Vorticidade

Prof. EUGENIO SPANO ROSA
Matric. 06520.0
FEM – UNICAMP

6.0 Formas Especiais das Equações que governam os Fluidos

Algumas formas alternativas de se escrever as equações de N-S serão apresentadas. O uso destas equações é as vezes mais vantajoso do ponto de vista do método numérico empregado para resolver o problema e/ou das condições de contorno do problema. Através destas equações pode-se simular mecanismos físicos que atuam no escoamento que seriam difíceis para se identificar usando as eq. de N-S com variáveis primitivas, pressão e velocidade.

6.1 Equação da Vorticidade

A equação de N-S é escrita em termos das variáveis pressão e velocidades, também conhecidas como variáveis primitivas. As interações que ocorrem no campo do escoamento são expressas em termos de um balanço entre as forças de inércia, de pressão, de campo e viscosas. Este conceito de abordar o campo do escoamento pode ser ampliado introduzindo-se o conceito de vorticidade,

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \tag{1}$$

e da dinâmica dos mecanismos que controlam a difusão, convecção e produção de vorticidade.

A equação de N-S para um fluido incompressível e propriedades constantes,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times\vec{\omega} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} \qquad (2)$$

tomando-se o rotacional de ambos os lados,

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{V} + \nabla\times\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \nabla\times\left(\vec{V}\times\vec{\omega}\right) = -\nabla\times\left(\frac{\vec{\nabla p}}{\rho}\right)$$

$$+ \nabla\times\vec{g} + \nu\nabla^2\left(\nabla\times\vec{V}\right) \qquad (3)$$

notando-se que rot grad $\phi \equiv 0$ e rot(constante) $\equiv 0$, a equação acima fica sendo:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nabla\times\left(\vec{V}\times\vec{\omega}\right) = \nu\nabla^2\vec{\omega} \qquad (4)$$

O segundo termo do lado esquerdo pode ser decomposto em

$$\nabla\times\left(\vec{V}\times\vec{\omega}\right) = \vec{V}\left(\nabla\cdot\vec{\omega}\right) - \vec{\omega}\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) - \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{\omega}$$
$$+ \left(\vec{\omega}\cdot\nabla\right)\vec{V} \qquad (5)$$

mas $\nabla\cdot\vec{\omega} \equiv 0$ (o campo de vorticidade então

$$\nabla \times (\vec{V} \times \vec{\omega}) = (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} \qquad (6)$$

substituindo este resultado na equação da vorticidade eq (4) obtém-se:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \qquad (7)$$

ou

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

[convecção vorticidade] [produção de vorticidade por estiramento "stretching"] [difusão de vorticidade]

Para escoamentos bi-dimensionais o vetor vorticidade é sempre perpendicular ao plano do escoamento, portanto o termo

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} \equiv 0$$

e a equação da vorticidade se reduz a

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)\vec{\omega} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (8)$$

Deve-se ressaltar que tanto para escoamento 3-D ou 2D a equação da vorticidade não possui o termo de pressão, porque $\nabla \times \vec{\nabla} p \equiv 0$. Isto mostra também que o campo de velocidades do escoamento pode ser determinado sem o conhecimento do campo de pressão, uma vez, obviamente, dado o campo de vorticidade que satisfaz a eq. da vorticidade.

A partir do campo de vorticidade o campo de pressões pode ser determinado considere a eq. N.S. tomando-se a divergência de ambos os lados,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\vec{V}) + \nabla.\left[(\vec{V}.\nabla)\vec{V}\right] = -\nabla.\nabla(p/\rho) + \nu\nabla^2(\nabla.\vec{V}) \quad (9)$$

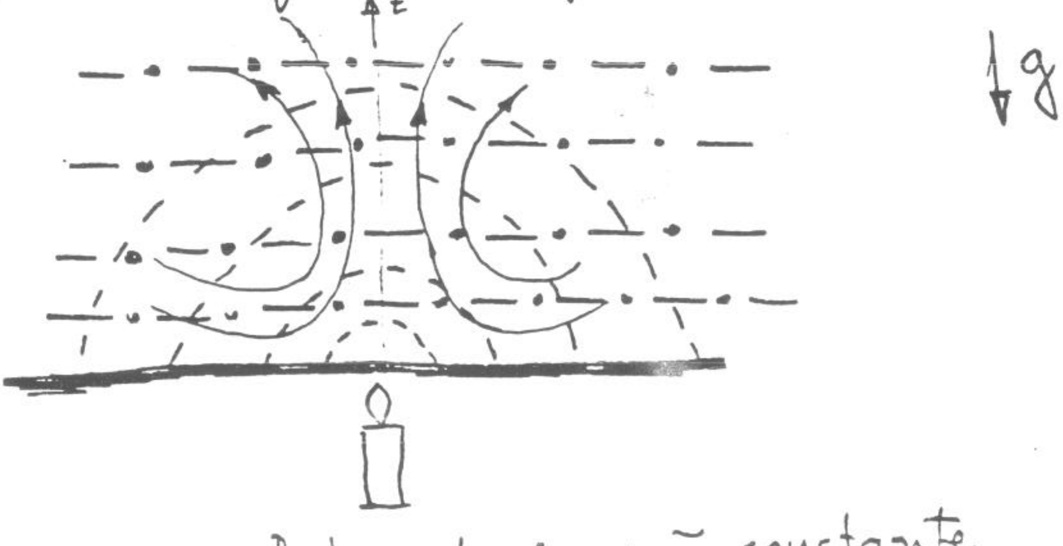
para um escoamento incompressível, $\nabla.\vec{V} = 0$, então

$$\nabla.\left[(\vec{V}.\nabla)\vec{V}\right] = -\nabla^2(p/\rho)$$

densidade e pressão, isto é, as normais as linhas de densidade e pressão constantes forem paralelas. Isto só ocorre quando ρ for uma constante ou ρ for uma função de p somente (escoamento barotrópico)

Como consequência direta em escoamentos não barotrópicos o termo $(\nabla p/\rho)$ introduz uma circulação no circuito C.

Considere por exemplo uma chapa horizontal aquecida por uma chama,



Linhas de pressão constante
linhas de densidade constante
linhas de corrente

As linhas de pressão e densidade constantes, linhas de corrente estão representadas esquematicamente na Figura acima.

mas da eq. de N-S,

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla p}}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \nabla U$$

potencial gravitacional $U = -gz$

então

Torque / massa

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \overbrace{\left[-\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \nabla U \right]}^{\text{acelerações}} \cdot d\vec{r}$$

para um campo de forças externo conservativo, o gravitacional por exemplo,

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = dU$$

a integral de dU para um contorno fechado é nula, isto é, as forças de campo conservativas não alteram a a produção de circulação no circuito C.

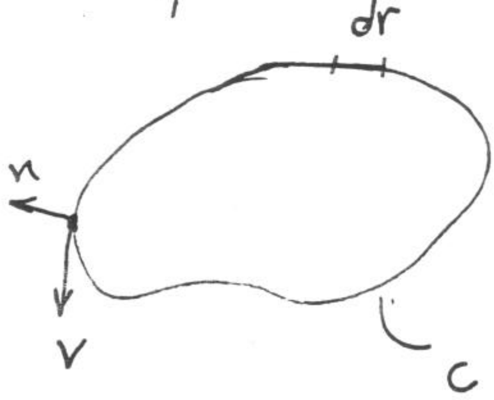
A integral envolvendo o termo pressão/densidade pode ser transformada pelo teorema de Stokes,

$$\oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} = \iint_A \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p\right) \cdot d\vec{A} = \iint_A \left[\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p\right] \cdot dA$$

Isto só será nulo se os gradientes de

A taxa da variação da circulação ao redor de um circuito fechado C que se move com o escoamento, é dada por:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{r}$$



associar

$$= \oint_C \frac{D\vec{V}}{Dt}\cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{V}\cdot\frac{D}{Dt}d\vec{r}$$

note que $\quad \frac{D}{Dt}d\vec{r} = d\left(\frac{D\vec{r}}{Dt}\right) = d\vec{V}$

portanto o segundo membro

$$\oint_C \vec{V}\cdot\frac{D}{Dt}d\vec{r} = \oint_C \vec{V}\cdot d\vec{V} \equiv 0$$

logo

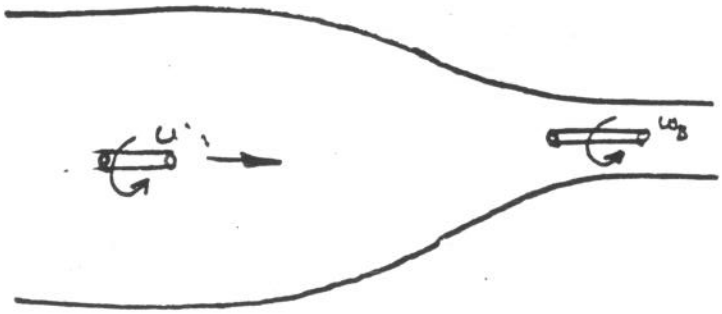
Torque / Vol.

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D\vec{V}}{Dt}\cdot d\vec{r}$$

Torque / Massa

Da relação acima, baseada em argumentos puramente cinemáticos, pode-se dizer que para um tubo de vorticidade,

1) A vorticidade média é diretamente proporcional a área transversal do tubo. Isto implica que um estreitamento da área vai causar um aumento da vorticidade e um alargamento o efeito oposto

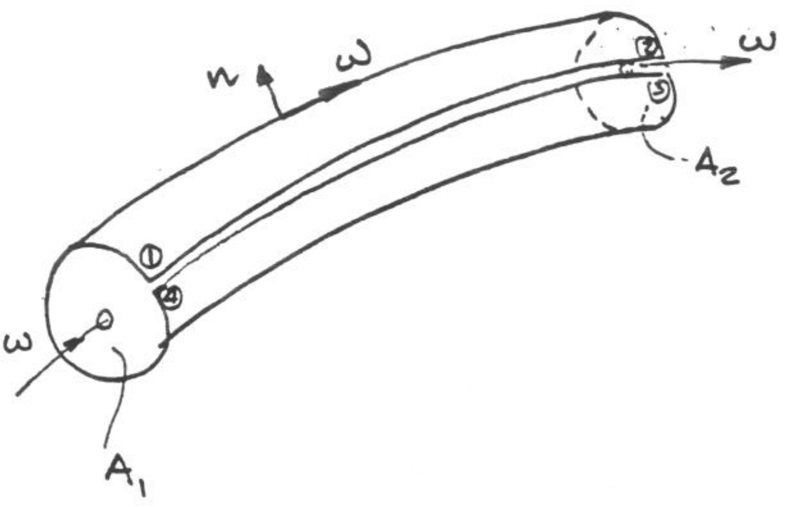


$\overline{\omega}_A > \overline{\omega}_B$

2) Um tubo de vórtices não pode surgir ou extinguir no fluido. Isto implicaria que $A \to 0$; $\overline{\omega} \to \infty$ o que fisicamente é impossível devido a efeitos viscosos que através de mecanismos de difusão e dissipação evitam esta singularidade

Em escoamentos ideais, fluido com ausência de viscosidade, qdo $A \to 0$ o tubo de vórtices se reduz a uma linha

Considere um tubo de vorticidade,



Como o caminho ①-②-③-④ é redutível,

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oiint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\forall} (\nabla \cdot \vec{\omega}) \, d\forall$$

mas como $\nabla \cdot \vec{\omega} \equiv 0$; $\Gamma = 0$ de onde se conclui que

$$\oiint_{A_1} \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \oiint_{A_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{A}$$

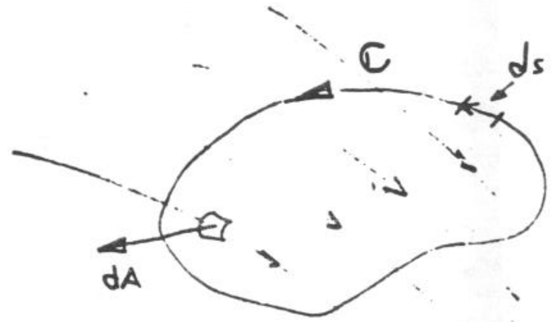
ou

$$\overline{\omega}_1 A_1 = \overline{\omega}_2 A_2$$

6.2 Cinemática da Vorticidade e o Teorema de Kelvin

A circulação em um circuito fechado é definida por:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$$



onde C é uma curva redutível, isto é, pode ser colapsada continuamente até formar um ponto sem cruzar a área delimitada pela curva C.

Pelo teorema de Stokes,

$$\Gamma = \iint_A (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A}$$

isto mostra que a circulação Γ reflete diretamente o valor da vorticidade média do escoamento dentro da curva C.

$$\Gamma = \overline{\omega} \cdot A$$

Note que para o fluido na parede, a equação do momento se reduz a:

$$\nabla \cdot \tau = -\nabla p$$

Como o fluido na parede está restrito de ganhar momento linear, o gradiente de pressão deve exatamente balancear a tensão na parede. Nesta situação particular, as tensões são diretamente proporcionais a vorticidade, eq (15), e portanto a produção de tensão via vorticidade equilibra o gradiente de pressão. Isto decorre do fato que na parede o fluido não pode ter uma velocidade translacional mas pode sim ter uma velocidade rotacional.

De forma análoga a produção de vorticidade via gradiente de pressão ao longo da parede, termos inerciais transientes, especificamente, ($\rho \partial \vec{v}/\partial t$) também podem introduzir vorticidade no fluido. A geração de vorticidade ocorre somente durante a fase de aceleração. Uma vez que a velocidade de regime permanente é atingida, o fluxo de vorticidade se torna zero. Um movimento impulsivo pode ser visto como sendo uma quantidade finita de vorticidade sendo jogada no fluido no instante inicial. (veja o primeiro problema de Stokes).

Substituindo estas identidades na eq(16) encontra-se:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho}\right) = \vec{V}\times\vec{\omega} - \nu\nabla\times\vec{\omega} \qquad (17)$$

Para um sistema de coordenadas inercial fixo na parede, os únicos termos não nulos da eq(17), q-do calculada na parede ($\vec{V}=0$) são

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nu\nabla\times\vec{\omega} \qquad (18)$$

onde o termo $-\nabla\times\vec{\omega}$ é definido como sendo o fluxo de vorticidade através da parede para o fluido. As componentes da eq(18) para o sistema local de coordenadas na parede são:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu\frac{\partial \omega_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\mu\frac{\partial \omega_x}{\partial y}$$

A eq(18) relaciona o fluxo de vorticidade da parede. Ela mostra que para haver um fluxo de vorticidade para o fluido é necessário que haja um gradiente de pressão ao longo da parede.

Até o presente momento foi enfatizado que a vorticidade não é função da pressão, conseqüentemente, não é esperado que a pressão influencie a distribuição de vorticidade. Para ser correto a pressão não influencia a vorticidade diretamente mas sim indiretamente.

Note que as expressões (13) e (14) são uma manifestação da identidade (veja cap. 6 eq (23))

$$\nabla \cdot \tau' = -\mu \nabla \times \vec{\omega}$$

aplicando o teorema de Gauss pode-se mostrar que

$$(n \cdot \tau') = -\mu \, \vec{n} \times \vec{\omega} \qquad (15)$$

Os valores numéricos da tensão na parede e da vorticidade estão diretamente relacionados com a viscosidade dinâmica. Se a tensão na parede for alta a vorticidade também será e vice-versa.

Apesar da eq (15) relacionar a tensão na parede com a vorticidade ela não traz informação e quanta vorticidade a parede está colocando ou retirando do escoamento, em outras palavras, ela não informa sobre o fluxo de vorticidade.

O fluxo de vorticidade é obtido a partir da equação do momento:

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \qquad (16)$$

mas

$$\mu \nabla^2 \vec{V} = -\mu \nabla \times \vec{\omega}$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \nabla\left(\tfrac{1}{2} V^2\right) - \vec{V} \times \vec{\omega}$$

Pela condição de não deslizamento, u e w são nulos na parede, consequentemente $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0 = \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_0 = 0$.

Pela equação da continuidade,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0 + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_0 + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_0 = 0$$

logo, na parede, $\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_0 = 0$. Como não há sucção ou ejeção de massa na parede, então $v = 0$, logo $\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_0 = \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_0 = 0$.

As componentes da vorticidade na parede são:

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_0$$

$$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0$$

A tensão de cisalhamento na parede está diretamente relacionada com a vorticidade na parede. Para o exemplo dado:

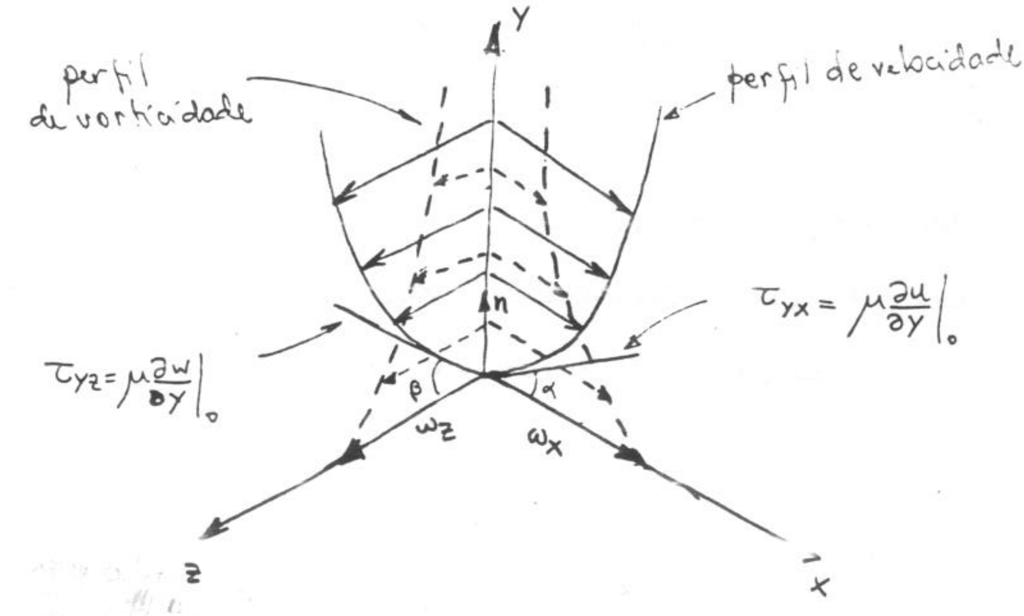
$$\tau_{yx} = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0 = -\mu\, \omega_z \qquad (13)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_0 = +\mu\, \omega_x \qquad (14)$$

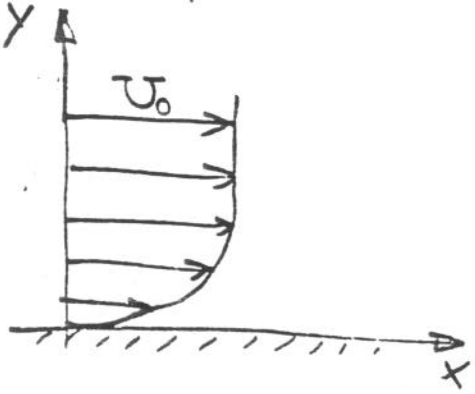
Produção de Vorticidade pela parede sólida

Se até o momento foi apresentado um mecanismo de produção ou destruição de vorticidade devido a taxa de extensão do fluido, outro mecanismo igualmente importante é que paredes sólidas podem introduzir vorticidade em escoamentos na presença de gradientes de pressão e ou de termos inerciais transitórios. Diferentemente do mecanismo de estiramento, a produção de vorticidade por paredes sólidas pode ocorrer tanto em escoamentos 2-D como em 3-D.

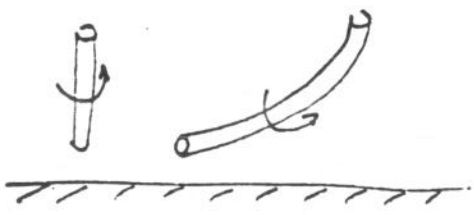
Para que possamos relacionar a vorticidade com o gradiente de pressão ao longo da parede, considere uma parede sólida plana com um sistema de coordenadas originando no ponto P,



Para um escoamento turbulento 2-D, tipicamente o perfil de velocidades próximo a uma parede é mostrado na fig. abaixo.



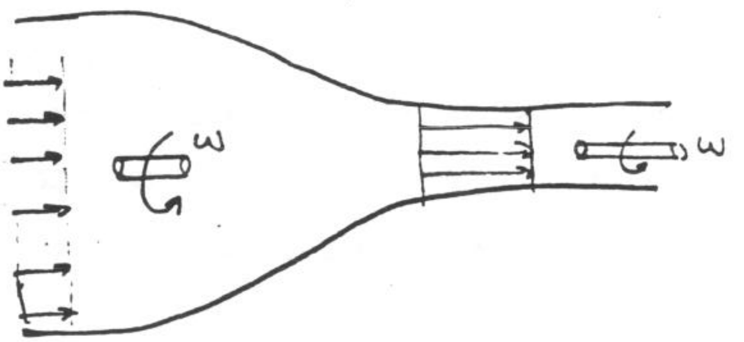
Apesar da componente média da velocidade na direção y ser nula, sua flutuação não é. Esta componente de flutuação de w_x é reorientada e amplificada pelo forte gradiente de velocidade $\partial\bar{u}/\partial y$ próximo da parede, como mostra a figura



causando mais efetivamente uma mistura entre as camadas do fluido, típica do escoamento turbulento.

as linhas de vorticidade, originalmente paralelas, são deformadas devido a presença do cilindro. Ao se curvarem, a ...
da velocidade do escoamento começa a ter uma componente na mesma direção da vorticidade o que causa a amplificação.

Contração com vorticidade axial

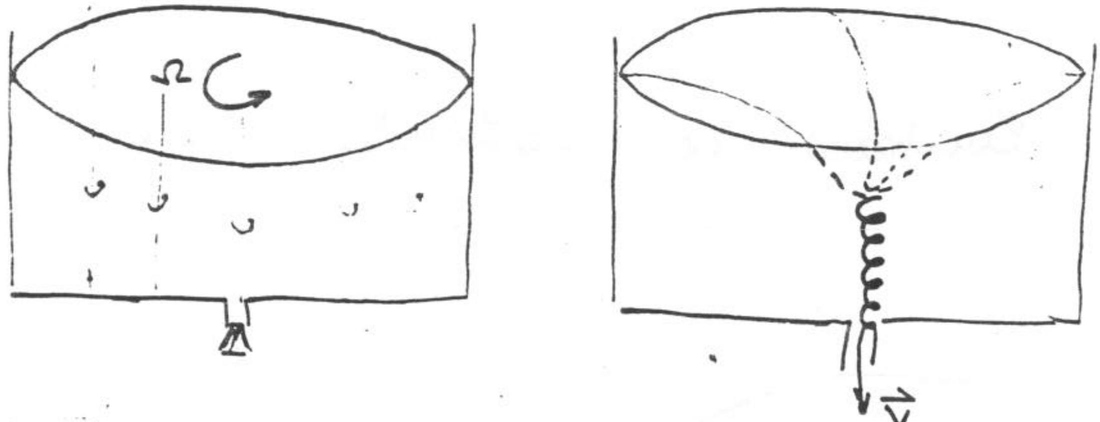


Escoamentos Turbulentos

O mecanismo de estiramento é um dos agentes que promove as perturbações ou por melhor dizer, flutuações de velocidades em escoamentos turbulentos, mesmo ainda que estes sejam bi-dimensionais.

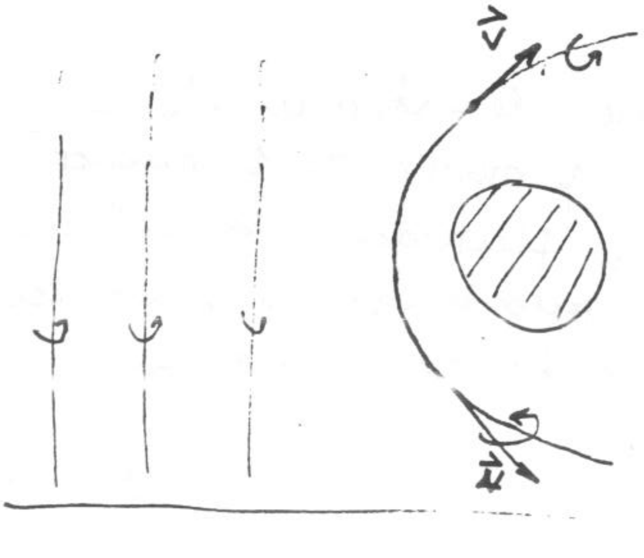
Uma série de escoamentos secundários podem ser explicados considerando apenas este mecanismo de estiramento,

Fluido girando com rotação constante,



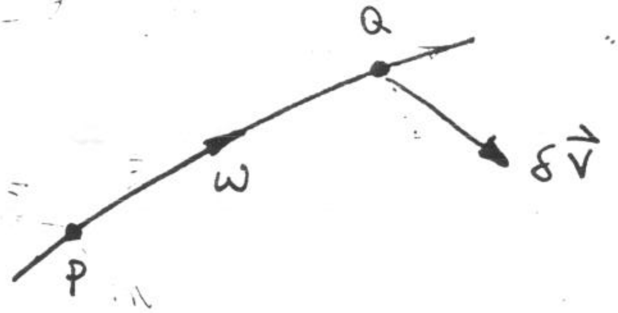
Q^do a rolha é retirada, a vorticidade do fluido é amplificada devido a aceleração vertical do fluido (paralela a vorticidade) causando um vórtice intenso e uma depressão na sup. livre do escoamento.

Escoamento Ferradura



estiramento. O termo responsável por este mecanismo é o produto $(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{V}$, e é este termo que faz com que a eq. da vorticidade, para 3-D, se torne distinta da eq. da energia,

$$(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{V} = |\omega| \lim_{PQ\to 0} \frac{\delta\vec{V}}{PQ}$$



Porção de uma linha de vorticidade.

Este termo mostra que a taxa de variação de vorticidade pode ser aumentada ou diminuída havendo uma extensão ou contração do elemento de linha PQ devido a componente do $\vec{V}$ paralela a $\vec{\omega}$.

O estiramento é uma característica única de escoamentos tri-dimensionais

Prof. EUGENIO SPANO ROSA
Matric. 06520-0
FEM – UNICAMP

6.1.1. Mecanismos de Transporte e Geração de Vorticidade

Para escoamentos 2-D a vorticidade pode ser tratada como um escalar (porquê?) Para escoamentos no plano xy, a sua eq. de transporte, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$,

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}\right) \qquad (11)$$

é de forma idêntica a equação da energia, onde ω_z é trocado por temperatura T

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \qquad (12)$$

Os mecanismos de transporte de vorticidade, para escoamentos 2-D, são idênticos aos mecanismos de transporte de energia, a saber convecção e difusão. Ao longo do curso veremos exemplos qualitativos e quantitativos que ilustrarão estes mecanismos.

Para escoamentos 3-D a vorticidade não pode ser tratada como um escalar, mas sim um vetor que é transportado via convecção, Equação similar a esta foi também utilizada por Harlow & Welch (1965) para descrever o acoplamento entre o campo de pressão num método numérico com variáveis primitivas:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla^2 p = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta) + \mathrm{Def}(\vec{V}) : \mathrm{Def}(\vec{V}) - |\omega|^2 - \nu\nabla^2(\Delta); \quad \text{onde } \Delta = (\nabla \cdot \vec{V}), \tag{8}$$

ela ou suas derivações são extensivamente empregada em métodos de volumes finitos tipo SOLA, SIMPLE, SIMPLEC, SIMPLEST entre outros.

Em coordenadas cartesianas e bi-dimensional (x,y) & (u,v), a equação da pressão toma a forma:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla^2 p = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \tag{9}$$

ou, substituindo-se a indentidade fornecida pela equação da conservação de massa,

$$0 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]^2 \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = -2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{10}$$

chega-se a sua forma alternativa:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla^2 p = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{11}$$

A partir do campo de vorticidade o campo de pressões pode ser determinado. Considere a Eq. N-S tomando-se a divergência de ambos os lados:

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\vec{V} + \nabla\vec{V}\cdot\vec{V} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\vec{V} \right\}, \tag{1}$$

para um fluido com propriedades constantes, isto é, ρ e μ constantes, $\nabla\cdot\vec{V} \equiv 0$, Eq. acima é simplificada:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\nabla\cdot\vec{V}}_{=0}\right) + \nabla\cdot\left[\nabla\vec{V}\cdot\vec{V}\right] = -\nabla\cdot\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\left(\underbrace{\nabla\cdot\vec{V}}_{=0}\right) \tag{2}$$

ou

$$\nabla\cdot\left[\nabla\vec{V}\cdot\vec{V}\right] = -\frac{1}{\rho}\nabla^2 p \tag{3}$$

o termo $\nabla\cdot\left[\nabla\vec{V}\cdot\vec{V}\right]$, expresso em notação indicial fica:

$$\nabla\cdot\left[\nabla\vec{V}\cdot\vec{V}\right] \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\mathrm{Def}\vec{V}} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\mathrm{Rot}\vec{V}}, \tag{4}$$

ou

$$\nabla\cdot\left[\nabla\vec{V}\cdot\vec{V}\right] \equiv \mathrm{Def}\left(\vec{V}\right):\mathrm{Def}\left(\vec{V}\right) - |\omega|^2 \tag{5}$$

onde:

$$\mathrm{Def}\left(\vec{V}\right):\mathrm{Def}\left(\vec{V}\right) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\mathrm{Def}\vec{V}} \quad \& \quad |\omega|^2 \equiv -\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\mathrm{Rot}\vec{V}} \tag{6}$$

Substituindo as definições da Eq. (6) na Eq. (3) chega-se a:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla^2 p = \mathrm{Def}\left(\vec{V}\right):\mathrm{Def}\left(\vec{V}\right) - |\omega|^2 \tag{7}$$

A equação (7) define o acoplamento entre o campo de pressão e o campo de velocidades via tensor de deformação e o módulo da vorticidade. Nota-se que a pressão é governada por uma equação de Poisson. Uma vez conhecido-se o campo de vorticidades pode-se determinar o campo de pressão.

É interessante notar o gradiente de densidade é radial, considerando um eixo que passa pela chama, enquanto que o gradiente de pressão é paralelo ao eixo z. Como consequência $\nabla(1/\rho)\times\nabla p \neq$ e isto implica que uma circulação deve aparecer para um circuito C que atravessa esta região. Isto pode ser comprovado experimentalmente notando as linhas de corrente do escoamento. Uma circulação surge junto a placa com o sentido de aumentar a densidade e para porções afastadas da placa, $z \gg 1$, no sentido de diminuir a densidade do fluido.

Análogo a este caso pode-se também citar escoamentos de correntes marítimas por variação da salinidade da água.

É importante destacar que Γ ou vorticidade pode ser introduzida no escoamento pelo simples fato de haver <u>adição ou remoção de calor</u> ao mesmo, independente se o fluido tiver ou não um valor alto de viscosidade

Em vista destas considerações, a taxa de variação da circulação para um circuito fechado C que se move num fluido barotrópico,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \nu \nabla^2 \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

para um escoamento incompressível, propriedades constantes,

$$\nabla^2 \vec{V} \equiv -\nabla \times \vec{\omega}$$

então

$$\underbrace{\frac{D\Gamma}{Dt}}_{\left[\text{TAXA VAR. de } \Gamma\right]} = -\nu \oint_C (\nabla \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r} = \underbrace{\nu \oiint_A \nabla^2 \vec{\omega} \cdot dA}_{\left[\text{DIFUSÃO de vorticidade}\right]}$$

Para um fluido ideal, $\nu = 0$ então

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \qquad \text{(Teorema de Kelvin)}$$

A circulação é constante em um circuito movendo-se com o escoamento de um fluido com $\nu = 0$ e com densidade constante ou em função da pressão apenas (fluido barotrópico).

As implicações do Teorema de Kelvin são taxativas. Considere o movimento de um aerofólio que começa a se mover em um fluido inicialmente estacionário. No início do movimento, não há vorticidade nem tão pouco circulação. Consequentemente para um dado circuito em questão a vorticidade deve permanecer igual a zero para qualquer outro instante.

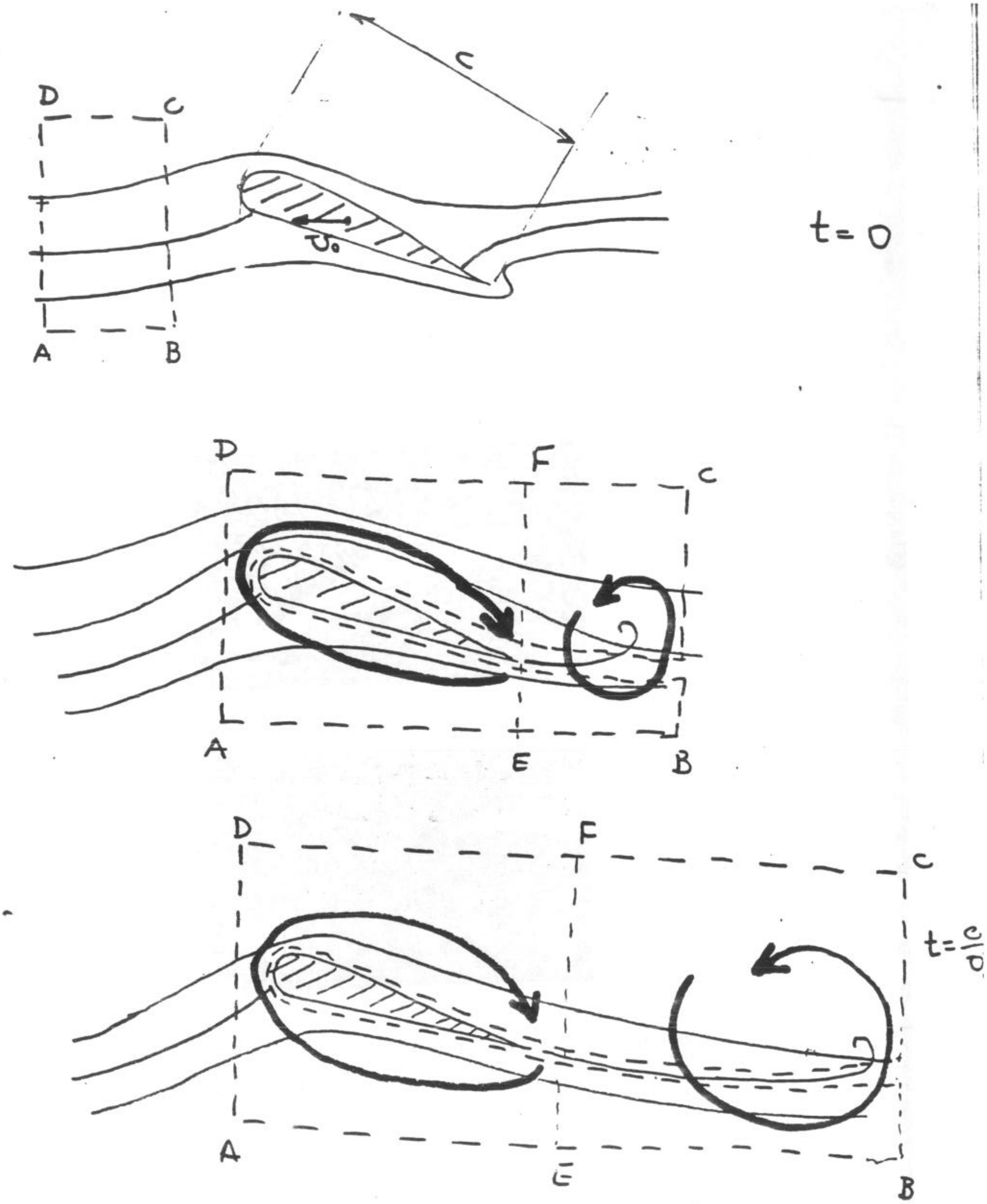
Em vista desta conseqüência do T. Kelvin, pode-se dizer que o aerofólio não terá sustentação porque a circulação é nula.

Felizmente, a viscosidade, independente de quanto pequena ela possa ser, junto com a condição de não deslizamento na superfície sólida faz a geração de circulação possível.

Quando o aerofólio começa a se mover, a velocidade do fluido no bordo de fuga tende ao infinito devido a brusca curva que o fluido faz no bordo de fuga ... trar com a segundo pon

de estagnação. Como vel → ∞ e a existência de viscosidade, isto gera
produção de vorticidade que, devido aos termos convectivos e
não pode ser balanceada unicamente pelos termos
difusivos. O que resulta é o descolamento
do que é chamado de "vórtice inicial" que
produz então uma circulação no circuito.

Mas o fluido compreendido no circuito
não está sujeito a forças viscosas, estando
ele de fora da camada limite e da
esteira. Então, pelo teorema de Kelvin,
a circulação neste circuito deve ser zero.
Para que isto seja verdade, deve haver
uma circulação ao longo do circuito
igual e oposta a circulação do "vórtice
inicial", circuito. Esta circula-
ção que aparece no aerofólio remove
a descontinuidade do bordo de fuga
fazendo com que o fluido saia tangente
(condição de Kutta-Joukowski) e ela é a
causadora da força de sustentação no
aerofólio.


C
D
C
v_0
t=0
A
B
D
F
C
A
E
B
D
F
C
A
E
B

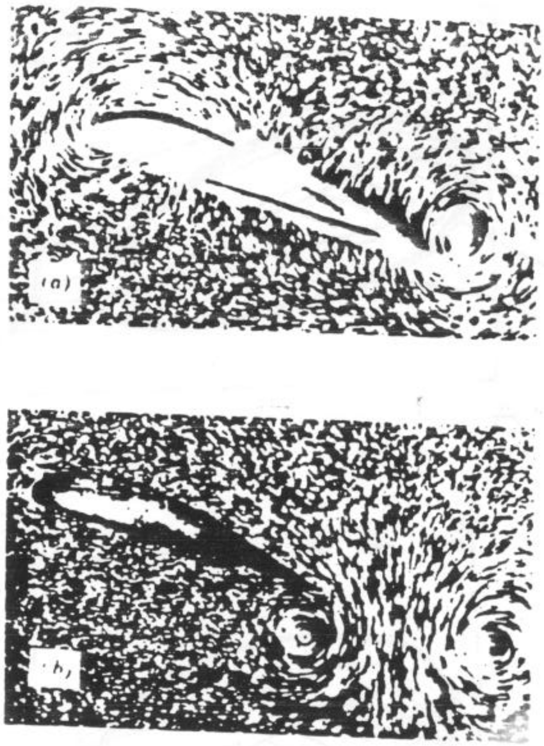


Plate 13 Flow past an airfoil as viewed from a space-fixed reference frame. (a) Immediately after starting the airfoil. Note the starting vortex and the formation of the circulatory flow over the airfoil. (b) Situation when the airfoil was stopped after the formation of the starting vortex. Note the "stopping" vortex and the decay of the circulatory flow. The starting vortex had been detached. Courtesy of Professor O. G. Tietjens. Plate 22 of Prandtl and Tietjens (1934).

Escoamento 2-D

Para um escoamento bi-dimensional, a função corrente ψ é definida em termos de

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad e \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

A vorticidade ω_z também pode ser definida em função de ψ como

$$\omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\nabla^2 \psi$$

Substituindo-se estes valores na eq. da vorticidade (2-D) encontra-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\omega - \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\omega = \nu\nabla^2\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi) = \nu\nabla^4\psi$$

$\omega = \nabla^2\psi$

onde $\nabla^4\psi$ é o operador bi-harmônico definido em coordenadas cartesianas como

$$\nabla^4\psi = \frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}$$

de variáveis dependentes é reduzido de três para uma, isto é a eq. da conservação do momento é função apenas de uma variável, ψ e não mais de u, v e p (variáveis primitivas).

Em contrapartida a esta redução do número de variáveis dependentes a ordem da equação diferencial parcial é elevada de dois para quatro.

Referencias

[1] Panton, R.L.; "Incompressible Flow"
John Wiley (1984)

[2] Batchelor, G.K.; "An Introduction to Fluid Dynamics
Cambridge Un. Press (1985)

[3] Lugt, H.J.; "Vortex Flow in Nature and Technology"
John Wiley (1983)

[4] Sommerfeld, A.; "Mechanics of Deformable Bodies"
Academic Press (1950)

[5] Truesdell, C.A.; "Kinematics of Vorticity", Un. of
Indiana Press (1954)