4\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) d\eta$$

ou

$$M = \frac{\sqrt{32}}{3} \rho \frac{K^2}{C} \quad (25)$$

Das equações (25) e (21) obtêm-se os valores para C e K em função do fluxo de momento M:

$$C = \left(\frac{M}{(288)^{1/2} \rho v^2} \right)^{1/3} \quad \text{e} \quad K = \left(\frac{3M^2}{32\rho^2 v} \right)^{1/3}$$

As relações entre a função F e suas derivadas com o campo de velocidades estão mostradas na Tabela 4. Deve-se destacar mais uma vez a semelhança das variáveis de similaridade com os casos estudados anteriormente.

$$\begin{aligned}
 U_M &= \left(\frac{3M^2}{32\rho^2\nu x} \right)^{1/3} \\
 Re_x &= \frac{U_M x}{\nu} \\
 \eta &= \left(\frac{M}{\sqrt{288\rho\nu^2}} \right)^{1/3} y \bullet x^{-2/3} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{Re_x}{3}} \\
 \frac{u}{U_M} &= \text{Sech}^2 \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \\
 \frac{v}{U_M} &= \frac{1}{\sqrt{3}Re_x} (2\eta F' - F) \\
 \psi &= \left(\sqrt{\frac{81}{4}} \frac{M\nu}{\rho} \right)^{1/3} x^{1/3} \text{Tanh} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned}$$

Tabela 4 - Relações entre F e suas derivadas com o campo de velocidades para um jato laminar bi-dimensional.

Figura 12 mostra a velocidade adimensional do jato na direção x em função de η , conforme Eq. (24). Pode-se definir a largura do jato como sendo duas vezes a distância onde $u = 0.01U_M$. Pela Eq. (24), $\text{Sech}^2 3 \approx 0.01 = u/U_M$. Logo a largura b do jato,

$$b \approx 21.8 \left(\frac{x^2 \rho \nu}{M} \right)^{1/3}$$

nota-se então que o jato espalha-se proporcionalmente a $x^{2/3}$, enquanto que a sua velocidade do centro decai proporcionalmente a $x^{-1/3}$, conforme Eq. (20).

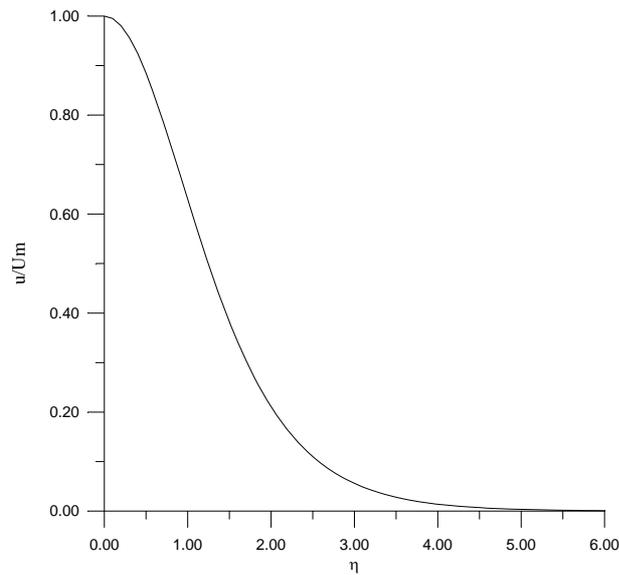


Fig. 12 - Perfil de velocidade adimensional do jato bi-dimensional, Eq. (24)

Outra característica interessante é a vazão mássica através de uma seção transversal do jato. Ela é calculada através da integração do perfil de velocidade u , conforme a equação abaixo:

$$\dot{m} = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot dy = (32M\rho^2\nu x)^{1/3}$$

mostrando que há um aumento de vazão proporcional a $x^{1/3}$ a medida que o jato penetra no fluido. Este aumento de vazão ocorre por que a medida que o jato penetra no fluido ele começa a arrastar fluido devido a ação da viscosidade. O resultado da equação acima é correto para grandes valores de x mas induz a um falso resultado quando $x \rightarrow 0$ porque $m \rightarrow 0$. Esta descontinuidade da validade da equação da camada limite é similar à dificuldade encontrada ao se analisar a camada limite próximo ao bordo de ataque de uma placa plana. A razão disto é que a aproximação da camada limite falha se $Re \approx 1$, e para este caso, um número de Reynolds apropriado é como o que está definido na Tabela 4, que em termos das variáveis do problema fica:

$$Re_x = \left(\frac{3 M^2 x^2}{32 \rho^2 \nu^4} \right)^{1/3}$$

Referências & Leitura Complementar

- Hansen, A.G., "**Similarity Analyses of Boundary Value Problems in Engineering**", Prentice-Hall (1964)
- Meyer, R.E., "**Introduction to Mathematical Fluid Dynamics**", Dover (1971)
- Moore, F.K., "**Theory of Laminar Flows**", Princeton Un. Press, (1964)
- Panton, R.L., "**Incompressible Flow**", John Wiley (1980)
- Schlichting, H., "**Boundary Layer Theory**", McGraw Hill (1955)
- Rosenhead, L., "**Laminar Boundary Layers**", Oxford (1963)
- White, F.M., "**Viscous Fluid Flow**", McGraw Hill (1974)